УДК 621.391.037.372

РАСЧЁТ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В НЕДВОИЧНЫХ КАНАЛАХ СВЯЗИ

Басов В.Е.

Одесская национальная академия связи им. А.С.Попова,
65029, Украина, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1.
basvic@list.ru

РОЗРАХУНОК ІМОВІРНОСТІ ПОМИЛКИ У НЕДВІЙКОВИХ КАНАЛАХ ЗВ'ЯЗКУ

Басов В.Є.

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
65029, Україна, м. Одеса, вул. Кузнечна, 1.
basvic@list.ru

CALCULATE OF PROBABILITY ERROR IN NOT BINARY CHANNELS OF COMMUNICATION

Basov V. E.

O.S.Popov Odessa national academy of telecommunications,
1 Kuznechna St., Odessa 65029, Ukraine.
basvic@list.ru

Аннотация. Ранее были разработаны коды с сокращённым входным алфавитом, позволяющие использовать недвоичные ансамбли сигналов, в том числе и в виде двухмерной треугольной решётки, которые содержат количество сигналов не равное целой степени двойки. Для теоретической оценки характеристик сигнально-кодовых конструкций требуется оценка характеристик помехоустойчивости ансамблей сигналов, которые ранее исследователями не рассматривались. Разработана и приведена методика оценки помехоустойчивости ансамблей сигналов треугольной АФМ вообще и приведена оценка ансамблей ТАФМ-12 и ТАФМ-24 в частности.

Ключевые слова: многопозиционные сигналы, амплитудно-фазовая модуляция.

Анотація. Раніше були розроблені коди зі скороченим вхідним алфавітом, зокрема у вигляді трикутної двовимірної решітки, які містять кількість сигналів, яка не дорівнює цілому ступеню двійки. Для теоретичного оцінювання характеристик сигнально-кодових конструкцій потрібна оцінка характеристик завадостійкості означених ансамблів сигналів, які раніше дослідниками не розглядались. Розроблено та наведено методику оцінювання завадостійкості ансамблів сигналів трикутної АФМ взагалі та наведено оцінку ансамблів ТАФМ-12 і ТАФМ-24 зокрема.

Ключові слова: багатопозиційні сигнали, амплітудно-фазова модуляція.

Abstract. Earlier the codes with the reduced entrance alphabet allowing to use not binary ensembles of signals including in the form of a two-dimensional triangular lattice which contain quantity of signals not equal to the whole degree of the two have been developed. The theoretical assessment of characteristics of alarm and code designs requires an assessment of characteristics of a noise stability of ensembles of signals which weren't considered by researchers earlier. The technique of an assessment of a noise stability of ensembles of signals of triangular QAM in general is developed and given and the assessment of TQAM-12 and TQAM-24 ensembles in particular is given.

Key words: multiposition signals, the amplitude-phase modulation.

В 1999 году в работе [1] был предложен новый подход к построению помехоустойчивых кодов, а именно, введение избыточности в процессе кодирования не за счет добавления символов в кодированные данные, а за счет увеличения алфавита кодированного сообщения. Этот способ кодирования расширяет возможности для построения сигнально-кодовых конструкций (СКК), позволяя успешно согласовывать двоичные источники информации с недвоичными каналами, когда ансамбль сигналов содержит количество сигналов не кратное целой степени двойки. Таким образом, в СКК стало возможным использовать не квазиоптимальные, а оптимальные ансамбли сигналов и, следовательно, получить дополнительный энергетический выигрыш кодирования, а повышение эффективности использования каналов связи, безусловно, является **актуальным** направлением исследований. **Проблема** заключается в том, что основные исследования по определению характеристик помехоустойчивости многопозиционных ансамблей сигналов приходятся на интервал 60-80-х годов XX века. Поскольку на этот момент коды с сокращённым входным алфавитом изобретены не были, то и многие подходящие для них ансамбли сигналов практически не исследовались. **Целью** статьи является необходимость восполнить этот пробел в исследованиях и оценить помехоустойчивость перспективных ансамблей сигналов.

Расчёт вероятности ошибки в недвоичных симметричных каналах связи. Этому вопросу уже было посвящено много работ различных авторов. Довольно глубоко эту тему исследовал в монографии Р. Галлагер [2], на него в частности ссылаются Ф. Дж. Мак-Вильямс и Н. Дж. А. Слоэн в монографии [3], где даётся модель многопозиционного симметричного канала, а как частный случай – троичного симметричного.

Оценка вероятности ошибки двухмерных сигналов на основе треугольной укладки важна для теоретической оценки помехоустойчивости сигнально-кодовых конструкций, использующих коды с сокращённым входным алфавитом, приведенные в работе [4].

Рекомендуемая модель выглядит следующим образом. Если поле F_q имеет $q\in\{0, 1,...(\text{q-1})\}$ элементов и переданному сообщению m соответствует переданный вектор $\overline{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, принятый вектор $\overline{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, вектор ошибок $\overline{E} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Пусть $e_i = 0$ с вероятностью $(1–p)>1/2$ и равно любому другому из $(q–1)$ элементов с вероятностью $p/(q–1)$. Таким образом канал является q-ичным симметричным.

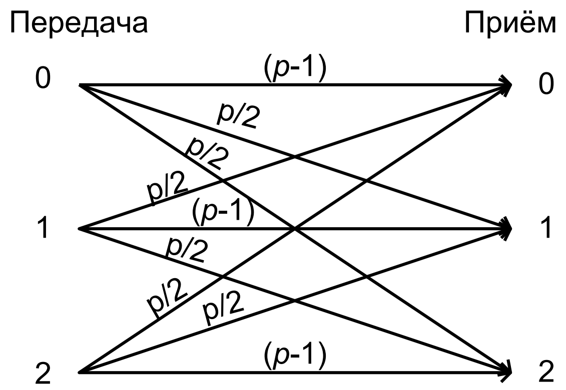

Рисунок 1 – Троичный симметричный канал

Следовательно, имеется вероятность правильного приёма $(1–p)$ и вероятность ошибки p не зависима от ансамбля сигналов в симметричном канале. В этом случае вероятность ошибки кратности k в кодовом блоке длиной n выражается той же формулой, что и для двоичного симметричного канала:

$$P(err = k) = C_k^n \left(1 - p\right)^{n-k} p^k . \qquad (1)$$

Недвоичные несимметричные каналы. Однако в предложенной модели упущены некоторые моменты, связанные с тем, что в многопозиционных каналах одинаковую конфигурацию ошибок могут порождать различные векторы ошибок (например, в троичном канале одну и ту же ошибку порождает как символ "1" вектора ошибок, так и символ "2") и модель исследуемого канала не всегда соответствует симметричному. При разработке сигнально-кодовых конструкций, согласованных с недвоичными каналами, весьма желательно построить более подробную модель ошибок недвоичного канала. Для этого рассмотрим в начале случай, когда все вероятности в многопозиционном канале без памяти разные. В этом случае имеет место матрица переходных вероятностей (**P**), где вероятность p_{ij} означает вероятность принять символ j при условии, что передан символ i:

$$
(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} & \cdots & p_{(q-1)0} \\ p_{01} & p_{11} & \cdots & p_{(q-1)1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{0(q-1)} & p_{1(q-1)} & \cdots & p_{(q-1)(q-1)} \end{pmatrix}. \tag{2}
$$

В этом случае, чтобы определить вероятности приёма каждого из q символов надо вектор-строку, из вероятностей передачи символов в канал, умножить на матрицу переходных вероятностей и получить вектор вероятностей приёма символов. При этом следует учесть, что сумма вероятностей в каждой строке и каждой колонке матрицы равна 1, сумма вероятностей в векторе-строке передачи и векторе-столбце вероятностей приёма также равна 1

$$
\overline{P}_X \times (\mathbf{P}) = \left(p(x=0), p(x=1), ..., p(x=q-1)\right) \times \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} & \cdots & p_{(q-1)0} \\ p_{01} & p_{11} & \cdots & p_{(q-1)1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{0(q-1)} & p_{1(q-1)} & \cdots & p_{(q-1)(q-1)} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{q-1} p(x=i) p_{0i} \\ \sum_{i=0}^{q-1} p(x=i) p_{1i} \\ \cdots \\ \sum_{i=0}^{q-1} p(x=i) p_{(q-1)i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(y=0) \\ p(y=1) \\ \cdots \\ p(y=q-1) \end{pmatrix} = \overline{P}_Y. \tag{3}
$$

Таким образом, получено для одного q-ичного символа q^2 различных событий в канале, причём q событий соответствуют вероятности правильного приёма $p(y=x)$, а $(q^2-q) = (q-1)^2$ событий соответствуют вероятности ошибки $p(y\neq x)$

$$
p(y=x) = \sum_{i=0}^{q-1} p(x=i) p_{ii}, \tag{4}
$$

$$
p(y \neq x) = \sum_{i=0}^{q-1} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \left(p(x=j) p_{ij}\right) - p(x=i) p_{ii} \right) = 1 - \sum_{i=0}^{q-1} \left(p(x=i) p_{ii}\right). \tag{5}
$$

Теперь рассмотрим вероятности ошибки различной кратности k и правильного приёма для блока многопозиционного кода длиной n символов

$$
P(err=k) = C_k^n p^{n-k}\left(y=x\right) p^k (y \neq x)\Big) = C_k^n \left(\sum_{i=0}^{q-1} p(x=i) p_{ii} \right)^{n-k} \left(1 - \sum_{i=0}^{q-1} \left(p(x=i) p_{ii}\right) \right)^k. \tag{6}
$$

Из полученного выражения можно получить точные значения вероятности ошибки блока для различных каналов.

Для недвоичных симметричных каналов, использующих q сигналов, вероятность k ошибок в блоке из n символов

$$
P(err=k) = (q-1)^k C_k^n (1-p)^{n-k} \left(\frac{p}{q-1} \right)^k = C_k^n (1-p)^{n-k} p^k. \tag{7}
$$

Расчёт вероятности правильного приёма сигналов в ансамблях с треугольной АФМ. Однако с целью исследования характеристик СКК желательно вычислить характеристики помехоустойчивости перспективных (с точки зрения текущего исследования) ансамблей сигналов, например, двухмерные ансамбли на основе треугольной решётки с количеством сигналов не равным целой степени числа 2, некоторые из них, на 12 и 24 сигнала, приведены ниже на рис. 2.

Чтобы определить вероятность ошибки блоков двоичных данных для этих ансамблей необходимо определить вероятность правильного приёма для каждого сигнала. В начале рассмотрим ансамбль из двенадцати сигналов треугольной амплитудно-фазовой модуляции

(ТАФМ-12). Очевидно, что при условии равной вероятности всех сигналов, вероятности правильного приёма любого из 12 сигналов могут принимать одно из трёх возможных значений. Три сигнала ансамбля ограничены областью в виде правильного шестиугольника. Три сигнала ансамбля ограничены четырьмя сторонами шестиугольника, а оставшиеся шесть сигналов – тремя сторонами шестиугольника. Аналогично можно подсчитать, что для ансамбля ТАФМ-24 десять сигналов ансамбля ограничены областью в виде правильного шестиугольника, восемь сигналов ансамбля ограничены четырьмя сторонами шестиугольника, а оставшиеся шесть сигналов – тремя сторонами шестиугольника. Так же будем считать, что расстояние между ближайшими сигналами равно величине *d*.

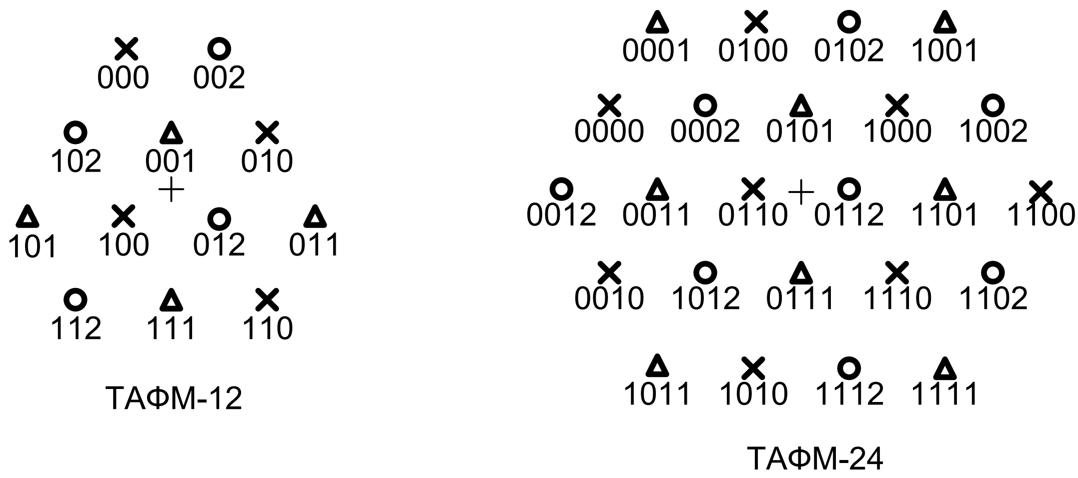

Рисунок 2 – Примеры ансамблей сигналов с треугольной АФМ

Определим вероятности правильного приёма для всех трёх типов сигналов в ансамблях ТАФМ. Чтобы получить точный расчёт всех вероятностей ошибки очевидно, что для ТАФМ-12 потребуется вычислить 12^2=144 вероятности, а для ТАФМ-24 – 24^2=576 вероятностей. Чтобы упростить задачу, вычислим только вероятности правильного приёма для всех сигналов, после чего можно оценить среднюю вероятность ошибки сигнала в ансамбле.

Плотность вероятности двухмерного нормального распределения описывается следующим выражением [5]:

$$f(x_1,x_2,m_1,m_2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_{12})=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\sigma_{12}}}e^{-\frac{1}{2\left(1-\sigma_{12}^2\right)}\cdot\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1^2}-\frac{2\sigma_{12}^2(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{x_2-m_2}{\sigma_2^2}\right)}, \qquad (8)$$

где: x_1, x_2 – аргументы нормального распределения; m_1, m_2 – математическое ожидание; σ_1, σ_2 – среднеквадратическое отклонение; σ_{12} – взаимная корреляция.

Поскольку в расчётах используется ортогональный базис, то взаимная корреляция двух измерений σ_{12} равна нулю. Среднеквадратическое отклонение по обоим координатам одинаково $\sigma_1, = \sigma_2 = \sigma$. В этом случае можно упростить:

$$f(x_1,x_2,m_1,m_2,\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1^2}+\frac{x_2-m_2}{\sigma^2}\right)}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1-m_1}{2\sigma^2}}e^{-\frac{x_2-m_2}{2\sigma^2}}. \qquad (9)$$

Получив выражение для двухмерной плотности вероятности, можно вычислить и вероятность того, что двухмерный сигнал окажется в заданной области. Для этого достаточно вычислить двухмерный интеграл по области *S*:

$$F(x_1,x_2,m_1,m_2,\sigma)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_S e^{-\frac{x_1-m_1}{2\sigma^2}}e^{-\frac{x_2-m_2}{2\sigma^2}}dx_1dx_2=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\left(\int e^{-\frac{x_1-m_1}{2\sigma^2}}e^{-\frac{x_2-m_2}{2\sigma^2}}dx_1\right)dx_2. \qquad (10)$$

Вычислим вероятность правильного приёма сигнала ограниченного областью правильного шестиугольника (рис. 3,*а*), т.е. граничащего с шестью другими сигналами. Для упрощения счёта математическое ожидание сигнальной точки совместим с началом координат $m_1 = m_2 = 0$, а вместо расчёта по всей области, вычислим интеграл в первом квадранте и умножим на 4.

$$F(x_1, x_2, 0, 0, \sigma) = \frac{4}{2\pi\sigma^2} \int_0^{d/2} \left(\int_0^{\frac{d - x_2}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{x_1 - m_1}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x_2 - m_2}{2\sigma^2}} dx_1 \right) dx_2 = P_6. \quad (11)$$

Для сигнала, граничащего с 4-мя другими сигналами (рис. 3,*б*), определим область интегрирования следующим образом:

$$F(x_1, x_2, 0, 0, \sigma) = \frac{2}{2\pi\sigma^2} \int_0^{d/2} \left(\int_{-\infty}^{\frac{d - x_2}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{x_1 - m_1}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x_2 - m_2}{2\sigma^2}} dx_1 \right) dx_2 = P_4, \quad (12)$$

поскольку область разделяется на две равновеликие элементарные области, симметричные относительно горизонтальной оси.

Для сигнала ограниченного тремя другими сигналами выделим две несимметричные элементарные области интегрирования (рис. 3,*в*):

$$F(x_1, x_2, 0, 0, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-d/2}^{0} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x_2 - d}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{x_1 - m_1}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x_2 - m_2}{2\sigma^2}} dx_1 \right) dx_2 + \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{d - x_2}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{x_1 - m_1}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x_2 - m_2}{2\sigma^2}} dx_1 \right) dx_2 = P_3. \quad (13)$$

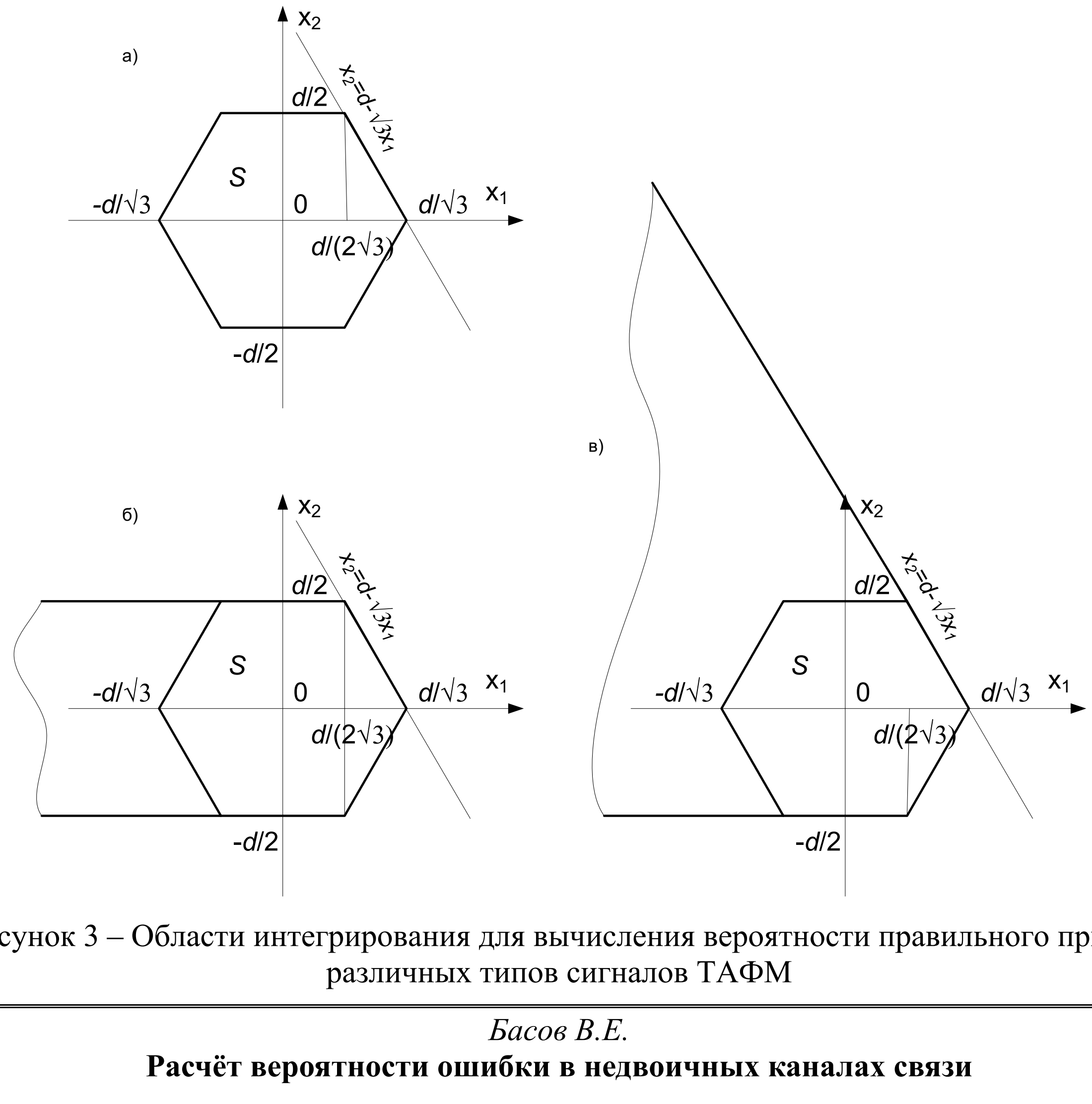

Рисунок 3 – Области интегрирования для вычисления вероятности правильного приёма различных типов сигналов ТАФМ

Проведено численное интегрирование для подсчёта некоторых значений описанных выше вероятностей в зависимости от величины стандартного отклонения аддитивного белого гауссового шума и результаты сведены в табл. 1.

Таблица 1 – Вероятности правильного приёма сигналов в зависимости от среднеквадратического отклонения шума

σ	P_6	P_4	P_3	$P_{ТАФМ\text{-}12}$	$P_{ТАФМ\text{-}24}$
$d/2$	0,423153	0,552921	0,649062	0,568549	0,522886
$d/3$	0,709095	0,787740	0,836224	0,792321	0,767092
$d/4$	0,867817	0,921158	0,939855	0,917171	0,903607
$d/5$	0,966758	0,977169	0,982710	0,977337	0,955546
$d/6$	0,992392	0,994846	0,996114	0,994851	0,994141
$d/7$	0,998648	0,999092	0,999317	0,999094	0,999224
$d/8$	0,999813	0,999875	0,999906	0,999875	0,999857
$d/9$	0,999980	0,999986	0,999990	0,999986	0,999985
$d/10$	0,999998	0,999999	0,999999	0,999999	0,999999

Средняя вероятность правильного приёма теперь может быть рассчитана следующим образом:

$$P_{ТАФМ\text{-}12} = \frac{3P_6 + 3P_4 + 6P_3}{12}, \tag{14}$$

$$P_{ТАФМ\text{-}24} = \frac{10P_6 + 8P_4 + 6P_3}{24}. \tag{15}$$

При известной вероятности правильного приёма сигнала можно вычислить вероятность ошибочного приёма сигнала, если от единицы вычесть вероятность правильного приёма, и оценить вероятность ошибки символа в двоичном потоке данных, на которую существенное влияние оказывает манипуляционный код и объём ансамбля (сколько двоичных символов закодировано в одном сигнале). Для треугольной сети наиболее частые ошибки – это приём одного из 6 соседних сигналов. Лучшие манипуляционные коды в 4/6 случаев ошибка сигнала приведёт к ошибке в одном символе и в 2/6 случаев к ошибкам в 2-х двоичных символах данных. Более сложными случаями можно пренебречь, как значительно менее вероятными. Таким образом для ТАФМ-12, где на каждый сигнал приходится 3 символа, вероятность ошибки бита будет связана с вероятностью правильного приёма сигнала следующим образом:

$$p_{err} = \frac{4}{6} \times \frac{1 - P_{ТАФМ\text{-}12}}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{2(1 - P_{ТАФМ\text{-}12})}{3} = \frac{4(1 - P_{ТАФМ\text{-}12})}{9}. \tag{16}$$

Аналогично, для ТАФМ-24, где на каждый сигнал приходится 4 символа. В этом случае вероятность ошибки символа можно вычислить так:

$$p_{err} = \frac{4}{6} \times \frac{1 - P_{ТАФМ\text{-}24}}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{2(1 - P_{ТАФМ\text{-}24})}{4} = \frac{(1 - P_{ТАФМ\text{-}24})}{3}. \tag{17}$$

Таблица 2 – Вероятность ошибки символа данных в канале с ТАФМ

σ	$P_{ТАФМ\text{-}12}$	p_{err12}	$P_{ТАФМ\text{-}24}$	p_{err24}
$d/2$	0,568549	0,191756	0,522886	0,159038
$d/3$	0,792321	0,092302	0,767092	0,077636
$d/4$	0,917171	0,036813	0,903607	0,032131
$d/5$	0,977337	0,010072	0,955546	0,014818
$d/6$	0,994851	0,002288	0,994141	0,001953
$d/7$	0,999094	0,000403	0,999224	0,000259
$d/8$	0,999875	0,000056	0,999857	0,000048
$d/9$	0,999986	0,000006	0,999985	0,000005

И, наконец, полученное значение средней вероятности ошибки для символа данных, p_{err} из выражений (16) и (17) можно использовать в выражении для оценки вероятности ошибки в блоке данных произвольной длины, приведенном в выражении (7). Таким образом, искомый результат получен.

В ходе исследования получены следующие результаты:

– выведены выражения для вычисления точных вероятностей правильного приёма сигналов в ансамблях на основе двухмерной треугольной упаковки;

– получены выражения для точного вычисления вероятностей ошибки сигналов на плоскости;

– впервые вычислены средние вероятности правильного приёма сигналов для ансамблей ТАФМ-12 и ТАФМ24;

– впервые получена оценка средней вероятности ошибки символа данных в каналах с ТАФМ-12 и ТАФМ-24;

– анализ величины средней вероятности показывает, что при уровне шума большем, чем $d/5$ точные вероятности приёма различных сигналов ансамбля ТАФМ различаются более, чем на 1%.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Басов В.Е. Свёрточные коды с сокращённым входным алфавитом / В. Е. Басов // Труды IV Международной НТК [«Телеком-99 Сентябрь»]. – Одесса: УГАС, 1999. – С. 213 - 216.
2. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь; пер. с англ. / Галлагер Р. – М.: Советское радио, 1974. – 719 с.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж. Теория кодов исправляющих ошибки; пер. с англ. / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – М.: Связь, 1979. – 774 с., ил.
4. Басов В.Е. Эффективность совместного использования многопозиционных сигналов и свёрточных кодов: дис... канд. техн. наук: 05.12.02 / Басов Виктор Евгеньевич. – Одесса, 2006. 208 с.
5. Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / [Зюко А. Г., Фалько А. И., Панфилов И. П., Банкет В. Л., Иващенко П. В.]; под ред. А. Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 С.

REFERENCES:

1. Basov, V.E. “Convolutional codes with the reduced input alphabet.” Proc. of the IV International STC «Telekom-99 September» – Odessa: USAC, (1999) 213 - 216. Print.
2. Gallager R.G. Theory of information and reliable communication: Trans. from engl. - Moscow, Sovetsky Radio, 1974.
3. Mc. Williams F.J. The theory of error correcting codes. Trans. from engl. - Moscow, Sviaz, 1979.
4. Basov, Viktor Eugenievich. "Efficiency of Sharing of Multiposition Signals and Convolutional Codes." Diss. O.S. POPOV ONAT, 2006. Print.
5. Zyuko A. G. Noise stability and efficiency of systems of information transfer. // Zyuko A.G., Falko A.I., Panfilov I.P., Banket V.L., Ivashenko V.P.; under redautsiy Zyuko. – Moscow, Radio and Sviaz, 1985.