

УДК 681.513.5

MODELING OF OPTIMAL AUTOMATIC CONTROL OF THE PROCESS OF BIOLOGICAL CLEARING OF POLLUTED WATERS BY FROZEN ORDER REGULATORS

O. Lobok, B. Goncharenko, M. Sych
National University of Food Technologies

Key words:
Fractional calculus
Differentiator
Optimal control
Numerical modeling
Bio-purification of waters

Article history:
Received 19.11.2017
Received in revised form
01.12.2017
Accepted 18.12.2017

Corresponding author:
O. Lobok
E-mail:
npnuht@ukr.net

ABSTRACT

The problem of modeling the control of the process of biological treatment of polluted water using fractional regulators is considered and solved in the paper. Mathematical modeling of the biological purification process as a control object is considered, a linear dynamic control model is obtained. The criterion of the quality of automatic control of a fractional regulator by the functioning of a biological water purification system has been introduced. Optimum tunings of fractional regulators are obtained, the dynamics of transient processes of control action and the state of the purification system is investigated. Numerical simulation of fractional and classical control is carried out, a higher efficiency of fractional regulators is shown.

DOI: 10.24263/2225-2924-2017-23-6-5

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ БІОЛОГІЧНОЇ ОЧИСТКИ ЗАБРУДНЕНИХ ВОД РЕГУЛЯТОРАМИ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, М.А. Сич
Національний університет харчових технологій

У статті розглядається і вирішується завдання чисельного моделювання щодо керування процесом біологічної очистки забруднених вод за допомогою дробових $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів. Отримано оптимальні налаштування дробових регуляторів, досліджено динаміку перехідних процесів керувального впливу і вихідного показника стану очисної системи. Проведено чисельне моделювання керування дробовими $PI^\lambda D^\mu$ -регулятором і класичним PID-регулятором, показана висока ефективність дробових регуляторів.

Ключові слова: дробове числення, диферінтегратор, оптимальне керування, чисельне моделювання, біоочищення вод.

Поставка проблеми. Дробове числення має справу з похідними та інтегралами довільного порядку (раціонального, дійсного і навіть комплексного). Дробовим численням в XVII ст. займалися Ріман, Лиувіль, Грюнвальд, Літнік [4; 5; 8]. Але особливо активно розвивається теорія дробового числення в останні роки, і результати її широко використовуються при дослідженні хаотичної динаміки, динамічних нейронних мереж з дробовими порядками, конструюванні (синтезу) регуляторів дробових порядків у теорії автоматичного керування тощо.

Оператором, що узагальнює класичні диференціальний та інтегральний оператори, називається оператор виду

$${}_a D_t^\gamma = \begin{cases} d^\gamma / dt^\gamma, & \gamma > 0 \\ 1, & \gamma = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\gamma}, & \gamma < 0 \end{cases} \quad (1)$$

де γ — дробовий порядок оператора (дійсне число); a — постійна, пов'язана з початковими умовами динамічного процесу.

Оператор (1) часто називають диферінтегратором, оскільки він об'єднує в собі відразу два поняття — похідної та інтеграла.

Традиційно теорія і практика автоматичного керування орієнтовані на застосування класичного диференціального або інтегрального числення, що є цілком логічним, однак з розвитком дробового числення виникає потреба дослідження можливостей застосування дробових законів керування та побудови дробових регуляторів і виявлення особливостей систем керування з ними.

Метою статті є не тільки порівняння дробових регуляторів з класичними та вивчення можливості й ефективності застосування їх у системах автоматичного керування, але й чисельне моделювання процесів керування очищенням забруднених вод.

Викладення основних результатів дослідження. У пропонованому дослідженні розглянуто задачу чисельного моделювання керування процесом біологічної очистки стічних вод активним мулом з використанням $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів дробового порядку. Очисна система (рис. 1) складається з біореактора-аеротенка і відстійника мулу.

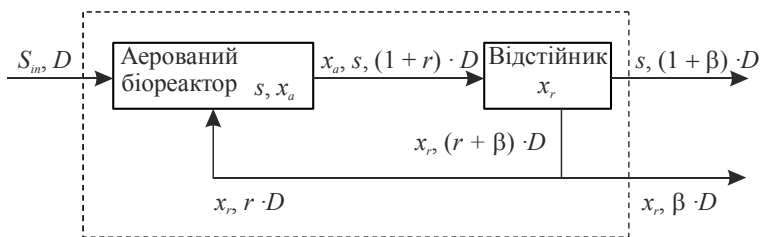


Рис. 1. Схема процесу очищення стічних вод

Математична модель, що описує очищення води за даною схемою, отримана на основі матеріального балансу для аератора і відстійника у вигляді такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_a(t)}{dt} = \mu(t)x_a(t) - D(t)(1+r)x_a(t) + rD(t)x_r(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\mu(t)}{Y}x_a(t) - D(t)(1+r)s(t) + D(t)s_{in}(t) \\ \frac{dx_r(t)}{dt} = -D(t)(\beta+r)x_r(t) + D(t)(1+r)x_a(t) \end{cases}, \quad (2)$$

де $x_a(t)$, $s(t)$ — відповідно, концентрація біомаси і субстрату в біореакторі; $x_r(t)$ — концентрація рециркуляційної біомаси; $D(t)$ — ступінь розведення, який визначається як $D(t) = F(t)/V$, де $F(t)$ — об'ємна швидкість потоку, V — обсяг біореактора; $s_{in}(t)$ — концентрація субстрату у вхідному потоці; Y — фактор виходу (прибутковості) біомаси; $\mu(t)$ — питома швидкість росту біомаси, яка визначається за формулою Моно [3]:

$$\mu(t) = \mu_{\max} \frac{s(t)}{k_s + s(t)}, \quad (3)$$

де μ_{\max} — максимальна питома швидкість росту біомаси; k_s — константа насичення, що визначається експериментальним шляхом; r, β — коефіцієнти, що визначають, відповідно, відношення рециркуляційного потоку і потоку відходів біомаси до вхідного потоку; x_{a0}, s_0, x_{r0} — відповідно, концентрація біомаси, субстрату і рециркуляційної біомаси в початковий момент часу t_0 ; $t_0 < t \leq T$, T — кінцевий момент часу керування процесом.

Як регульований параметр (вихід моделі) виберемо величину $s(t)$ — концентрацію субстрату в біореакторі, яка визначає якість очищення води. Як керувальний вплив (дію) на систему виберемо функцію ступінь розведення $D(t)$.

Для зручності систему (2) запишемо у векторному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (4)$$

де

$$f(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \\ f_3(x(t), u(t)) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ s(t) \\ x_r(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = D(t), \quad (5)$$

$$f_1(x(t), u(t)) = \mu(x(t))x_1(t) - (1+r)x_1(t)u(t) + rx_3(t)u(t),$$

$$f_2(x(t), u(t)) = -\frac{\mu(x(t))}{Y}x_1(t) - (1+r)x_2(t)u(t) + s_{in}(t)u(t),$$

$$f_3(x(t), u(t)) = -(\beta+r)x_3(t)u(t) + (1+r)x_1(t)u(t),$$

$$\mu(x(t)) = \mu_{\max} \frac{x_2(t)}{k_s + x_2(t)}.$$

Регульований параметр при цьому можна записати так:

$$s(t) = x_2(t) = c^T x(t), \tag{6}$$

де $c = (0 \ 1 \ 0)^T$.

Лінеарізуємо перетворену систему (4) в околі заданого номінального керування u^* і відповідного йому вектора рівноважного стану $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$, при якому $f(x^*, u^*) = 0$, і який визначається як розв'язок системи нелінійних рівнянь $f(x, u^*) = 0$ щодо вектора x .

Введемо позначення:

$$\Delta x(t) = \begin{pmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{pmatrix} = x(t) - x^*, \quad \Delta u(t) = u(t) - u^*. \tag{7}$$

Тоді лінеаризовану систему рівнянь моделі (4) можна представити у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x(t)}{dt} = A\Delta x(t) + b\Delta u(t) \\ \Delta x(t_0) = x^0 - x^* \end{cases}. \tag{8}$$

З огляду на співвідношення (6) і позначення (7) рівняння для регульованої змінної (вихід моделі) запишеться у вигляді:

$$\Delta s(t) = c^T \Delta x(t), \tag{9}$$

де $\Delta s(t) = s(t) - c^T x^*$.

Модель керування (8) має один вхід і один вихід. Відомим способом стабілізації потрібних параметрів є застосування регуляторів у зворотному зв'язку в складі контура автоматизованої системи керування. Використаємо дробовий $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор [1; 2] і порівняємо його ефективність з класичним PID -регулятором.

Аналогічно [7; 9] $PI^\lambda D^\mu$ -регулятори представимо у вигляді:

$$\Delta u(t) = k_P (\Delta s(t)) + k_I \left({}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta s(t) \right) + k_D \left({}_{t_0} D_t^\mu \Delta s(t) \right), \tag{10}$$

де k_P , k_I , k_D — налагоджувальні коефіцієнти регулятора; ${}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta s(t)$ — дробова похідна порядку λ ; ${}_{t_0} D_t^\mu \Delta s(t)$ — дробовий інтеграл порядку μ , причому λ, μ — довільні дійсні числа з інтервалу $(0, 2)$, тобто $\lambda, \mu \in (0, 2)$. Якщо $\lambda \geq 2$ або $\mu \geq 2$, то $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор набуває високого порядку, і структура його відрізняється від класичного PID -регулятора. Регулятор (10) є узагальненим дробовим PID -регулятором. При $\lambda = 1$ і $\mu = 1$ маємо класичний

PID-регулятор, якщо $\lambda = 1, \mu = 0$, то отримуємо *PI*-регулятор, при $\lambda = 0, \mu = 1$ маємо *PD*-регулятор і при $\lambda = 0, \mu = 0$ — *P*-регулятор. Всі ці різновиди класичних *PID*-регуляторів є окремими випадками дробового $PI^\lambda D^\mu$ -регулятора (10). Однак $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор є більш гнучким і має можливість краще регулювати (налаштовувати) динамічні властивості систем керування. На *P-I-D*-площині це означає, що замість «стрибків» між чотирма фіксованими точками (*P, PI, PD* і *PID* (рис. 2)) на площині є можливість неперервного пересування ($PI^\lambda D^\mu$) між ними.

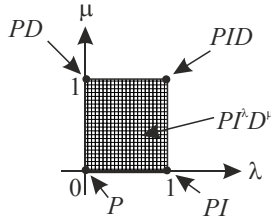


Рис. 2. *P-I-D*-площина дробових порядків похідних та інтегралів

Дробові похідні та інтеграли визначаються як межа

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (11)$$

де $\binom{\alpha}{j}$ — біноміальні коефіцієнти вигляду $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1) \cdot \Gamma(\alpha-j+1)}$, в яких

$\Gamma(x)$ — гама-функція Ейлера вигляду $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} dy$ (нагадаємо, що при цілому $x = k$ вона дорівнює $\Gamma(k+1) = k!$); $[\cdot]$ — ціла частина числа; $h > 0$ — приріст часової координати (квантування).

Якщо $\alpha > 0$, то формула (11) визначає дробову похідну, якщо ж $\alpha < 0$, то дробовий інтеграл. Тому співвідношення (11) часто називають диферінтегратором, як і співвідношення (1). Відзначимо також, що при цілих порядках α в (11) буде кінцева сума, а при дробових α — нескінченне число членів ряду.

З урахуванням (9), $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор (10) запишемо у вигляді оператора від стану $\Delta x(t)$:

$$\Delta u(t) = c^T \left(k_P (\Delta x(t)) + k_I \left({}_{t_0} D_t^{-\lambda} \Delta x(t) \right) + k_D \left({}_{t_0} D_t^\mu \Delta x(t) \right) \right), \quad (12)$$

а критерій якості автоматичного керування функціонуванням системи біологічної очистки як:

$$J_p = \int_{t_0}^T |\Delta s(t)|^p dt = \int_{t_0}^T \left| c^T \Delta x(t) \right|^p dt, \quad (13)$$

де $p > 0$ — параметр, який на практиці приймають рівним $p = 1$ (модуль похибки) або $p = 2$ (середньоквадратична похибка).

Для чисельної реалізації сформульованої задачі оптимального регулювання дискретизуємо систему (8), дробовий $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор (12) і критерій (13), розбивши часовий інтервал $[t_0, T]$ на n частин з кроком $h = (T - t_0) / n$ (h — період квантування). Точки розбиття в $[t_0, T]$ позначимо через t_k , а стан системи (8) в ці моменти часу t_k — через $z_k = \Delta x(t_k)$.

Апроксимуємо неперервний вхідний сигнал $\Delta u(t)$ кусково постійною функцією: $\Delta u(t) = u_k$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ і, використовуючи матрицю лінійної неперервної системи (8), отримаємо такий її дискретний аналог:

$$\begin{cases} z_{k+1} = e^{Ah} z_k + A^{-1}(E - e^{-Ah}) b u_k, & k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ z_0 = x^0 - x^*, \end{cases} \quad (14)$$

де E — одинична матриця; e^{Ah} — матрична експонента.

Далі дискретний дробовий $PI^\lambda D^\mu$ -регулятор представимо у вигляді:

$$u_k = c^T \left(k_p(z_k) + k_I \left(h^\lambda \sum_{j=0}^k w_j^{(-\lambda)} z_{k-j} \right) + k_D \left(h^{-\mu} \sum_{j=0}^k w_j^{(\mu)} z_{k-j} \right) \right). \quad (15)$$

Відмітимо, що при $k = 0$ керувальний сигнал дорівнює:

$$u_0 = (k_p + k_I h^\lambda + k_D h^{-\mu}) c^T z_0. \quad (16)$$

Критерій якості (13) запишемо в дискретизованому вигляді:

$$J_p = \frac{h}{2} \left(|c^T z_0|^p + 2 \sum_{j=1}^{n-1} |c^T z_j|^p + |c^T z_n|^p \right). \quad (17)$$

Чисельне моделювання керованої системи біоочищення і пошук оптимального регулятора здійснювалися при таких вихідних даних: $s_{in} = 200$ [мг/л], $Y = 0,65$, $\mu_{max} = 0,15$ [год⁻¹], $k_s = 100$ [мг/л], $r = 0,6$, $\beta = 0,2$, $u^* = 0,05$ [год⁻¹], $t_0 = 0$, $T = 1$ [год], вектор початкового стану системи (8) приймався рівним $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T = (286, 17, 568)^T$ [мг/л].

Використовувався метод повного перебору з рівномірним кроком для розв'язання завдання мінімізації критерію:

$$I_p(\lambda, \mu) = \min_{k_p, k_I, k_D} J_p(k_p, k_I, k_D, \lambda, \mu) \quad (18)$$

відносно параметрів λ і μ . Результати оптимізації методом повного перебору критерія (18) представлені в таблиці.

Таблиця. Оптимальні налаштування дробового $PI^\lambda D^\mu$ та класичного PID-регуляторів

p	λ	μ	k_p	k_I	k_D	$I_p(\lambda, \mu)$
1	1	1	-0,1381	-3,3019	-0,0016	0,0963
1	0,9750	0,750	-0,2231	0,0072	$-1,0847 \cdot 10^{-5}$	0,0854
2	1	1	-0,1294	-3,6445	-0,0015	0,1184
2	0,9875	0,600	-0,2234	0,0068	$-3,1249 \cdot 10^{-6}$	0,0855

У шпальтах λ і μ наведені порядки похідних та інтегралів дробових регуляторів, в шпальтах k_p, k_I, k_D — оптимальні налаштування цих регуляторів, в останньому стовпчику — мінімальне значення критерію (18). Тут же для порівняння наведені результати оптимізації для класичного PID -регулятора при $\lambda = 1$ і $\mu = 1$.

Результати показують, що значення цільової функції $I_p(\lambda, \mu)$ ($p = 1, p = 2$) при оптимальному дробовому $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторі менші, ніж при класичному PID -регуляторі.

Для дослідження поверхні критерію якості $I_p(\lambda, \mu)$ на рис. 3 зображений графік залежності цього критерію від порядків дробових похідних (μ) та інтегралів (λ), які використовуються в дробовому $PI^\lambda D^\mu$ -законі регулювання (15).

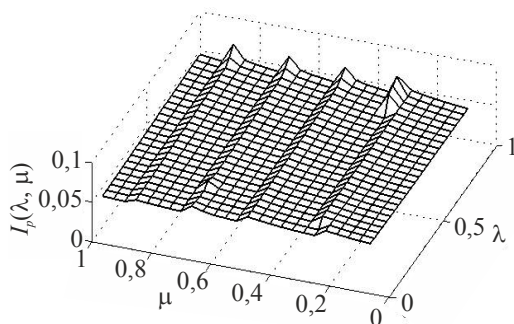


Рис. 3. Графік поверхні функції мети $I_p(\lambda, \mu)$

Результати були отримані за допомогою пакета Toolbox Optimization системи MATLAB. На рис. 4 представлені графіки оптимальних функцій керування (швидкості розведення потоку рідини) системи біологічної очистки води при класичному PID - і $PI^\lambda D^\mu$ -дробових регуляторах (15).

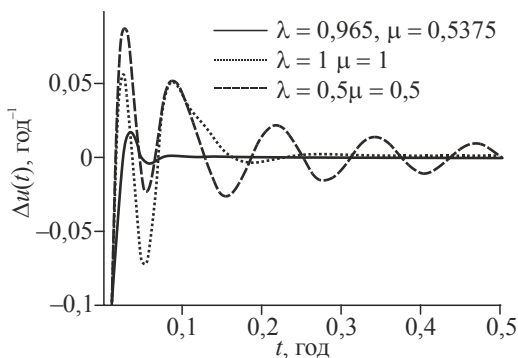


Рис. 4. Динаміка оптимальних дробових $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторів (швидкість розведення потоку рідини) і класичного PID -регулятора ($\lambda = 1, \mu = 1$)

На рис. 5 представлені графіки відповідних оптимальних перехідних процесів (зміни концентрації субстрату) цієї системи за критерієм $J_2(k_p, k_I, k_D, \lambda, \mu)$.

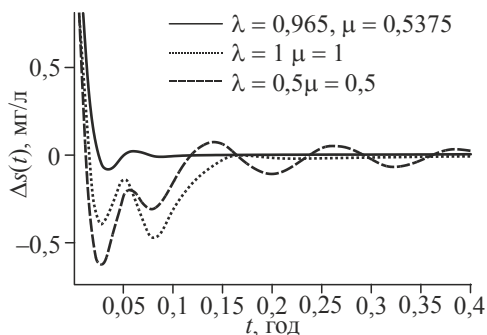


Рис. 5. Оптимальні перехідні процеси зміни концентрації субстрату при різних дробових $PI^\lambda D^\mu$ - і класичному PID -регуляторах

Порівняльний аналіз динаміки перехідних процесів показує більш високу швидкість і якість загасання при оптимальному дробовому $PI^\lambda D^\mu$ -регуляторі ($\lambda = 0,965$, $\mu = 0,5375$) порівняно з оптимальним класичним PID -регулятором ($\lambda = 1$, $\mu = 1$). Видно, що оптимальні дробові регулятори з точним налаштуванням параметрів λ (порядок дробового інтеграла) і μ (порядок дробової похідної) є більш ефективними порівняно з класичним PID -регулятором.

Висновки

Ступінь ефективності дробових регуляторів і причини високої чутливості критерію оптимальності і перехідних процесів щодо порядків дробових похідних та інтегралів вимагають подальших досліджень.

Література

1. Авсиевич А.В. Моделирование систем автоматического управления с дробным ПИД-регулятором [Текст] / А.В. Авсиевич, В.В. Авсиевич // Вестник Самарского государственного технического университета, сер. техническое науки. — 2010. — № 1(26). — С. 6—59.
2. Бутковский А.Г. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация [Текст] / А.Г. Бутковский, С.С. Постнов, Е.А. Постнова // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 3—34.
3. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. [Текст] / В.В. Васильев, Л.А. Симак. — Киев, НАН Украины, 2008. — 256 с.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А.М. Нахушев // — Москва : Физматлит, 2003. — 272 с.
5. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев // Наука и техника. — Минск, 1987. — 688 с.
6. Учайкин В.В. Метод дробных производных [Текст] / В.В. Учайкин // Ульяновск : Артишок, 2008. — 512 с.
7. Podlubny I. Fractional-order systems and PID controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44: 208—214.
8. Podlubny I. Fractional Differential Equations / Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. 198. — Academic Press, 1999. — 340 p.
9. Vinagre B.M., Petras I., Podlubny I., Chen Y.Q. Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control. Nonlinear Dyn. 29(1—4), 269—279 (2002).