

## BODY WAVES IN A REGULARLY LAYERED MEDIUM

V. Levchenko

*Institute of Post-Diploma Training of the National University of Food Technologies*

---

**Key words:**

*Volume shear wave  
Dispersion relations  
Regularly layered medium  
Mode shapes  
Border zones passing*

**Article history:**

Received 13.05.2019  
Received in revised form  
29.05.2019  
Accepted 12.06.2019

**Corresponding author:**

V. Levchenko  
**E-mail:**  
ylvv@ukr.net

---

**ABSTRACT**

Many papers in area of acoustic, radio electronics and mechanics are devoted to the questions of different physical nature wave propagation in the periodically stratified structures. Basic problems, which were studied in these works were conditions for bulk waves existence, and also possibility of surface waves propagation in the limited and semi limited regularly stratified media. At the simulation of physical processes it was assumed in such media, that structure is generated by the reiteration of generating package from  $Q$  the layers of thickness  $h = h_1 + h_2 + \dots + h_Q$ . The axis  $oz$  of a rectangular coordinate system is directed perpendicularly to the division planes. Beginning of the coordinate system origin was coincided with the border of overhead layer in a package. On division planes of layers, at perfect mechanical contact the conditions of continuity of mechanical  $\sigma_{xz}$ ,  $w$  values should be observed. As period of the structure it was adopted the thickness of “originative” package of layers. Such limitation did not allow studying surface and bulking waves, and the feature of distribution of which is conditioned by a few originative packages.

The present paper is devoted to the study of shear bulk waves in structures by the period of which is  $L$  thickness of generating package.

The setting problems were reduced to linear algebraic linear systems. From the requirement of solution existence the dispersion relations  $b_Q = \cos(l\pi/L)$  were obtained, where  $l = 0, 1, \dots, L$ ,  $b_Q$  — spur of transfer matrix of originative package of layers. At fixed  $L$  equation has  $L+1$  root in each range, where a condition  $|b_Q| \leq 1$  is executed. In general case results of dispersion equation can be described by three indexes  $(l, n, L)$ , where  $n$  is the number of pass band. Accordingly, the same indexes can describe the types of vibrations in periodic structures.

## СПЕКТР ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЬ У ПЕРІОДИЧНО-ШАРУВАТОМУ ПРОСТОРИ

**В. В. Левченко**

*Інститут післядипломної освіти Національного університету харчових технологій*

*Велика кількість праць у галузі акустики, радіоелектроніки і механіки твердого деформованого тіла присвячені питанню розповсюдження хвиль різної фізичної природи в періодично стратифікованих структурах. У цих працях досліджувалися проблеми вивчення умов існування об'ємних хвиль і можливості розповсюдження поверхневих хвиль у необмежених і напівобмежених періодично шаруватих структурах. При моделюванні фізичних процесів у таких структурах виходили з припущення, що вони утворені породжуючим пакетом з  $Q$  шарів, товщина якого  $h = h_1 + h_2 + \dots + h_Q$ . Вісь  $ox$  декартової системи координат перпендикулярна до площин розділу властивостей шарів. Початок системи координат збігається з верхньою границею одного з пакетів. На поверхнях розділу властивостей шарів виконуються умови неперервності механічних величин. За період структури приймалася товщина породжуючого пакета шарів. Таке обмеження не давало змоги вивчити особливості розповсюдження та існування об'ємних і поверхневих хвиль, а також особливості, які обумовлені довільною кількістю породжуючих пакетів у циклі, відносно якого розглядається задача.*

*Ця стаття присвячена вивченню особливостей розповсюдження і коливань об'ємних хвиль зсуву в структурах, періодом яких є  $L$  товщин породжуючого пакета шарів.*

*Поставлена задача була зведена до лінійної нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. З вимоги існування обмеженого розв'язку цієї системи було отримано умови існування об'ємних хвиль і дисперсійне рівняння для них  $b_Q = \cos(l\pi/L)$ , де  $l = 0, 1, \dots, L$ ,  $b_Q$  — слід передаточної матриці породжуючого пакета шарів. При фіксованому  $L$  рівняння має  $L+1$  корінь у кожній області, де виконується умова  $|b_Q| \leq 1$ . У загальному випадку розв'язки дисперсійного рівняння можна охарактеризувати трьома індексами  $(l, n, L)$ , де  $n$  - номер зони пропускання об'ємних хвиль. Варто зазначити, що типи коливань  $(l, n, L)$  і  $(rl, rn, rL)$  еквівалентні.*

**Ключові слова:** *об'ємні хвилі зсуву, дисперсійні співвідношення, регулярно-шарувате середовище, моди коливань, межі зон пропускання.*

**Постановка проблеми.** Питанням поширення хвиль різної фізичної природи в періодичних і неоднорідних структурах присвячена велика кількість наукових праць [1—12]. Моделюючи структуру матеріалу, припустимо, що є шарувата структура, утворена періодичним повторенням уздовж осі  $Oz$

пакета шарів товщини  $h$ . Пакет складається з  $Q$  шарів товщини ( $h_q$ ). Властивості шарів характеризуються параметрами Ламе  $\lambda_q, \mu_q$  і щільністю  $\rho_q$ . На поверхнях розділу шарів виконуються умови ідеального контакту механічних величин.

Вважатимемо, що шари однорідні уздовж напрямів  $Ox$  і  $Oy$ . Матеріальні параметри  $\mu$  і  $\rho$  є періодичними функціями змінної  $z$  з періодом  $h$ . Залежність полів від координати  $x$  і часу  $t$  описуватимемо залежністю  $\exp[i(kx - \omega t)]$  ( $k$  — постійна поширення,  $\omega$  — циклічна частота).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Основним напрямом досліджень розповсюдження хвиль у періодично неоднорідних середовищах було вивчення дисперсійних характеристик хвиль, обумовлених періодичністю і неоднорідністю структур [2; 3; 6—8; 12]. У періодичних середовищах досліджувалися умови існування об'ємних хвиль і характер зон пропускання. Дисперсійні властивості і характер коливань об'ємних хвиль у середовищах з періодичною структурою нині є недостатньо вивченими. Частково дисперсійні властивості і характер коливань хвиль досліджувалися в [10; 11], де було отримано дисперсійні співвідношення. Також вивчалися форми коливань пружних хвиль для мінімального значення періоду повторення поля, яке збігалось з періодом структури. Проблема дослідження спектра об'ємних хвиль в загальному випадку є відкритою. Як відомо, періодичне середовище має властивість симетрії трансляції, що забезпечує повторення поля з довільним періодом, а також дослідження спектра і форм коливань об'ємних хвиль зсуву в загальному випадку.

**Мета дослідження:** розробка методики дослідження хвильових процесів у періодично-шаруватих композитних матеріалах, а також дослідження дисперсійних рівнянь для хвиль при довільному виборі періодичності процесів відносно пакета шарів, які породжують простір.

**Викладення основних результатів дослідження.** Процес поширення хвиль зсуву в шарах описується системою рівнянь [4]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}; \quad \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

Рішення системи рівнянь (1) відносно  $u(x, z, t)$  в кожному з шарів простору шукаємо у вигляді:

$$u(x, z, t) = [B_{(n-1)Q+q}^{(1)} \sin \Omega_q(z - z_{n,q}) + B_{(n-1)Q+q}^{(2)} \cos \Omega_q(z - z_{n,q})], \quad (2)$$

де

$$z_{n,q-1} < z < z_{n,q}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ z_{n,q} = (n-1)h + h_1 + \dots + h_q, \quad h = h_1 + h_2 + \dots + h_Q.$$

Підставляючи розв'язок (2) в умови на межах розділу властивостей шарів  $z_{n,q}$  поставлену задачу зведемо до нескінченної системи лінійних рівнянь алгебри:

$$\begin{aligned}
 N(a_1, 0)\vec{B}_{(n-1)Q+1} &= N(a_2, \theta_2)\vec{B}_{(n-1)Q+2}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 N(a_{Q-1}, 0)\vec{B}_{(n-1)Q+Q-1} &= N(a_Q, \theta_Q)\vec{B}_{nQ}; \\
 N(a_Q, 0)\vec{B}_{nQ} &= N(a_1, \theta_1)\vec{B}_{nQ+1}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Матриці  $N(a_i, \theta_i)$ ,  $N(a_i, 0)$ , вектори стовбці  $\vec{B}_i$ , які використовуються в системі (3), збігаються з введеними в [4]. Рішення системи (3) в регулярно-шаруватому просторі шукатимемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{(n-1)Q+1} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_q; 0) \prod_{q=2}^Q N(a_q; \theta_q) N^{-1}(a_q; 0) \vec{Y}_j; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \vec{B}_{(n-1)Q+Q-1} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_{(n-1)Q+Q-1}; 0) N(a; \theta_Q) N^{-1}(a_Q; 0) \vec{Y}_j; \\
 \vec{B}_{nQ} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_q; 0) \vec{Y}_j.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Тут  $\chi_j$  і  $Y_j$ , відповідно, характеристичні числа і власні вектори передатної матриці  $N_{MQ} = (N_Q)^M$ , де,  $N_Q = \prod_{q=1}^Q N^{-1}(a_q; 0) N(a_q, \theta_q)$ ,  $M = 1, 2, \dots$ . Характеристичне рівняння матриці є зворотним [4, 9—11] і має вигляд:

$$\chi^2 - 2b_{MQ}\chi + 1 = 0,
 \tag{5}$$

де  $b_{MQ} = \text{spur} N_{MQ} / 2$ .

Виходячи з виду дисперсійного рівняння (5) при  $M = 1$ , умову існування об'ємних хвиль можна записати так  $|b_Q| \leq 1$ . Межі зон пропускання  $b_Q = 1$  і  $b_Q = -1$  будуть дисперсійними співвідношеннями для об'ємних хвиль зсуву. Межа [4]

$$b_Q = 1
 \tag{6}$$

відповідає коливанням період повторення, який збігається з періодом структури  $h$ , а коливання на межі

$$b_Q = -1
 \tag{7}$$

повторюються з періодом  $2h$ .

Задамо, що  $Q = 2$ , а рішення хвильових рівнянь виберемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1 / 2) + B_{2n-1}^{(2)} \cos \Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1 / 2)]; \\
 &z_{2n-2} < z < z_{2n-1}; \\
 u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \sin \Omega_2(z - z_{2n} + h_2 / 2) + B_{2n}^{(2)} \cos \Omega_2(z - z_{2n} + h_2 / 2)]; \\
 &z_{2n-1} < z < z_{2n},
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

то на підставі умов сполучення між шарами отримуємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} N(a_1, -\theta_1 / 2) \bar{B}_{2n-1} &= N(a_2, \theta_2 / 2) \bar{B}_{2n}; \\ N(a_2, -\theta_2 / 2) \bar{B}_{2n} &= N(a_1, \theta_1 / 2) \bar{B}_{2n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді при  $b_2 = 1$  нескінченна система рівнянь (9) зводиться до двох незалежних систем рівнянь:

$$\begin{cases} B_1^{(2)} \cos(\theta_1 / 2) - B_2^{(2)} \cos(\theta_2 / 2) = 0; \\ B_1^{(2)} a_1 \sin(\theta_1 / 2) + B_2^{(2)} a_2 \sin(\theta_2 / 2) = 0 \end{cases}$$

і системи (10)

$$\begin{cases} B_1^{(1)} \sin(\theta_1 / 2) + B_2^{(1)} \sin(\theta_2 / 2) = 0; \\ B_1^{(1)} a_1 \cos(\theta_1 / 2) - B_2^{(1)} a_2 \cos(\theta_2 / 2) = 0. \end{cases}$$

Такий вигляд систем рівнянь (10) дає змогу показати, що на межах  $b_2 = 1$  зон пропускання відбуваються антисиметричні-антисиметричні (АА) коливання:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_1 (z - z_{2n-1} + h_1 / 2)]; \quad 0 < z < h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \sin \Omega_2 (z - z_{2n} + h_2 / 2)]; \quad h_1 < z < h. \end{aligned}$$

І симетричні-симетричні (SS) коливання щодо серединної площини шарів:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \cos \Omega_1 (z - z_{2n-1} + h_1 / 2)]; \quad 0 < z < h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \cos \Omega_2 (z - z_{2n} + h_2 / 2)]; \quad h_1 < z < h. \end{aligned}$$

На межах зон пропускання, для яких  $b_2 = 1$ , постійні  $\bar{B}_{2n-1}$  і  $\bar{B}_{2n}$  зв'язані співвідношеннями:

$$\bar{B}_{2n+1} = \bar{B}_{2n-1}, \quad \bar{B}_{2n+2} = \bar{B}_{2n}$$

На частотах, що визначаються з рівняння (7), постійні  $B_{2n-1}$  і  $B_{2n}$  зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \dots = \bar{B}_{-3} = -\bar{B}_{-1} = \bar{B}_1 = -\bar{B}_3 = \dots; \\ \dots = \bar{B}_{-4} = -\bar{B}_{-2} = \bar{B}_0 = -\bar{B}_2 = \bar{B}_4 \dots \end{aligned}$$

і період коливань становить  $2h$ , нескінченна система рівнянь (9) зводиться до таких незалежних систем рівнянь:

$$\begin{cases} B_1^{(1)} \sin(\theta_1 / 2) - B_2^{(1)} \cos(\theta_2 / 2) = 0; \\ B_1^{(1)} a_1 \cos(\theta_1 / 2) - B_2^{(1)} a_2 \sin(\theta_2 / 2) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} B_1^{(2)} \cos(\theta_1 / 2) + B_2^{(2)} \sin(\theta_2 / 2) = 0; \\ B_1^{(2)} a_1 \sin(\theta_1 / 2) + B_2^{(2)} a_2 \cos(\theta_2 / 2) = 0. \end{cases}$$

Виходячи з систем (11), можна показати, що на частотах, відповідних  $b_2 = -1$ , має місце симетрія коливань щодо серединних площин шарів ASAS на товщині  $2h$

$$u(x, z, t) = [B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad 0 < z < h_1;$$

$$u(x, z, t) = [B_{2n}^{(1)} \cos \Omega_2(z - z_{2n} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad h_1 < z < h;$$

$$u(x, z, t) = [B_{2n+1}^{(1)} \sin \Omega_1(z - z_{2n+1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad h < z < h + h_1;$$

$$u(x, z, t) = [B_{2(n+20)}^{(1)} \cos \Omega_2(z - z_{2n} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad h + h_1 < z < 2h,$$

або SASA на товщині  $2h$

$$u(x, z, t) = [B_{2n-1}^{(1)} \cos \Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad 0 < z < h_1;$$

$$u(x, z, t) = [B_{2n}^{(1)} \sin \Omega_2(z - z_{2n} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad h_1 < z < h;$$

$$u(x, z, t) = [B_{2n+1}^{(1)} \cos \Omega_1(z - z_{2n+1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad h < z < h + h_1;$$

$$u(x, z, t) = [B_{2n+2}^{(1)} \sin \Omega_2(z - z_{2n} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); \quad h + h_1 < z < 2h.$$

Щоб отримати дисперсійні співвідношення для об'ємних хвиль у загальному випадку розглянемо характеристичне рівняння (5). Виходячи з виду характеристичного рівняння, дисперсійне рівняння для об'ємних хвиль у цьому випадку можна записати:

$$(b_{MQ} - 1)(b_{MQ} + 1) = 0. \quad (12)$$

Використовуючи формулу Абелеса [1; 5]

$$(N_Q)^m = \left\{ \begin{array}{cc} N_Q^{11} U_{m-1}(b_Q) - U_{m-2}(b_Q) & N_Q^{12} U_{m-1}(b_Q) \\ N_Q^{21} U_{m-1}(b_Q) & N_Q^{22} U_{m-1}(b_Q) - U_{m-2}(b_Q) \end{array} \right\},$$

дисперсійне рівняння (12) можна представити у вигляді:

$$(b_Q U_{M-1}(b_Q) - U_{M-2}(b_Q) - 1)(b_Q U_{M-1}(b_Q) - U_{M-2}(b_Q) - 1) = 0, \quad (13)$$

де  $U_M(b_Q)$  поліноми Чебишева. Виконавши ряд перетворень і скориставшись унімодулярності матриці  $N_{MQ}$ , дисперсійне співвідношення (13) можна звести до вигляду:

$$(b_Q^2 - 1)U_{M-1}(b_Q) = 0. \quad (14)$$

Скориставшись властивостями поліномів Чебишева [1], співвідношення (14) можна звести до більш простого рівняння, яке можливо легко дослідити:

$$(b_Q + 1)(b_Q - 1)(b_Q - \cos \frac{\pi}{M})(b_Q - \cos \frac{2\pi}{M}) \dots (b_Q - \cos \frac{(M-1)\pi}{M}) = 0. \quad (15)$$

Такий запис дає змогу зробити висновок, що дисперсійні криві для об'ємних хвиль локалізовані в зонах пропускання об'ємних хвиль.

Для кращого розуміння характеру дисперсійних співвідношень для об'ємних хвиль розглянемо нормальні хвилі в регулярно-шаруватій пластині, що складається з  $M$  породжуючих пакетів. Граничні поверхні пластини  $z = 0$  і  $z = Mh$  вільні від напружень. Підстановка рішень (2) в умови сполучення на площинах розриву властивостей дає змогу звести задачу до системи однорідних рівнянь щодо невідомих  $B_p^{(j)}$  ( $j = 1, 2; p = 1, 2, \dots, MQ$ ):

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(a_1, \theta_1) \bar{B}_1 &= 0; \\ N(a_1, 0) \bar{B}_{(n-1)Q+1} &= N(a_2, \theta_2) \bar{B}_{(n-1)Q+2}; \\ &\dots\dots\dots \\ N(a_{Q-1}, 0) \bar{B}_{(n-1)Q+Q-1} &= N(a_Q, \theta_Q) \bar{B}_{(n-1)Q+Q}; \\ \bar{N}_Q(a_Q, 0) \bar{B}_{MQ} &= 0; \\ n &= 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{16}$$

Тут введені вектор рядки  $\bar{N}(a_q, \theta_q) = [N^{11}(a_q, \theta_q); N^{11}(a_q, \theta_q)]$ .

Ввівши в системі (16) заміну невідомих за формулою  $\bar{C}_{(n-1)Q+q} = N(a_q, 0) \bar{B}_{(n-1)Q+q}$ , систему рівнянь (16) у нових змінних можна записати так:

$$\begin{aligned} \bar{N}(a_1, \theta_1) N(a_1, 0) \bar{C}_1 &= 0; \\ C_{(n-1)Q+1} &= N(a_2, \theta_2) N^{-1}(a_2, 0) \bar{C}_2; \\ &\dots\dots\dots \\ C_{(n-1)Q+Q-1} &= N(a_Q, \theta_Q) N^{-1}(a_Q, 0) \bar{C}_Q; \\ \bar{N}(a_Q, 0) N^{-1}(a_Q, 0) \bar{C}_{LQ} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

У результаті рекурентних перетворень система (17) зведеться до виду  $N_{MQ}^{12} \bar{C}_1^{12} = 0$ , тут  $N_{MQ} = (N_Q)^M$ . З вимоги існування нетривіального рішення системи (17) і, використовуючи властивості поліномів Чебишева, знаходимо дисперсійні рівняння для нормальних хвиль зсуву в пластині:

$$\begin{aligned} N_Q^{12} &= 0; \\ (b_Q - \cos \frac{\pi}{M})(b_Q - \cos \frac{2\pi}{M}) \dots (b_Q - \cos \frac{(M-1)\pi}{M}) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Такий запис дисперсійних співвідношень дає змогу стверджувати, що дисперсійні криві, що визначаються другим співвідношенням (18), збігаються з дисперсійними кривими для об'ємних хвиль, які локалізовані в зонах пропускання.

При фіксованому  $M$  рівняння (15) має  $M - 1$  корінь у кожному з діапазонів, де виконується умова  $|b_Q| < 1$ . Кожне з рішень рівняння  $b_Q = \cos(m\pi / M)$  в

загальному випадку може бути охарактеризоване трьома індексами ( $l, m, M$ ), де  $m=1,2,\dots,M-1$ , а  $l$  порядковий номер зони пропускання при зростанні частоти від нуля. Відповідно, цими ж індексами можуть бути охарактеризовані і типи коливань у періодичних структурах. Відзначимо, що типи коливань  $(l, m, M)$  і  $(l, rm, rM)$  є еквівалентними. Рішення рівнянь  $b_Q = 1$ ;

$b_Q = -1$  будемо характеризувати індексами  $t$  і  $s$ , де  $s$  приймає два значення  $-1$  або  $+1$  відповідно до виду межі, а  $t$ -порядковий номер рішення рівняння (6) або (7).

Аналіз отриманих дисперсійних співвідношень в загальному випадку можливий тільки чисельними методами. Нижче наведені результати чисельного аналізу при  $Q = 2$  і  $h_1 = h_2$ . Властивості шарів збіглися з властивостями CdS і ZnO [9].

На рис. 1 в безрозмірних координатах ( $z/h, u(z)/u(0)$ ) представлені форми коливань для межі  $b_2 = -1$  зон пропускання. У нижній частині рисунків у дужках наведені значення безрозмірних величин  $k^* = kh$  і  $\omega^* = \omega h \sqrt{\rho_0 \lambda_0^{-1}}$  ( $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \lambda_0 = 10^{10} \text{ Па}$ ) для яких проводився аналіз форм коливань, а у верхній — в дужках значення індексів  $t$  і  $s$ .

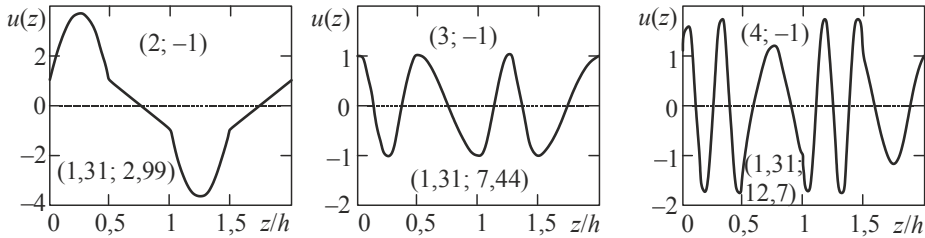


Рис. 1

Як показали чисельні експерименти, частково представлені на рис. 1, форми коливань у цьому випадку мають симетрію, яка підпорядковується правилу  $u(z) = -u(h+z)$ , де  $0 \leq z \leq h$ . З ростом значення індексу  $t$  зростає число коливань на періоді повторення форм коливань і зростає число вузлових точок.

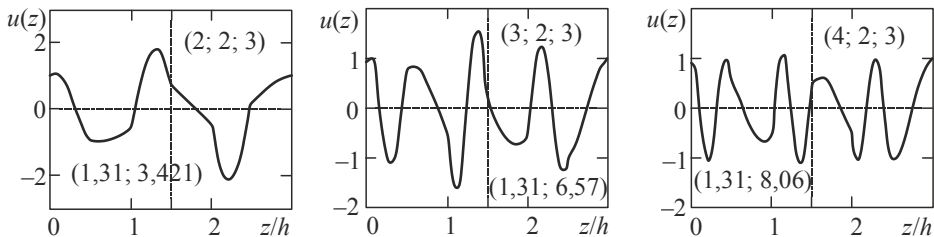


Рис. 2



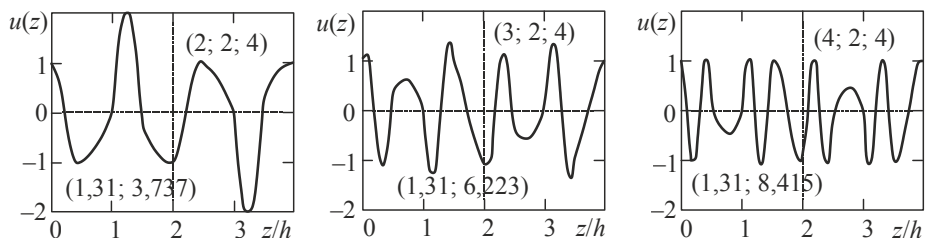


Рис. 3

Як впливає з рис. 2 і 3, форми коливань мають різну симетрію при парному значенні  $M$  і непарному. При парному  $M$  значення  $u(z)$  на періоді коливань  $Mh$  підкоряються правилу  $u(z) = -u(Mh/2 + z)$ , де  $0 \leq z \leq Mh/2$ . Зі зростанням значення індексів  $M$  або  $l$  зростає кількість вузлових точок на інтервалі  $0 \leq z \leq Mh$ . Якщо  $M$  парне, то вузлові точки на періоді коливань будуть при  $z = sh$ , де  $s = 1, 3, \dots, M/2 - 1$ . Більшість вузлових точок локалізовані в шарі з мінімальним значенням швидкості  $c_i = \sqrt{\mu_i / \rho_i}$ . Показано, що форми коливань сильно залежні від значення індексів  $l$  і  $M$ , а від значень індексу  $m$  такої залежності не простежується.

### Висновки

У результаті проведеного дослідження вирішена задача про поширення об'ємних хвиль зсуву в регулярно шаруватих структурах, коли поле коливань має періодом довільне ціле значення періоду структури. Отримано дисперсійні співвідношення для нормальних і об'ємних хвиль. Вид отриманих дисперсійних співвідношень дає змогу зробити висновок, що дисперсійні криві для об'ємних хвиль, за винятком меж зон пропускання, збігаються з дисперсійними кривими для нормальних хвиль у регулярно-шаруватій платині з вільними від напружень зовнішніми поверхнями. При фіксованому  $M$  ( $M$  — число періодів структури, відносно якої повторюється поле) дисперсійні співвідношення для об'ємних хвиль мають  $M + 1$  корінь в кожній із зон пропускання. Кожне з рішень дисперсійного рівняння в загальному випадку може бути охарактеризоване трьома індексами  $(m, l, M)$ , де  $m = 1, 2, \dots, M - 1$ , а  $l$  порядковий номер зони пропускання при зростанні частоти від нуля. Відповідно, цими ж індексами можуть бути охарактеризовані і типи коливань в періодично шаруватих структурах. Відзначимо, що типи коливань  $(m, l, M)$  і  $(rm, l, rM)$  є еквівалентними. Показано, що форми коливань і їхня симетрія суттєво залежать від значення індексів  $l$  і  $M$ , а від значень індексу  $m$  такої залежності не простежується.

### Література

1. Баас Ф. Г., Булгаков А. А., Тетервов А. П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. Москва: Наука, 1989. 288 с.
2. Багно А. М. Дисперсионный спектр волнового процесса в системе слой идеальной жидкости — сжимаемый упругий слой. *Прикладная механика*. 2015. Том 51, № 6. С. 52—60.

3. Рушицкий Я. Я. О нелинейно упругой волне Стоунли. *Прикладная механика*. 2014. Том 50, № 6. С. 39—45.
4. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. Київ: Наук думка, 1982. 200 с.
5. Born M., Wolf E. Principles of optics. Cambridge U.K: Cambridge University Press, 1999. 1986 p.
6. Dieulesant E., Royer D. Ondes elastiques dans les soliedes. Application au raiment du signal. Paris: Masson et C, 1974. 424 p.
7. Guz A. N. On the foundation of the ultrasonic non — destructive determimation of stresses in near the surface layeres of materials. *Review. Journal. Physical Science and Application*. 2011. Vol. 1, No. 1. P.1—15.
8. Guz A. N., Rushchitsky J. J. Computational simulation of harmonical wave propagation in fibrious micro and nanocomposites. *Composite Science and Technology*. 2007. Vol. 67, No. 5. P. 861—866.
9. Levchenko V. V. Propagation of magnetoelastic shear waves through a regularly laminated medium with metalized interfaces. *International. Applied. Mechanics*. 2004. Vol. 40, No. 1. P.17-25.
10. Levchenko V. V., Podlipenets A. N., Shul'ga N. A. Mode shapes at the boundaries of the transmission zones for plane-polarized bulk waves in a regularly layered medium *International. Applied. Mechanics*. 1985. Vol. 21, No. 1. P. 13—16.
11. Levchenko V. V., Podlipenets A. N., Shul'ga N. A Mode Shapes at The boundaries of the transmission zones for Shear bulk waves *International. Applied. Mechanics*. 1984. Vol. 20, No. 11. P. 38—45.
12. Rushchitsky J. J. Nonlinear elastic waves in materials. Berlin: Springer, 2014. 453 p.