РАДІОТЕХНІКА, ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЯ ТА ЕЛЕКТРОНІКА

УДК 621.371;621.372

Иваницкий А.М.
Іваницький А.М.
Ivanitckiy A.M.

НАИЛУЧШИЙ ВАРИАНТ ПРИНЦИПА ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

НАЙКРАЩІЙ ВАРІАНТ ПРИНЦИПУ ПЕРЕСТАНОВНОЇ ПОДВІЙНОСТІ У КЛАСИЧНІЙ ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

THE BEST VERSION OF DOUBLE-DEALING REARRANGEMENT PRINCIPLE IN CLASSICAL ELECTRODYNAMICS

Аннотация. Показано, что основы электродинамики можно построить, применяя аксиоматический принцип и наилучший вариант принципа перестановочной двойственности. При этом построение основ можно начинать непосредственно с ее постулатов, записанных для произвольных возбуждений электромагнитного поля.

Анотація. Показано, що основи електродинаміки можна збудувати, застосовуючи аксіоматичний принцип та найкращий варіант принципу перестановної подвійності. При цьому побудову основ можна починати безпосередньо з її постулатів, записаних для будь-яких збуджень електромагнітного поля.

Summary. Electrodynamics basics may be build using axiomal principle and the best version of a double-dealing rearrangement principle. It is build basics may be begin directly with axioms of an electromagnetic field is shown.

Огромную роль в достижении совершенства научной теории играет аксиоматический принцип построения этой теории [1]. Этот принцип возник более двух тысяч лет тому назад при написании древнегреческим математиком Евклидом (примерно 305 – 283 гг. до н.э.) [2] труда по геометрии «Начала». Окончательно аксиоматический принцип в области геометрии сформулирован Д. Гильбертом (1862 – 1943) [3].

В работе [1], кроме аксиоматического принципа построения теории, используется и принцип дуальности. Необходимыми условиями широкого применения принципа дуальности в любом разделе науки является: аксиоматическое построение этого раздела и симметричная форма записи его постулатов (аксиом) [4, 5]. Этим условиям удовлетворяет теория электрических цепей, поэтому принцип дуальности нашел в этом разделе науки широкое применение [1, 4].

В основе классической электродинамики лежат четыре уравнения Максвелла (см., например, [6]), которые приняты аксиоматически в работе Г.Р. Герца «Об основных уравнениях электродинамики покоящихся сред», опубликованной в 1890 г. (см. в [7]). Вместо принципа дуальности в электродинамике в основном используется принцип двойственности Лармора-Пистолькорса [8] (принцип перестановочной двойственности [9 – 12]).

В физической оптике существует аналогичный принцип – это теорема Бабине [13], которая дана в 1837 году [14].

Следует отметить, что формулировки принципа перестановочной двойственности в каждом из перечисленных источников отличаются друг от друга. Это связано с тем, что принцип перестановочной двойственности опирается на несимметричную форму записи уравнений Максвелла, т.е. нарушается одно из необходимых условий, указанных выше. В работах [5] и [15] дана симметричная форма записи уравнений Максвелла и, опираясь на эту запись, дана суть принципа дуальности в классической электродинамике при произвольных возбуждениях электромагнитного поля, а также выполнено построение основ электродинамики. Однако появление работ [5] и [15] не исключает необходимости поиска наилучшего варианта принципа перестановочной двойственности, который мог бы широко использоваться при построении основ электродинамики. Поэтому **цель данной статьи** – восполнить существующий пробел.

Удобно в качестве постулатов классической электродинамики выбрать уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Традиционно система этих уравнений записывается в виде:

$$\text{(I)} \quad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\text{(II)} \quad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\text{(III)} \quad div\vec{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\text{(IV)} \quad div\vec{B} = 0. \tag{4}$$

где $\vec{E}(\vec{H})$ – вектор напряженности электрического (магнитного) поля; $\vec{D}(\vec{B})$ – вектор электрической (магнитной) индукции; $\vec{j}$ – вектор объемной плотности электрического тока; ρ – объемная плотности электрического заряда.

Векторные уравнения (1) и (2) являются краткой записью шести скалярных уравнений относительно компонент векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ и $\vec{j}$, а уравнения (3) и (4) являются скалярными относительно компонент векторов $\vec{D}$ и $\vec{B}$ соответственно. Римские цифры, записанные слева от уравнений (1)…(4), обозначают номера уравнений Максвелла.

Первое уравнение Максвелла составляет суть закона полного тока Ампера-Максвелла; второе уравнение Максвелла называют законом электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла; третье уравнение Максвелла – обобщенный закон (теорема) Гаусса; четвертое уравнение Максвелла – закон непрерывности магнитного потока или закон Гаусса для магнитного поля.

Из записи уравнений Максвелла (1)…(4) в традиционной форме видно, что пары уравнений (1) и (2), а также (3) и (4) записаны в *несимметричной* форме. Существуют такие источники асимметрии: 1) наличие знака минус в законе электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла; 2) отсутствие слагаемого в уравнении (2), аналогичного вектору объемной плотности электрического тока проводимости; 3) наличие нуля в правой части уравнения (4). Все это сдерживало применение принципа дуальности в классической электродинамике, так как он основан на несимметричной записи уравнений Максвелла.

Попытку отсимметрировать запись уравнений Максвелла впервые предпринял О. Хевисайд в 1893 году. Им введено слагаемое в уравнение (2), подобное вектору объемной плотности электрического тока проводимости. Позже это слагаемое, которое названо объемной плотностью магнитного тока, применялось и другими авторами. Таким образом, второй, названый выше, источник асимметрии был ликвидирован. Это привело к ликвидации и третьего источника асимметрии и к введению понятия объемной плотности магнитного заряда в классическую электродинамику. Первый источник асимметрии можно частично устранить с помощью переноса знака минус в левую часть уравнения (2), что создает возможность использовать факт симметрии между $rot\vec{F}$ и $(-rot\vec{F})$. Все сказанное выше дало возможность записать почти симметричную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме [8]:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$-rot\vec{E} = \vec{j}_{\text{м}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{6}$$

$$div\vec{D} = \rho, \tag{7}$$

$$div\vec{B} = \rho_{\text{м}}, \tag{8}$$

где $\vec{j}_{\text{м}}$ – вектор объемной плотности магнитного тока с размерностью $B/м^2$; $\rho_{\text{м}}$ – объемная плотность магнитного заряда, размерность которой $Вб/м^3$.

Так как физиками по сей день не обнаружены объекты микромира, обладающие магнитным зарядом одного знака (монополи Дирака), то вектор $\vec{j}_{\text{м}}$ и величина $\rho_{\text{м}}$ введены в макроскопическую электродинамику в качестве фиктивных понятий в случае возбуждения электромагнитного поля источниками тока, которые описываются обычными функциями, т.е. для таких функций $\vec{j}_м = \vec{0}$ и $\rho_м = 0$. Такое введение фиктивных магнитных зарядов делается с целью облегчить исследование вполне реальных полей.

В связи с тем, что классическая электродинамика строится по аксиоматическому принципу и ее постулаты – уравнения Максвелла – записаны в почти симметричной форме (5)…(8), то это открывает возможность широкого применения принципа перестановочной двойственности, соответствующего указанной выше системе уравнений Максвелла (5)…(8).

Запишем уравнения Максвелла (5)…(8) в следующем виде:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \leftrightarrow -rot\vec{E} = \vec{j}_м + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{9}$$

$$div\vec{D} = \rho \leftrightarrow div\vec{B} = \rho_м, \tag{10}$$

где знак $\leftrightarrow$ означает соответствие между симметричными (двойственными) формулами.

Понятия, которые входят в уравнения Максвелла (9) и (10), назовем *базисными*. Из соответствия между указанными уравнениями вытекают симметричные (двойственные) соответствия между базисными понятиями, указанными в табл. 1. Эти соответствия нужно понимать так: если, например, в левых формулах (9) и (10) заменить понятия согласно табл. 1, то получим правые формулы (9) и (10) и, наоборот. Все остальные понятия в электродинамике являются производными от базисных понятий, так как используется аксиоматический принцип построения теории, т.е. в них входят определенное сочетание базисных понятий. Поэтому двойственные соответствия между базисными понятиями порождают двойственные соответствия и между остальными понятиями (небазисными понятиями).

Таблица 1 – Симметричные (двойственные) соответствия между базисными понятиями

№ п/п	Исходные понятия	Двойственные понятия
1	2	3
1	$\vec{H}$	$\vec{E}$
2	$\vec{E}$	$\vec{H}$
3	$\vec{D}$	$\vec{B}$
4	$\vec{B}$	$\vec{D}$
5	ρ	$\rho_м$
6	$\rho_м$	ρ
7	$\vec{j}$	$\vec{j}_м$
8	$\vec{j}_м$	$\vec{j}$
9	rot	$-rot$
10	$-rot$	rot
11	div	div

Из приведенных рассуждений видно, что появляются все новые и новые двойственные соответствия между небазисными понятиями, которые можно свести в таблицу двойственных соответствий между небазисными понятиями.

Таблица двойственных соответствий между небазисными понятиями не может быть представлена в завершенном виде, так как, развивая электродинамику по принципу перестановочной двойственности, получаем новые пары двойственных понятий, которые необходимо внести в таблицу двойственных соответствий. Полученной таким образом расширенной таблицей двойственных соответствий удобно пользоваться для решения конкретных задач.

При использовании принципа перестановочной двойственности для решения конкретных задач полезны следующие рекомендации. Предположим решена исходная задача с использованием правых реперов, как при постановке задачи, так и при записи ее результатов. Прежде всего, требуется сформулировать двойственную задачу, строго придерживаясь принципа перестановочной двойственности, т.е. все детали исходной задачи должны иметь свое симметричное отображение в двойственной задаче с использованием левого репера (так как в исходной задаче при ее постановке использован правый репер, симметричный левому). Нужно проанализировать этапы решения исходной задачи с целью обнаружения новых понятий, у которых отсутствуют симметричные пары (нет в таблице двойственных соответствий между небазисными понятиями). Если такие имеются, то необходимо дополнить таблицу двойственных соответствий. Затем по результату, найденному в исходной задаче, записать результат двойственной задачи, пользуясь таблицей двойственных соответствий. Нужно помнить, что этот результат соответствует левому реперу, так как в исходной задаче он записан для правого репера.

Дальнейшее развитие основ электродинамики удобно вести по аксиоматическому принципу и принципу перестановочной двойственности следующим образом. Вначале из первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме математическими преобразованиями получим первое уравнение Максвелла в интегральной форме, из которого с помощью принципа перестановочной двойственности найдем второе уравнение Максвелла в интегральной форме. Третье уравнение Максвелла в интегральной форме получим из третьего уравнения Максвелла в дифференциальной форме чисто математическими преобразованиями, а четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме можно найти из третьего уравнения Максвелла в интегральной форме при помощи принципа перестановочной двойственности. По указанной схеме удобно получать и другие результаты основ электродинамики, расширяя таблицу двойственных соответствий между небазисными понятиями. В данной таблице отсутствует знак минус, что выгодно отличает рассмотренный вариант принципа перестановочной двойственности от существующих в учебной литературе. Кроме того, это построение основ электродинамики можно начинать непосредственно с ее постулатов, записанных для произвольных возбуждений электромагнитно поля

Решение прикладных задач в областях, где используется аппарат классической электродинамики, значительно упрощается, если задачи можно сформулировать в виде двух задач, сформулированных дуально друг по отношению к другу. При этом необходимо решить одну задачу (получить результат), более простую по постановке, а результат второй задачи можно получить по результату первой задачи строго по принципу перестановочной двойственности. Проиллюстрируем сказанное на примере.

В области излучения электромагнитных волн решаются две важные для указанной области задачи. Рассматривают две идеализированные излучающие системы при гармоническом возбуждении, одну из которых называют элементарным электрическим вибратором (ЭЭВ), а другую – элементарным магнитным вибратором (ЭМВ) (см., например, [10]).

ЭЭВ называют короткий по сравнению с длиной волны λ ($l << \lambda$) отрезок проводника электрического тока с постоянными амплитудой и фазой. Аналогично, ЭМВ называют короткий по сравнению с длиной волны λ отрезок проводника магнитного тока с постоянными амплитудой и фазой. Электрический и магнитный токи в ЭЭВ и соответственно в ЭМВ считаются известными, т.е. сторонними, изменяющимися по гармоническому закону. Рассматриваемые излучающие системы расположены в безграничной однородной изотропной непроводящей (σ = 0, r = 0) среде, характеризуемой параметрами ε_a и μ_a. Считают, что по форме ЭЭВ и ЭМВ совпадают и имеют вид отрезка проводника с круглым поперечным сечением, диаметр которого значительно меньше его длины. Материал ЭЭВ идеально проводит электрический ток, а материал ЭМВ идеально проводит магнитный ток. Считается, что и ЭЭВ, и ЭМВ находится в ограниченном объеме V, окруженном своей поверхностью S.

Обычно решают первую задачу нахождения электромагнитного поля ЭЭВ по заданному распределению электрического тока. Для этого вводится правовинтовая сферическая система координат r, θ, φ, полярная ось z которой совпадает с осью вибратора, а начало координат находится в его центре (см. рис. 1). На этом рисунке $\dot{I}^{\text{ст}}$ – комплексное среднеквадратическое значение стороннего электрического тока ЭЭВ. Для того, чтобы решить двойственную задачу, т.е. задачу нахождения электромагнитного поля ЭМВ по заданному распределению магнитного тока, необходимо ввести левовинтовую сферическую систему координат, полярная ось z которой совпадает с осью ЭМВ, а начало координат поместить в центре этого вибратора (см. рис. 2). На этом рисунке $\dot{I}^{\text{ст}}_{\text{м}}$ – комплексное среднеквадратическое значение стороннего магнитного тока.

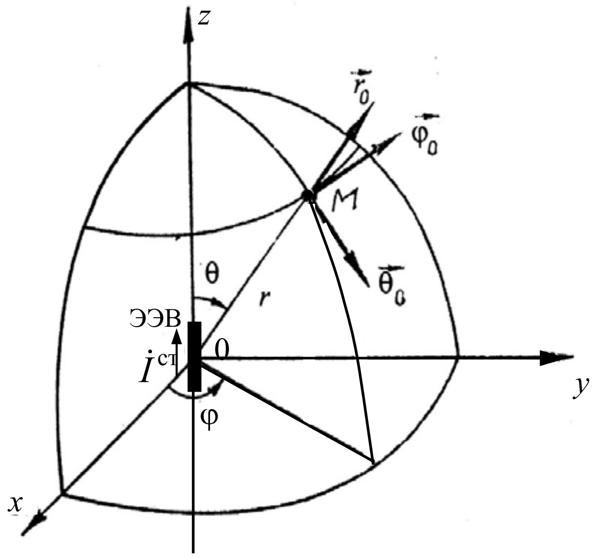

Рисунок 1 – ЭЭВ в правовинтовой сферической системе координат

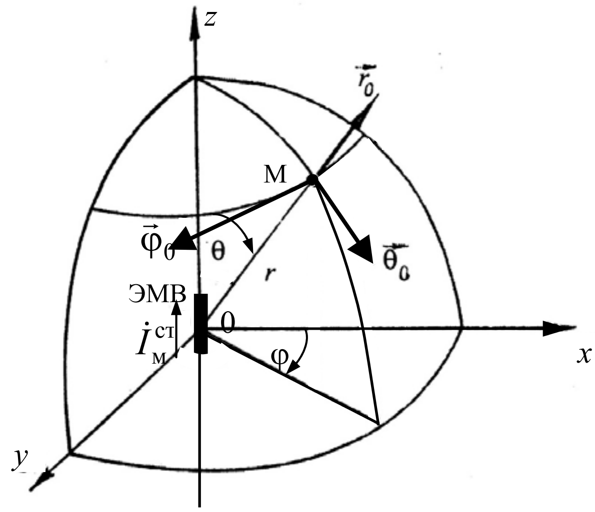

Рисунок 2 – ЭМВ в левовинтовой сферической системе координат

По теореме эквивалентности [10] можно записать граничные условия этих задач:
– для первой задачи

$$\dot{\vec{j}}_s^{\,ст} = [\vec{n}_0, \dot{\vec{H}}^s], \tag{11}$$

– для второй задачи

$$\dot{\vec{j}}_{мs}^{\,ст} = -[\vec{n}_0, \dot{\vec{E}}^s] \ , \tag{12}$$

где $\dot{\vec{j}}_s^{\,ст}$ и $\dot{\vec{j}}_{мs}^{\,ст}$ – объемные плотности сторонних токов $\dot{I}^{ст}$ и соответственно $\dot{I}^{ст}_{м}$, распределенными по поверхностям S вибраторов; $\dot{\vec{H}}^s$ и $\dot{\vec{E}}^s$ – векторы электромагнитного поля, создаваемые сторонними источниками на поверхностях S; $\vec{n}_0$ – орт нормали, внешней к поверхностям S. Как видно из выражений (11) и (12) граничные условия являются двойственными. Таким образом, из вышесказанного видно, что рассмотренные задачи сформулированы, строго соблюдая принцип перестановочной двойственности.

Далее достаточно решить одну задачу, а решение второй получить с помощью принципа перестановочной двойственности. В литературе подробное решение приводится для первой задачи [10]. В результате получены выражения для поля, создаваемого ЭЭВ:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{\varphi}_0 \dot{H}_\varphi, \tag{13}$$

$$\dot{\vec{E}} = \vec{r}_0 \dot{E}_r + \vec{\theta}_0 \dot{E}_\theta, \tag{14}$$

где

$$\dot{H}_\varphi = \frac{i\dot{I}^{ст} l k^2}{4\pi}\left[\frac{1}{kr} - i\left(\frac{1}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\, e^{-ikr}, \tag{15}$$

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{I}^{ст} l k^3}{2\pi\omega\varepsilon_a}\left[\left(\frac{1}{kr}\right)^2 - i\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\cos\theta\, e^{-ikr}, \tag{16}$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{i\dot{I}^{ст} l k^3}{4\pi\omega\varepsilon_a}\left[\frac{1}{kr} - i\left(\frac{1}{kr}\right)^2 - \left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\sin\theta\, e^{-ikr}, \tag{17}$$

здесь $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ – волновое число; $r >> l$. Анализ хода решения этой задачи показал, что в промежуточных формулах используются все понятия, помещенные в таблицы двойственых соответствий. Поэтому не было необходимости дополнять указанные таблицы.

Напомним, что формулы (13) … (17) соответствуют правому реперу (рис. 1).

Наконец, можно записать по принципу перестановочной двойственности выражения для поля, соответствующего ЭМВ:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{\varphi}_0 \dot{E}_\varphi, \tag{18}$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{r}_0 \dot{H}_r + \vec{\theta}_0 \dot{H}_\theta, \tag{19}$$

где

$$\dot{E}_\varphi = \frac{i\dot{I}_{\text{м}}^{\text{ст}} l k^2}{4\pi}\left[\frac{1}{kr} - i\left(\frac{1}{kr}\right)^2\right]\sin\theta e^{-ikr}, \tag{20}$$

$$\dot{H}_r = \frac{\dot{I}_{\text{м}}^{\text{ст}} l k^3}{2\pi\omega\mu_a}\left[\left(\frac{1}{kr}\right)^2 - i\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\cos\theta e^{-ikr}, \tag{21}$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{i\dot{I}_{\text{м}}^{\text{ст}} l k^3}{4\pi\omega\mu_a}\left[\frac{1}{kr} - i\left(\frac{1}{kr}\right)^2 - \left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\sin\theta e^{-ikr}. \tag{22}$$

Полученные формулы соответствуют левому реперу (рис. 2). При необходимости записи этих формул для правого репера нужно изменить знак на противоположный в выражении (20), которое записано для $\dot{E}_\varphi$, т.е. дописать знак минус в формуле (20).

Дальняя (волновая) зона характеризуется дополнительным условием $kr >> 1$. В этом случае выражения для поля, создаваемого ЭЭВ упрощается

$$\dot{\vec{H}} = \vec{\varphi}_0 \dot{H}_\varphi, \tag{23}$$

$$\dot{\vec{E}} = \vec{\theta}_0 \dot{E}_\theta, \tag{24}$$

где

$$\dot{H}_\varphi = \frac{i\dot{I}^{\text{ст}} l}{2\lambda r}\sin\theta e^{-ikr}, \tag{25}$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{i\dot{I}^{\text{ст}} l}{2\lambda r}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sin\theta e^{-ikr}. \tag{26}$$

Упрощаются выражения и для поля, создаваемого ЭМВ:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{\varphi}_0 \dot{E}_\varphi, \tag{27}$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{\theta}_0 \dot{H}_\theta, \tag{28}$$

где

$$\dot{E}_\varphi = \frac{i\dot{I}_{\text{м}}^{\text{ст}} l}{2\lambda r}\sin\theta e^{-ikr}, \tag{29}$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{i\dot{I}_{\text{м}}^{\text{ст}} l}{2\lambda r}\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\sin\theta e^{-ikr}. \tag{30}$$

Формулы (29) и (30) соответствуют левому реперу. Сравнивая эти формулы с соответствующими формулами (5.20) из учебника 2002 года [10], которые записаны для правого репера, можно сделать вывод, что они полностью совпадают, если и формулы (29) и (30) записать для правого репера (в формуле (29) нужно записать знак минус).

При решении первой и второй задач использовались двойственные системы уравнений. В этих системах уравнений $\overline{j}^{\text{ст}}$ и $\overline{j}_{\text{м}}^{\text{ст}}$ для решения этих двух задач являются фиктивными в силу применения при их постановке самодуального принципа (теоремы) эквивалентности.

Практически рассмотренные идеализированные излучающие системы можно получить с определенной степенью точности. ЭЭВ реализуется малым стержнем, сделанным из электропроводника (металла), а ЭМВ – малым стержнем, выполненным их магнитодиэлектрика (феррита).

Аналогично можно решать и другие прикладные задачи.

В заключение можно сказать следующее. В статье дан наилучший вариант принципа перестановочной двойственности, который можно широко использовать при построении основ электродинамики, начиная с ее постулатов (уравнений Максвелла в дифференциальной форме), записанных для произвольных возбуждений электромагнитного поля, а также решать различные прикладные задачи.

Литература

1. *Зелях Э.В.* Основы общей теории линейных электрических схем / Зелях Э.В. – М.: АН СССР, 1951. – 335 с.
2. *Васильев А.В.* От Евклида до Гильберта / А.В. Васильев // Кн. Гильберт Д. Основания геометрии. – Петроград: «Сеятель» Е.В. Высоцкого, 1923. – С. VII – XXII.
3. *Гильберт Д.* Основания геометрии / Давид Гильберт. – Петроград: «Сеятель» Е.В. Высоцкого, 1923. – 185 с.
4. *Иваницкий А.М.* Принцип взаимосоответствия (обобщенный принцип дуальности) и его применение в анализе и синтезе электрических полей: дис. … доктора техн. наук: 05.09.05 / Иваницкий Анатолий Мечиславович. – М., 1991. – 40 с.
5. *Иваницкий А.М.* Принцип дуальности в электродинамике // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2000. – № 3. – С. 29-35.
6. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн: учебн. пособ. для вузов. – [3-е изд., перераб. и доп.] / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
7. *Зоммерфельд А.* Электродинамика / Зоммерфельд А. – М.: ИЛ, 1958. – 501 с.
8. *Бальчитис А.* Емкостная подобласть индукционных процессов преобразования потоков энергии / Бальчитис А. – Вильнюс: Минтис, 1973. – 308 с.
9. *Фальковский О.И.* Техническая электродинамика / Фальковский О.И. – М.: Связь, 1978. – 432 с.
10. *Пименов А.Д.* Техническая электродинамика / Пименов А.Д., Вольман В.И., Муравцев А.Д. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
11. *Семенов Н.А.* Техническая электродинамика / Семенов Н.А. – М.: Связь, 1973. – 480 с.
12. *Harrington R.F.* Time-harmonic electromagnetic fields / Harrington R.F. – New-York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto: John Wiloy&Sons. Inc., 2001. – 479 p.
13. *Вайнштейн А.А.* Электромагнитные волны / Вайнштейн А.А. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
14. *Бабине теорема* – Физическая энциклопедия [электронный ресурс]. – Режим доступа к энциклопедии http://www.femto.com.ua/articles/part_1 /0252.html.
15. *Иваницкий А.М.* Основы электродинамики и принцип дуальности: [монография] / Иваницкий А.М. – Одесса: ОНАС им. А.С. Попова, 2012. – 156 с.