

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРА РАССТОЯНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ  
ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ДЕКОДИРОВАНИЯ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ****ВИКОРИСТАННЯ СПЕКТРА ВІДСТАНЕЙ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ  
ЗАВАДОСТІЙКОСТІ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ****THE USING OF A DISTANCE SPECTRUM FOR CALCULATIONS  
OF A NOISE IMMUNITY OF THE CONVOLUTIONAL CODES DECODING**

**Аннотация.** В статье представлено развитие концепции ошибочных событий в сочетании с возможностями метода тест-пакета для анализа помехоустойчивости декодирования сверточных кодов.

**Аннотація.** У статті показано розвиток концепції помилкових подій у поєднанні з можливостями методу тест-пакета для аналізу завадостійкості декодування згорткових кодів.

**Summary.** In paper the development of the erroneous events conception in a combination with possibilities of test-package method for the analysis of a decoding noise immunity of convolution codes is presented.

Сверточные коды (СК) все шире используются в цифровых телекоммуникационных системах для повышения помехоустойчивости передачи информации при действии различных помех. Наиболее актуальным признано применение кодера СК в сочетании с декодером, реализующим алгоритм декодирования Витерби [1]. При проектировании систем с кодеками СК первостепенным является решение проблемы выбора кода, обеспечивающего заданную помехоустойчивость при допустимом уровне снижения скорости передачи информации, который определяется скоростью кода. В специальной литературе по этим вопросам подобная оценка значимости применяемого СК именуется как «эффективность кодирования» [1].

При этом оценки эффективности базируются на таких параметрах, как длина кодирующего регистра  $K$ , скорость кода  $R$ , свободное расстояние  $d_f$  (по терминологии [1] *просвет* на решетчатой диаграмме СК). Строго говоря, наиболее полной характеристикой эффективности применения СК является степень снижения вероятности ошибки в информационных символах, отдаваемых получателю цифровых сообщений на выходе системы с кодированием, по сравнению со случаем передачи без применения кода. Фактически, это положение признается во многих руководствах западных авторов [1, 2, 3].

В частности, в монографии [1, форм. 7.21] предпринимается попытка оценки сверху вероятности битовой ошибки на основе применения производной *порождающей функции* сверточного кода. Более подробно методика вычислений порождающих функций рассмотрена в пособии [4, разд. 7.2]. В то же время, метод порождающих функций в монографии [5] подвергнут критике как громоздкий метод, требующий больших затрат ручного труда для вычисления значений эффективности применения кода. Там же предложено для исследования свойств СК использовать простой в реализации метод «тест-пакета», позволяющий с использованием компьютерного моделирования определять такой параметр СК, как свободное расстояние. Свободное расстояние СК  $d_f$  есть первый член *спектра расстояний* СК [6]. В теории кодирования принято сравнивать эффективность применения кодов по величине свободного расстояния, поскольку значение  $d_f$  входит во все выражения для вычислений вероятности ошибки декодирования как в учебной [5], так и в научной литературе [7]. Такой подход базируется на *упрощенной трактовке* процессов возникновения ошибок при декодировании зашумленных последовательностей СК алгоритмом Витерби. Более точные оценки и учет спектра информационных ошибок на выходе декодера важны также при синтезе сигнально-кодовых конструкций [7]. Ранее в пособии [6] отмечалось, что точная оценка помехоустойчивости декодирования СК может быть основана на концепции «ошибочных событий», в которой одновременно учтены спектр расстояний и спектр информационных ошибок декодируемых последовательностей. После публикации пособия [6] и разработки в монографии [7,

разд. 6.2] метода «тест-пакета» оказалось, что программная реализация этого метода позволяет простым способом не только одновременно вычислять спектры расстояний и спектры информационных весов исследуемого СК, но и, с использованием этих данных, получать количественную оценку вероятности ошибки декодирования СК. Однако в литературе это направление слабо развито. *Цель настоящей работы* – дальнейшее развитие концепции ошибочных событий с учетом возможностей применения метода «тест-пакета» для численного анализа помехоустойчивости декодирования сверточных кодов.

**1. Концепция ошибочных событий при декодировании сверточных кодов.** Сущность понятия ошибочного события состоит в следующем. Как известно, полное представление кодовых последовательностей на выходе кодера СК дает решетчатая диаграмма, которая является разверткой во времени диаграммы состояний кодера [5,6]. Пример решетчатой диаграммы короткого кода (5,7) показан на рис. 1. Помехоустойчивость декодирования зависит от дистанционных свойств кодовых последовательностей на выходе кодера. Степень различия между путями на решетчатой диаграмме определяется их *несовпадающими участками путей* на интервале между некоторыми состояниями. Подобная ситуация иллюстрируется диаграммой на рис. 1, где жирной линией показаны участки несовпадения, которые начинаются с момента, когда ветви путей *ответвляются* от состояния 10, и далее эти участки путей *сливаются* в состоянии 01.

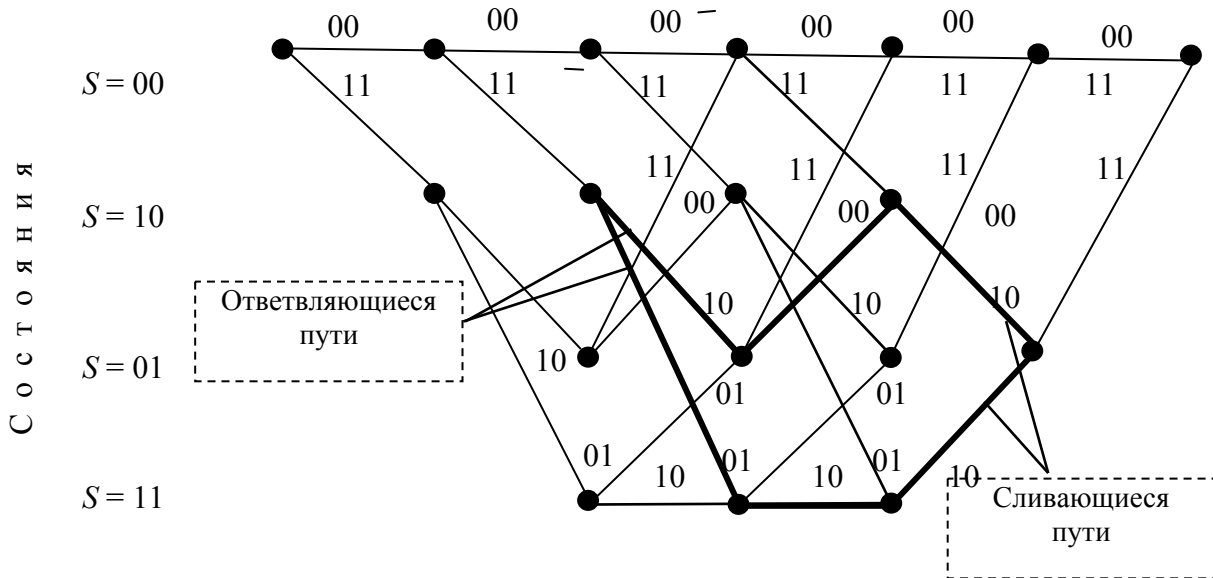


Рисунок 1– Решетчатая диаграмма работы кодера СК

Для линейных кодов начальное и конечное состояния участков несовпадения можно полагать равными нулю. Набор ненулевых участков решетчатой диаграммы между нулевыми состояниями содержит исчерпывающую информацию о дистанционных свойствах СК. Набор всех возможных расстояний  $d_i$  (в выбранной метрике) от множества ненулевых путей до полностью нулевого пути называют *спектром расстояний  $D$*  (СР) [4] сверточного кода. В частности, минимальное расстояние Хэмминга ненулевых отрезков путей на рис. 1 между левым и правым крайними нулевыми состояниями равно  $w_{\min} = 5$  и определяет свободное расстояние этого кода  $d_f$ . При декодировании по алгоритму Витерби декодер совершает *ошибку* выбора пути, отстоящего от переданного пути на расстояние, которое превышает половину расстояния до ближайшего пути. Всякий такой *ошибочный выбор пути декодирования* сопровождается появлением на выходе декодера *пакета информационных ошибок* (ПИО). Статистика информационных ошибок  $e_i$  в составе этих пакетов определяется *спектром информационных ошибок  $E$*  (СИО). Структуры спектра расстояний  $D$  и спектра информационных ошибок  $E$  зависят от свойств конкретного сверточного кода. Рис. 1 иллюстрирует *пакетное представление* работы кодера СК. Как отмечалось в работе [7, разд. 6.2], подобное пакетное представление лежит в основе метода экспериментального определения свободного расстояния (метода «тест-пакета»). Тест-пакет состоит из случайного набора двоичных символов,

окруженного отрезками последовательностей из нулей. Начальная нулевая последовательность предшествует началу развития решетки. Заключительная последовательность из нулей обеспечивает «очистку» кодера и «схождение» путей в нулевое состояние. Полный набор всех расстояний образует спектр расстояний СК. Минимальное расстояние в составе СР и есть свободное расстояние исследуемого кода  $d_f$ . К примеру, в табл. 1 представлены члены спектров СР и СИО кода (5,7), вычисленные по диаграмме на рис. 1

Таблица 1– Спектры СР и СИО кода (5,7)

Начальное состояние	Нулевые пути	Вес пути $d_i$	Пакет информационных ошибок	Вес пакета ПИО $e_i$	Конечное состояние
00	11,10,11	5	100	1	00
00	11,01,01,11	6	1100	2	00
00	11,01,10,01,11	7	11100	3	00

Следовательно, спектр расстояний этого кода, записанный в виде последовательности расстояний по мере их возрастания, начиная с наименьшего, будет иметь вид:  $D = \{5,6,7\}$ .

## 2. Расчет вероятности ошибки декодирования СК с учетом спектров СР и СИО.

При декодировании с мягким решением расстояние между различными путями вычисляют в метрике Евклида [5]. Если двоичные кодовые последовательности отличаются в  $k$  символах, а в канале используют бинарную фазовую модуляцию ФМ-2, то расстояние между путями, соответствующими этим последовательностям, равно

$$d_k = 2k\sqrt{E_k}$$

Учитывая, что энергия каждого кодового символа  $E_k = E_\sigma R$ , расстояние определим как

$$d_k = 2k\sqrt{E_\sigma R}$$

Суммарная дисперсия отсчетов помех, действующих на  $k$  кодовых символов,  $\sigma_k^2 = kN_0/2$ . Ошибка в выборе пути произойдет, когда помеха превысит половину расстояния  $d_k$ , т.е.

$$P_k = V[(2kE_\sigma/N_0)^{\frac{1}{2}}], \tag{1}$$

где

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$$

есть дополнение интеграла вероятности до единицы. Таким образом, расчет вероятности ошибочного воспроизведения двоичного символа на выходе декодера сводится к вычислению спектра расстояний  $D$ , спектра информационных ошибок  $E$ , расчету вероятности ошибочного выбора пути по формуле (1) и последующему вычислению верхней оценки вероятности ошибки бита по приведенному ниже выражению

$$p \leq \sum_{k=d_f}^\infty e_k P_k \tag{2}$$

Составляющие спектра расстояний  $D$  и спектра информационных ошибок  $E$  могут быть определены экспериментально для каждого конкретного сверточного кода.

## 3. Разработка программы для расчетов вероятности ошибки декодирования.

В соответствии с изложенным выше разработана программа, реализующая вычисления составляющих спектра расстояний  $D$  и спектра информационных ошибок  $E$  по методу «тест–пакета» и заключительный расчет вероятности ошибки бита  $p$ . Программа разработана с использованием пакета визуального объектно-ориентированного программирования HP VEE.

Структура программы показана на рис. 2,а. Метод «тест–пакета» [7, с. 122] основан на моделировании выходных последовательностей кодера при воздействии на его вход специальным

образом сформированного *тест-пакета*, который обеспечивает порождение кодером всех возможных отрезков путей (ветвей) из начального нулевого состояния в такое же нулевое состояние. Для гарантии перебора всех возможных ветвей центральная часть тест-пакета (*активная часть* на интервале  $T$ , рис. 2,б) должна содержать все возможные комбинации входных символов. Для обеспечения полноты вариантов активной части пакета она формируется из потока случайных равновероятных независимых символов. В этом случае имеется гарантия полного перебора вариантов ненулевых ветвей на выходе кодера. В последующем производится анализ ветвей на выходе кодера с целью оценки распределения весов, а также анализ содержимого входного тест-пакета. Форма тест-пакета и временные диаграммы приведены на рис. 2,б. Пакет содержит центральную активную часть длиной  $T = (Z2-Z1)$  символов, которая заполнена случайной последовательностью символов и окружена отрезками из нулевых символов. При подаче такого пакета на вход кодера на его выходе формируется последовательность кодовых символов, центральная часть которой содержит символы ветвей, соединяющих нулевые состояния кодера. Для определения весов анализируемых ветвей они подаются на накопитель, который реализован блоком аккумулятора со сбросом. Аккумулятор накапливает значения символов анализируемой ветви и сохраняет результат накопления до момента отсчета. Выход накопителя подается на блок анализа весов.

Работа аккумулятора должна быть согласована во времени с прохождением пакета через кодер: *сброс* производится в момент  $C$  и *отсчет веса ветви* производится в момент  $S$ . Отсчитанные значения весов ветвей подаются на блок анализа, в котором организован *анализ распределения весов*. Для корректной работы программы необходимо выполнение следующих условий:  $T > K$  ( $K$  – длина кодирующего регистра),  $Z1 < Z2$ ,  $Z2 < P$ ,  $C = 0$ ,  $Z2 < S < P$ . Подобным образом производится анализ содержимого входного пакета с целью определения спектра информационных ошибок  $E$ . Измерения производятся циклически. Интервал цикла (1 с) задается датчиком цикла измерений.

**4. Результаты исследований помехоустойчивости декодирования СК.** На рис. 2 для примера представлены результаты анализа спектров популярного сверточного кода с порождающими полиномами (133,171) (восьмиричная форма записи). Спектр расстояний (*Distance Distribution*) представлен на рис. 2,в в виде набора строк ( $d_i:N_{di}$ ). Первый член каждой строки есть вес Хэмминга  $d_i$  [6], а следующий член  $N_{di}$  представляет количество путей на решетчатой диаграмме кода с таким весом. Видно, что минимальный вес этого кода равен  $d_f = 10$ . Это позволяет утверждать, что свободное расстояние кода (133,171) равно  $d_f = 10$ , что точно совпадает с табличными данными [6, разд. 4.3.11]. Значения коэффициентов спектров расстояний  $d_i$  и спектров информационных ошибок  $e_i$  представлены на рис. 2,г в виде совместной записи  $\{d_i:e_i\}$ . К примеру, запись  $\{10:4\}$  означает, что ошибочное событие, обусловленное ошибочным выбором декодером пути, отстоящего от переданной кодовой последовательности на  $d_i = 10$ , символов сопровождается четырьмя ( $e_i = 4$ ) ошибками в информационных символах. В разработанной программе предусмотрено одновременно с определением составляющих спектров СР и СИО вычисление вероятности ошибки декодирования по формулам (1) и (2). Результаты расчетов для кода (133, 171) приведены в табл. 2. В программе для выяснения роли коэффициентов спектра информационных ошибок  $e_i$  предусмотрены вычисления по упрощенному варианту, принятому в литературе [1, 2, 3]. При этом сведения о спектре информационных ошибок «отключались» ( $e_i = 0$ ). При этом фиксировались вероятности:  $p(D)$  – вероятность битовой ошибки без учета коэффициентов спектра информационных ошибок;  $p(D, E)$  – вероятность битовой ошибки с учетом коэффициентов спектра информационных ошибок.

Таблица 2 – Результаты расчетов вероятности ошибки с учетом спектров СР, СИО

$E_6/N_0$ , дБ	3	4	5	6	7	8
$p(D,E)$	3,6E-6	0,34E-6	8,8E-9	0,2E-6	0,6E-12	2,5E-15
$p(D)$	1,4E-6	0,12E-6	2,9E-9	9,8E-12	0,2E-12	0,9E-15

Из приведенных в табл. 2 данных следует, что в широком диапазоне изменений отношения сигнал-шум  $E_6/N_0$  вероятность битовой ошибки с учетом коэффициентов спектра информационных ошибок  $p(D, E)$  в среднем в 3-4 раза превышает вероятность  $p(D)$ , которая определялась по упрощенной формуле.

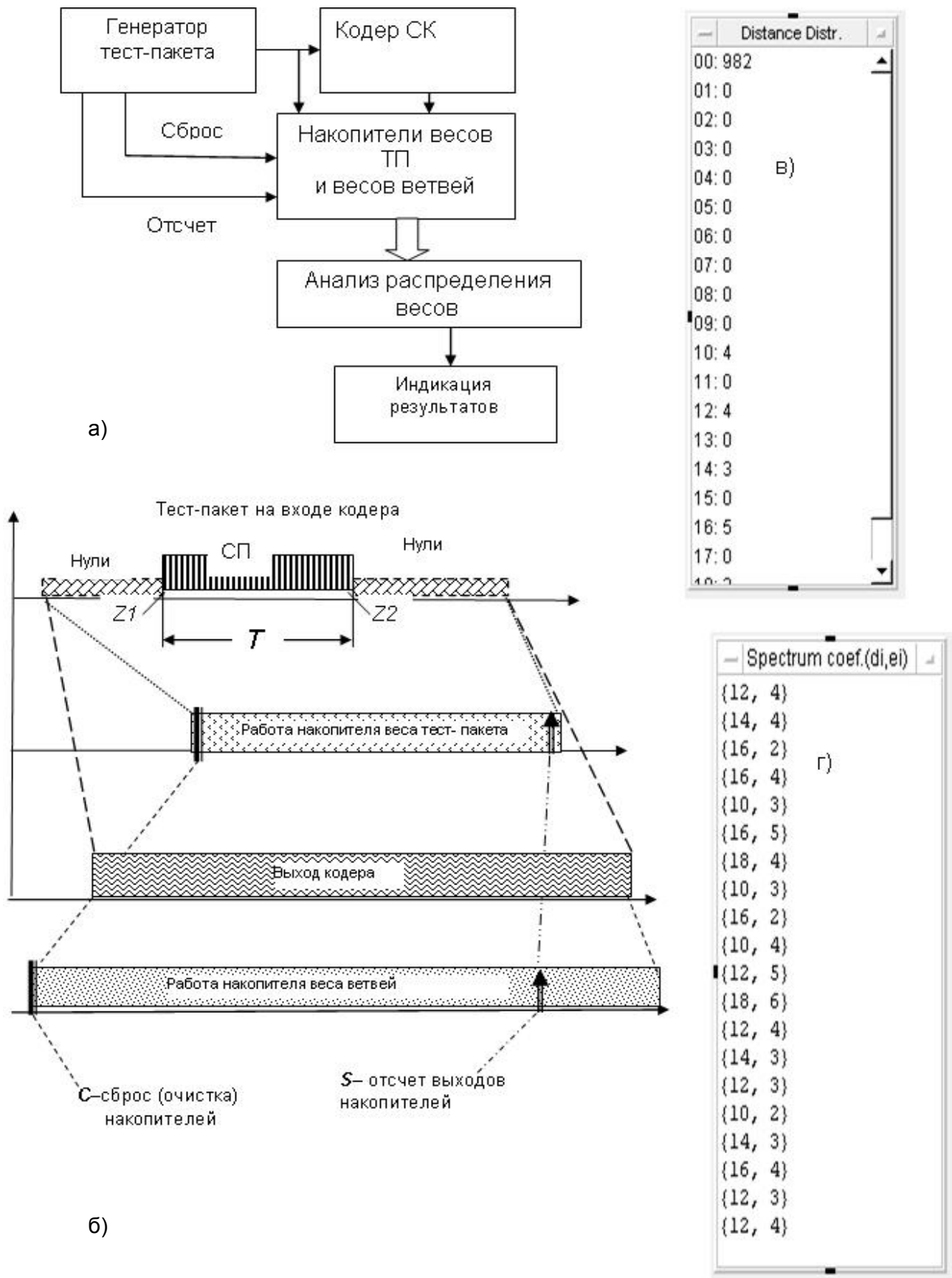


Рисунок 2 – Временные диаграммы, структура и результаты работы метода с использованием тест-пакета

В заключение можно сказать следующее.

1. В статье на основе концепции ошибочных событий и метода «тест-пакета» разработаны методика и компьютерная программа для анализа помехоустойчивости декодирования сверточных кодов с учетом спектра расстояний и спектра информационных ошибок.

2. Результаты проверочного расчета подтверждают необходимость использования для расчетов помехоустойчивости данных о спектре информационных ошибок.

### **Литература**

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение; пер. с англ. / Скляр Б. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
2. *Кларк Дж. мл.* Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи; пер. с англ. / Дж. мл. Кларк, Дж. Кейн. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
3. *Bhargava V.* Digital Communications by Sattelite / [Bhargava V., Nassoun D., Matyas R., Nuspi P.]. – New York: Yohn Wiley&Sons, 1981. – 354 p.
4. *Банкет В.Л.* Дискретная математика в задачах теории цифровой связи: учебн. пособ. / Банкет В.Л. – Одесса: ОНАС, 2008. – 118 с.
5. *Банкет В.Л.* Помехоустойчивое кодирование в телекоммуникационных системах: учеб.пособ. / Банкет В.Л., Иващенко П.В., Ищенко Н.А. – Одесса: ОНАС им. А.С. Попова, 2011. – 104 с.
6. *Банкет В.Л.* Цифровые методы в спутниковых системах связи: учеб. пособ. / Банкет В.Л., Иващенко П.В., Геер А.Э. – Одесса: УГАС, 1996. – 180 с.
7. *Банкет В.Л.* Сигнально-кодовые конструкции в телекоммуникационных системах / Банкет В.Л. – Одесса: Феникс, 2008. – 180 с.