

**ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЭНТРОПИИ  
ПРИ ПОСТОЯННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ КОДОВЫХ СЛОВ**

*Захарченко Н.В., Кочетков А.В., Русаловская А.А., Шпак Д.О., Гордейчук В.В.*  
*Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова,*  
*65029, Украина, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1.*  
[kmkakbn@gmail.com](mailto:kmkakbn@gmail.com)

**ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЕНТРОПІЇ  
ПРИ ПОСТІЙНІЙ ТРИВАЛОСТІ КОДОВИХ СЛІВ**

*Захарченко М.В., Кочетков О.В., Русаловська О.А., Шпак Д.О., Гордейчук В.В.*  
*Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,*  
*65029, Україна, м. Одеса, вул. Кузнечна, 1.*  
[kmkakbn@gmail.com](mailto:kmkakbn@gmail.com)

**BOUNDARY VALUES OF ENTROPY  
WITH CONSTANT DURATION OF CODE WORDS**

*Zakharchenko N.V., Kochetkov A.V., Rusalovskaya O.A., Shpak D.O., Gordeychuk V.V.*  
*O.S. Popov Odessa national academy of telecommunications,*  
*1 Kuznechna St., Odessa, 65029, Ukraine.*  
[kmkakbn@gmail.com](mailto:kmkakbn@gmail.com)

**Аннотация.** Проведен анализ информационных параметров позиционных и таймерных кодов, а также методов увеличения содержания информации в кодовых словах (энтропии) при постоянной длительности интервала реализации ( $m = \text{const}$  найквистовых элементов), таймерных сигналов, определены ее граничные значения.

Показано, что информационная емкость одного элемента Найквиста при таймерном кодировании в десятки раз больше информационной емкости при позиционном кодировании. Число реализаций при синтезе таймерных сигнальных конструкций (ТСК) тоже намного больше числа реализаций позиционных кодов.

Показано, что при ТСК с увеличением интервала реализации  $m$  суммарные значения энтропии и информационной емкости найквистового элемента увеличиваются, а коэффициент относительной скорости уменьшения суммарной информационной емкости становится меньше, при этом суммарная мощность ансамблей увеличивается.

**Ключевые слова:** позиционные коды, кодовое расстояние, кратность ошибки, таймерное кодирование, энтропия, найквистовый элемент, информационная емкость, таймерные сигнальные конструкции (ТСК), энергетическое расстояние, шифрование, канал связи.

**Анотація.** Проведено аналіз інформаційних параметрів позиційних і таймерних кодів, а також методів збільшення вмісту інформації в кодових словах (ентропії) при постійній тривалості інтервалу реалізації ( $m = \text{const}$  найквістових елементів), таймерних сигналів, визначено її граничні значення.

Показано, що інформаційна ємність одного елемента Найквіста при таймерному кодуванні в десятки разів більше інформаційної ємності при позиційному кодуванні. Число реалізацій при синтезі таймерних сигнальних конструкцій (ТСК) теж набагато більше числа реалізацій позиційних кодів.

Показано, що при ТСК зі збільшенням інтервалу реалізації  $m$  сумарні значення ентропії й інформаційної ємності найквістового елемента збільшуються, а коефіцієнт відносно швидкості зменшення сумарної інформаційної ємності стає менше, при цьому сумарна потужність ансамблів збільшується.

**Ключові слова:** позиційні коди, кодова відстань, кратність помилки, таймерне кодування, ентропія, найквістовий елемент, інформаційна ємність, таймерні сигнальні конструкції (ТСК), енергетична відстань, шифрування, канал зв'язку.

**Abstract.** The analysis of information parameters of positional and time codes, as well as methods for increasing the information content in code words (entropy) with a constant duration of the implementation interval ( $m = \text{const}$  of nayquist elements), timed signals, and its boundary values are determined.

It is shown that the information capacity of one Nyquist element with timer encoding is tens of times greater than the information capacity for positional coding. The number of implementations in the synthesis of timed signal constructions (TSC) is also much larger than the number of positional code implementations.

It is shown that at TSC with increasing interval of realization  $m$  the total values of entropy and information capacity of the nayquist element increase, and the coefficient of relative speed of reduction of the total information capacity becomes smaller, while the total power of the ensembles increases.

**Key words:** positional codes, code distance, error multiplicity, entropy, nayquist element, information capacity, timer signal constructions, energy distance, encryption, communication channel.

В таймерных сигнальных конструкциях (ТСК) в отличие от позиционного кодирования (ПК) информация о передаваемом кодовом слове (комбинации) содержится не в значениях параметров синусоидальных сигналов (значения амплитуды, частоты или фазы) передаваемых на  $n$  интервалах Найквиста [1], а в длительностях  $i$  отрезков, величина каждого из которых удовлетворяет условию

$$\tau_{ci} = t_0 + K_i \Delta, \quad \Delta = t_0/s; \quad s \in (2; 3; 4...) - \text{целые числа}, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – минимальная разница между длительностями  $i$  отрезков с заданной вероятностью и характеристиками помех в канале.

Принципы формирования ТСК и ПК обеспечивают три отличительных признака синтезированных кодовых слов при позиционном кодировании [1] и таймерных сигналах [2].

*При позиционном кодировании:*

- 1) На интервале реализации  $T_p = mt_0$  можно сформировать  $N_p = 2^m$  кодовых слов.
- 2) Минимальное энергетическое расстояние между кодовыми словами определяется энергией найквистового элемента.
- 3) Минимальное расстояние между моментами модуляции изменения сигнала кратно интервалу Найквиста.

*При таймерном кодировании:*

- 1) Число реализаций  $N_p$  [3] ТСК определяется выражением:

$$N_p = C^i ms - i(s-i) = \frac{(ms - i(s-1))!}{i!(ms - is)!}. \quad (2)$$

- 2) Из выражения (2) следует, что при таймерном кодировании количество реализаций зависит от следующих параметров: длины интервала реализации ( $i$ ) и параметра ( $s$ ), определяющего заданную вероятность ошибки  $P_{\text{зад}}$  смещения фронта сигнала на выходе канала с заданными параметрами помех [2]

$$P_{\text{зад}} = 1 - [\Phi(\Delta/2\sigma)], \quad (3)$$

где  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности;  $\sigma$  – среднеквадратическое значение отклонения переходного процесса при смене вида сигнала.

Из выражения (1) и (3) следует, что минимальное энергетическое расстояние при ТСК равно энергии элемента  $\Delta$ .

- 3) Из выражения (1) следует, что расстояние между моментами модуляции не кратно найквистовому элементу, но и не меньше его.

В табл. 1 дано число реализаций сигналов ( $N_p$ ) в зависимости от  $m$  ( $m \in 4...10$ ), определенное согласно выражению (2) при  $i \in 3; 4$  и  $s \in 5; 6; 7$ .

Из таблицы следует:

- число реализаций ТСК  $N_p$  намного больше числа реализаций позиционных сигналов;
- при увеличении  $s = \text{const}$  и  $m = \text{const}$  число реализаций увеличивается, но при этом увеличивается и вероятность ошибочного приема, так как  $\Delta$  уменьшается (1);
- при  $s = \text{const}$  и  $i = \text{const}$  с увеличением  $m$  число реализаций также увеличивается.

Таблица 1 – Число реализаций при позиционном кодировании и при синтезе ТСК

<i>i</i>	<i>m</i> <i>s</i>	4	5	6	7	8	9	10
		$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$
3	5	56	286	816	1771	3276	5456	8436
	6	84	456	1330	2925	5456	9139	14190
	7	120	680	2024	4495	8436	14190	22100
4	5	1	126	1001	3876	10626	23751	46376
	6	1	210	1820	7315	20475	46376	91390
	7	1	330	3060	12650	35960	82251	163180

*Информационные параметры таймерных кодов*

К информационным параметрам таймерных кодов относятся [3]:

1. Энтропия кодового слова (*H*), представляющая численное значение количества информации передаваемого на интервале времени кодового слова (числа найквистовых элементов).

$$H(x) = p(x_i) \log_2 p(x_i);$$

$$p(x_i) = \frac{1}{N_p(x_i)}; \tag{4 a}$$

$$H = \left[ \frac{1}{N_p(x_i)} \log_2 \frac{1}{N_p(x_i)} \right]. \tag{4 б}$$

2. Информационная емкость одного найквистового элемента *I<sub>н</sub>* равна

$$I_n = \frac{H}{m}. \tag{5}$$

3. При *i = m* (в найквистовых элементах) число реализованных сигнальных конструкций *N<sub>p</sub> = 1*.

4. При *i > m* число сигнальных конструкций *N<sub>p</sub> = 0*.

В табл. 2 в числителе даны значения энтропии *H* кодовых слов при длительностях *m* (*m* ∈ 4...10) для *i* ∈ 3; 4 и *s* ∈ 5; 6; 7, а в знаменателе информационная емкость одного элемента *I<sub>н</sub>* в данном кодовом слове.

Таблица 2 – Значения *H* и *I<sub>н</sub>* при *m* ∈ 4...10

<i>i</i>	<i>m</i> <i>s</i>	4	5	6	7	8	9	10
		3	5	5,8/1,451	8,1/1,63	9,6/1,61	10,8/1,54	11,6/1,45
6	6,4/1,59		8,8/1,76	10,3/1,72	11,5/1,64	12,4/1,561	13,1/1,46	13,8/1,37
7	6,9/1,726		9,4/1,88	11/1,83	12,1/1,73	13/1,63	13,8/1,531	14,4/1,44
4	5	1/0	7/1,39	9,9/1,66	11,9/1,702	13,3/1,67	14,5/1,61	15,5/1,55
	6	1/0	7,7/1,54	10,8/1,80	12,8/1,83	14,3/1,79	15,5/1,72	16,4/1,64
	7	1/0	8,3/1,67	11,5/1,92	13,6/1,99	15,1/1,89	16,3/1,81	17,3/1,73

Увеличить энтропию кодовых слов, реализованных на одном и том же интервале *m*, возможно только изменяя *i* и сохраняя Δ (или *s*).

Например, используя табл. 1; 2 при *m = 5* и *s = 7* объединенный ансамбль из множеств *N<sub>p1</sub> = 680* (*i = 3*) и *N<sub>p2</sub> = 330* (*i = 4*), обеспечивающий соответствующие энтропии *H<sub>1</sub> = 9,4* и *H<sub>2</sub> = 8,3*, учитывая, что эти реализации независимы [2]  $\sum H = 9,4 + 8,3 = 17,7$  бит.

При наличии ансамблей с другими значениями  $i$  при данных  $m$  и  $s$  можно увеличить еще больше энтропию кодовых слов. При этом необходимо учитывать выводы к табл. 2.

В табл. 3 и 4 даны значения энтропий кодовых слов ( $H$ ) и информационной емкости найквистового элемента  $I_H$  при  $m \in (3...10)$ ;  $i \in (1...10)$ ;  $s = 7$ . При этом информационная емкость найквистового элемента  $I_H$  определяется [3]

$$I_H = \frac{\log_2 N_p}{m} = \frac{H}{m}. \quad (6)$$

$\sum H$  – суммарное значение энтропии определяется

$$\sum H_i = H_1(i=1) + H_2(i=2) + \dots + H_m(i=m). \quad (7)$$

Таблица 3 – Значения энтропий кодовых слов ( $H$ ) и информационной емкости найквистового элемента  $I_H$  при  $m \in (3...6)$ ;  $i \in (1...10)$ ;  $s = 7$

$m$	3		4		5		6	
$i$	$H$	$I_H$	$H$	$I_H$	$H$	$I_H$	$H$	$I_H$
1	3,907	1,302	4,459	1,115	4,858	0,972	5,17	0,862
2	5,17	1,723	6,907	1,727	7,983	1,597	8,765	1,461
3	0	0	6,907	1,727	9,409	1,882	10,983	1,831
4	–	–	0	0	8,366	1,673	11,579	1,93
5	–	–	–	–	0	0	9,629	1,605
6	–	–	–	–	–	–	0	0
7	–	–	–	–	–	–	–	–
8	–	–	–	–	–	–	–	–
9	–	–	–	–	–	–	–	–
10	–	–	–	–	–	–	–	–
$\sum N_{P_i}$	52		263		1293		6348	
$\sum H$	9,077		18,273		30,616		46,126	
$\sum I_H$		3,025		4,568		6,123		7,688
$K$			1,51		1,34		1,256	

Таблица 4 – Значения энтропий кодовых слов ( $H$ ) и информационной емкости найквистового элемента  $I_H$  при  $m \in (7...10)$ ;  $i \in (1...10)$ ;  $s = 7$

$m$	7		8		9		10	
$i$	$H$	$I_H$	$H$	$I_H$	$H$	$I_H$	$H$	$I_H$
1	5,426	0,775	5,644	0,706	5,833	0,648	6	0,6
2	9,379	1,34	9,886	1,236	10,316	1,146	10,691	1,069
3	12,134	1,733	13,042	1,63	13,793	1,533	14,432	1,443
4	13,627	1,947	15,134	1,892	16,328	1,814	17,316	1,732
5	13,505	1,929	16,005	2,001	17,857	1,984	19,328	1,933
6	10,745	1,535	15,242	1,905	18,175	2,019	20,359	2,036
7	0	0	11,745	1,468	16,827	1,87	20,175	2,018
8	–	–	0	0	12,652	1,406	18,287	1,829
9	–	–	–	–	0	0	13,482	1,348
10	–	–	–	–	–	–	0	0
$\sum N_{P_i}$	31198		153365		753835		3705165	
$\sum H$	64,816		86,698		111,781		140,07	
$\sum I_H$		9,259		10,838		12,42		14,008
$K$	1,204		1,171		1,146		1,128	

В табл. 3 и 4 коэффициент  $K$  определяет относительную скорость уменьшения суммарной информационной емкости с увеличением  $m$

$$K = \frac{\sum I_{Hm+1}}{\sum I_{Hm}}. \quad (8)$$

В строке  $\sum N_{P_i}$  даны суммарные мощности ансамблей при каждом значении  $m$  с учетом всех  $i$ .

Так как кодовые слова с различным числом отрезков  $i$  независимы, то сумма энтропий не равна энтропии суммы реализаций [4] при  $m = \text{const}$  и различных значениях числа информационных отрезков  $i$ .

В заключение, проанализировав табл. 3 и 4, можно сделать следующие выводы:

1) Сумма энтропий  $\sum H_i$  для каждого значения  $m$  больше энтропии позиционного двоичного кода  $K = \frac{\sum H_i}{m} > 2$ .

2) Среднее количество энтропии на один найквистовый элемент  $I_{\text{нз}}$  по сравнению с позиционным кодированием  $\frac{\sum H_i(m)}{m}$  увеличивается с ростом  $m$  в диапазоне 3,025...14,008.

3) С увеличением  $i$  максимум значения  $H$  смещается влево:  
для  $i = 1$ ,  $I_{\text{max}}$  при  $m = 3$ ; для  $i = 2$ ,  $I_{\text{max}}$  при  $m = 4$ ; для  $i = 3$ ,  $I_{\text{max}}$  при  $m = 5$ ; для  $i = 4$ ,  $I_{\text{max}}$  при  $m = 7$ ; для  $i = 5$ ,  $I_{\text{max}}$  при  $m = 8$ ; для  $i = 6$ ,  $I_{\text{max}}$  при  $m = 10$ .

При этом с увеличением  $m$  суммарная мощность ансамблей  $\sum N_{P_i}$  увеличивается.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / [Зюко А.Г., Фалько А.И., Банкет В.Л., Иващенко П.В.]; под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 232 с.
2. Захарченко Н.В. Эффективность компенсации избыточности кода при использовании таймерных сигналов / Н.В. Захарченко, В.Е. Басов // Моделювання та інформаційні технології: зб. наук праць. – Вип.31. – К., 2005. – С. 6-13.
3. Захарченко Н.В. Информационные параметры таймерных сигнальных конструкций при кодовом уплотнении канала / Н.В. Захарченко, С.М. Горохов, А.В. Кочетков, В.М. Горицкий, А.В. Толкачев // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С.Попова. – 2016. – № 2. – С. 25 – 29.
4. Фельдбаум А.А. Теоретические основы связи и управления / [Фельдбаум А.А., Дудыкин А.Д., Мановцев А.П., Миролюбов Н.Н.]. – М.: Физматгиз, 1963. – 932 с.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.

#### REFERENCES:

1. Zyuko A.G. Pomehoustoychivost i effektivnost sistem peredachi informatsii / [Zyuko A.G., Falko A.I., Banket V.L., Ivaschenko P.V.]; pod red. A.G. Zyuko. – M.: Radio i svyaz, 1985. – 232 p.
2. Zaharchenko N.V. Effektivnost kompensatsii izbytochnosti koda pri ispolzovanii taymernyih signalov / N.V. Zaharchenko, V.E. Basov // Modelyuvannya ta informatsiyini tehnologiyi: zb. nauk prats. – Vip.31. – K., 2005. – P. 6-13.
3. Zaharchenko N.V. Informatsionnyie parametryi taymernyih signalnyih konstruksiy pri kodovom uplotnenii kanala / N.V. Zaharchenko, S.M. Gorohov, A.V. Kochetkov, V.M. Goritskiy, A.V. Tolkachev // Naukovi pratsi ONAZ im. O.S. Popova. – 2016. – № 2. – P. 25-29.
4. Feldbaum A.A. Teoreticheskie osnovy svyazi i upravleniya / [Feldbaum A.A., Dudyikin A.D., Manovtsev A.P., Mirolubov N.N.]. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 932 p.
5. Vyigodskiy M.Ya. Spravochnik po vyisshey matematike / Vyigodskiy M.Ya. – M.: AST: Astrel, 2006. – 991 p.