

**ИТЕРАЦИОННОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ПЕРФОРИРОВАННЫХ
НЕСИСТЕМАТИЧЕСКИХ КОДОВ С СОКРАЩЁННЫМ ВХОДНЫМ АЛФАВИТОМ
С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ СКОРОСТЯМИ $2b/3t$ И $2b/3q$**

Басов В.Е.

*Одесская национальная академия связи им. А.С.Попова,
65029, Украина, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1.
basvic@bigmir.net*

**ИТЕРАЦІЙНЕ ДЕКОДУВАННЯ ПЕРФОРОВАНИХ
НЕСИСТЕМАТИЧНИХ КОДІВ ЗІ СКОРОЧЕНИМ ВХІДНИМ АЛФАВИТОМ
З ВІДНОСНИМИ ШВИДКОСТЯМИ $2b/3t$ ТА $2b/3q$**

Басов В.Є.

*Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
65029, Україна, м. Одеса, вул. Кузнечна, 1.
basvic@bigmir.net*

**ITERATIVE DECODING FOR PUNCTURED NO SYSTEMATIC CODES
WITH BRIEF SOURCE ALPHABET AND RELATIVE SPEED $2b/3t$ AND $2b/3q$**

Basov V. E.

*O.S.Popov Odessa national academy of telecommunications,
1 Kuznecna St., Odessa, 65029, Ukraine.
basvic@bigmir.net*

Аннотация. Обычно для исследования свойств турбо-кодов в итерационном декодере на основе алгоритма Витерби с мягким решением применялась схема, рассчитанная на систематические сверточные компонентные коды. В работах [4, 5] разработана версия итерационного декодера с использованием несистематических компонентных кодов и синтезированы рекурсивные сверточные коды с сокращённым входным алфавитом. В предложенной статье даны результаты моделирования канала с турбо-кодами на основе модифицированного алгоритма Витерби с мягким решением, с использованием несистематических перфорированных компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом и относительными скоростями $2b/3t$ и $2b/3q$, а так же аддитивным белым гауссовским шумом в канале.

Ключевые слова: коды с сокращённым алфавитом, турбо-коды, итерационное декодирование.

Анотація. Звичайно з метою дослідження властивостей турбо-кодів в ітераційному декодері на підставі алгоритму Вітербі з м'яким рішенням застосовувалась схема, яка розрахована на використання систематичних згорткових компонентних кодів. В роботах [4, 5] розроблена версія ітераційного декодера з використанням несистематичних компонентних кодів та синтезовано рекурсивні згорткові коди зі скороченим входним алфавітом. У запропонованій статті надано результати моделювання каналу з турбо-кодами на підставі модифікованого алгоритму Вітербі з м'яким рішенням і використанням несистематичних перфорованих компонентних кодів зі скороченим входним алфавітом та відносними швидкостями $2b/3t$ і $2b/3q$, а також адитивним білим гауссівським шумом в каналі.

Ключові слова: коди зі скороченим алфавітом, турбо-коди, ітераційне декодування.

Abstract. Usually the diagram expected systematic convolutional component codes was applied to research of properties of turbo-codes in the iterative decoder on the basis of soft output Viterbi algorithm (SOVA). In the articles [4, 5] has developed the version of the iterative decoder with use not of systematic

component codes and recursive convolutional codes with the reduced entrance alphabet are synthesized. Results of modeling of the channel with turbo-codes on the basis of the modified algorithm of Viterbi with the soft decision, with use of not systematic no punctured component codes with the reduced entrance alphabet, with relative speed $2b/3t$, $2b/3q$, and with additive white Gaussian noise in channel are given in the offered article.

Key words: codes with the reduced input alphabet, turbo-codes, iterative decoding.

В 1999 году в работе [1] предложен новый подход к построению помехоустойчивых кодов, а именно, введение избыточности в процессе кодирования не за счет добавления символов в кодированные данные, а за счет увеличения алфавита кодированного сообщения. Этот способ кодирования расширяет возможности для построения сигнально-кодовых конструкций (СКК), позволяя успешно согласовывать двоичные источники информации с недвоичными каналами, когда ансамбль сигналов содержит количество сигналов не кратное целой степени двойки. Таким образом, в СКК использовать не квазиоптимальные, а оптимальные ансамбли сигналов и, следовательно, получить дополнительный энергетический выигрыш кодирования.

Дальнейшие исследования предложенных кодов показали, что, когда их относительная скорость совпадает с относительной скоростью обычных свёрточных кодов, коды с сокращённым алфавитом обладают аналогичной помехоустойчивостью [2, 3].

Позднее, в 2007 г., синтезирован декодер по максимуму апостериорной вероятности (МАН) для кодов с сокращённым алфавитом [4], а также декодер Витерби с мягким решением [5]. Параллельно были синтезированы рекурсивные свёрточные коды с сокращённым входным алфавитом [6]. **Целью настоящего исследования** является экспериментальная проверка функциональной схемы итерационного декодера для турбо-кода с несистематическими перфорированными компонентными кодами с сокращённым входным алфавитом и относительными скоростями $2b/3t$ для двоично-троичных и $2b/3q$ для двоично-четверичных кодов.

Декодер Витерби с мягким решением для кодов с сокращённым входным алфавитом. В качестве компонентных кодов в нашем случае необходимо использовать рекурсивные несистематические коды с сокращённым входным алфавитом, синтез которых выполнен и часть из них были опубликованы в работе [6].

Для несистематических компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом схема кодера не имеет систематического выхода и тем существенно отличается от обычного турбо-кода. Для такой схемы синтезирован итерационный декодер [5].

Алгоритм Витерби с мягким решением (АВМР) выносит жёсткое решение и вещественное число, которое называется метрикой Эвклида, которая характеризует вероятность того, что жёсткое решение правильное.

Моделирование передачи с неперфорированными компонентными кодами проводилось ранее в [7]. Эта статья начинает серию публикаций по моделированию передачи для перфорированных компонентных кодов турбо-кодов с сокращённым входным алфавитом.

Рассматриваемая модель системы показана ниже на рис. 1. Кодированный блок на выходе кодера обозначен x_t , он передаётся через дискретный канал без памяти, на выходе которого появляется блок r_t , который представляет собой версию x_t , испорченную шумом. Декодер выдаёт оценку информации, поступившей на вход кодера на основании анализа r_t .

В общем случае входные символы b_t , $t = 1, 2, \dots, N$, где N целое, могут быть не двоичными, но для упрощения рассуждений предположим, что символы двоичные, равновероятные и независимые между собой.

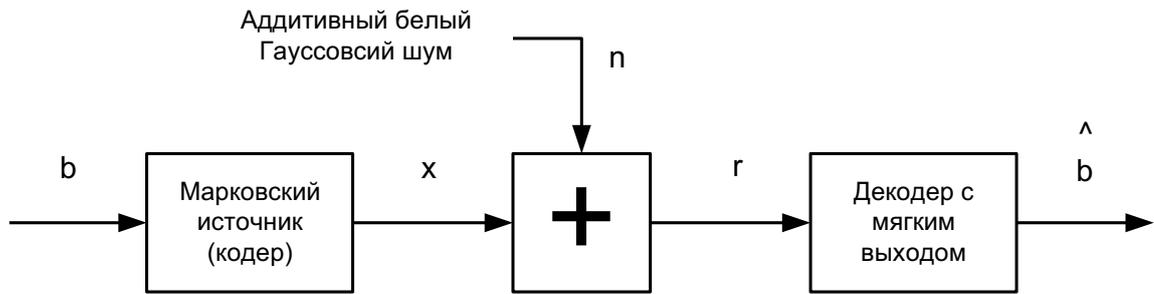


Рисунок 1 – Схема рассматриваемой системы связи

Битовая последовательность $b_t = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ кодируется несистематическим свёрточным кодом с сокращённым входным алфавитом и обратными связями. Решётка кода имеет $M = 2^m$ состояний. Состояния нумеруются целыми числами l в диапазоне $0 \dots M - 1$. Состояние решётки в момент времени t обозначим S_t . Последовательность состояний от момента времени t до момента t' обозначается $S_t' = (S_t, S_{t+1}, \dots, S_{t'})$. Соответствующую последовательность на выходе кодера обозначим $V_t = (v_{t,0}, v_{t,1}, \dots, v_{t,n-1})$. Последовательность V_t' модулируется например ФМ-3. Модулированная последовательность обозначается $X_t' = (X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t'})$ и x_{t+i} - сигнальная точка на двухмерной поверхности, характеризуемая координатами $x_{1,t+i}, x_{2,t+i}$

$$x_{t,i} = 2v_{t,i} - 1, i = 0, \dots, n - 1, \quad (1)$$

где K – объём выходного алфавита кода.

На модулированную последовательность X_t' накладывается аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) в процессе передачи и на выходе канала принимается последовательность $r_t' = (r_t, r_{t+1}, \dots, r_{t'})$ и $r_{t,i} = x_{t,i} + n_{t,i}, i = 0, \dots, n - 1$ $i = 0, \dots, t' - t$, где $n_{1,t+i}, n_{2,t+i}$ – центрированный гауссовский случайный процесс с дисперсией σ^2 . Каждый отсчёт шума является независимым относительно любого другого отсчёта.

Как было показано в ходе синтеза, в работе [5], алгоритм Витерби с мягким решением (АВМР) выносит мягкую оценку в виде логарифмической функции вероятности $\Lambda(b_t)$, соответствующей принятой последовательности r_1^r

$$\Lambda(b_t) = \log \frac{\Pr(b_t = 1 | r_1^r)}{\Pr(b_t = 0 | r_1^r)}, \quad (2)$$

где $\Pr(b_t = i | r_1^r), i = 0, 1$ – априорная вероятность бита данных b_t .

АВМР декодер выдаёт жёсткое решение, сравнивая значение $\Lambda(b_t)$ с нулём.

$$b_t = \begin{cases} 1 & \text{при } \Lambda(b_t) \geq 0 \\ 0 & \text{при } \Lambda(b_t) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Декодер АВМР выбирает путь x с минимальной метрикой пути $\mu_{\tau, \min}$ как наиболее вероятный путь таким же образом, как и обычный алгоритм Витерби. Вероятность выбора этого пути пропорциональна

$$\Pr\{x | r_1^r\} \sim e^{-\mu_{\tau, \min}}. \quad (4)$$

Обозначим $\mu_{\tau,c}$ метрику наиболее сильного конкурента пути максимальной вероятности, который соответствует пути с минимальной метрикой, когда символ решётки на пути максимальной вероятности в момент времени t заменён другим символом.

Если жёсткая оценка наиболее вероятного пути в момент времени t равна 1, то оценка самого сильного конкурента в этот момент равна 0. Следовательно, вероятности

$$\Pr\{b_t = 1 | r_1^\tau\} \sim e^{-\mu_{r,\min}}, \quad (5)$$

$$\Pr\{b_t = 0 | r_1^\tau\} \sim e^{-\mu_{r,c}}, \quad (6)$$

а логарифм отношения этих вероятностей равен

$$\log \frac{\Pr\{b_t = 1 | r_1^\tau\}}{\Pr\{b_t = 0 | r_1^\tau\}} = \log \frac{e^{-\mu_{r,\min}}}{e^{-\mu_{r,c}}} = \log e^{\mu_{r,c} - \mu_{r,\min}} = \mu_{r,c} - \mu_{r,\min}. \quad (7)$$

Обозначим через μ_τ^1 минимальную метрику пути при $b_t = 1$ и μ_τ^0 минимальную метрику пути при $b_t = 0$.

На мягком выходе декодера АВМР образуется мягкая оценка

$$\Lambda(b_t) = \log(P\{b_t = 1 | r_1^\tau\} / P\{b_t = 0 | r_1^\tau\}) = \mu_\tau^0 - \mu_\tau^1. \quad (8)$$

Итерационное декодирование по АВМР для турбо-кодов с сокращённым алфавитом. Турбо-кодер, основанный на рекурсивных несистематических свёрточных кодах с сокращённым входным алфавитом, изображён на рис. 2. На первый кодер поступает информационная последовательность b длины N

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_N).$$

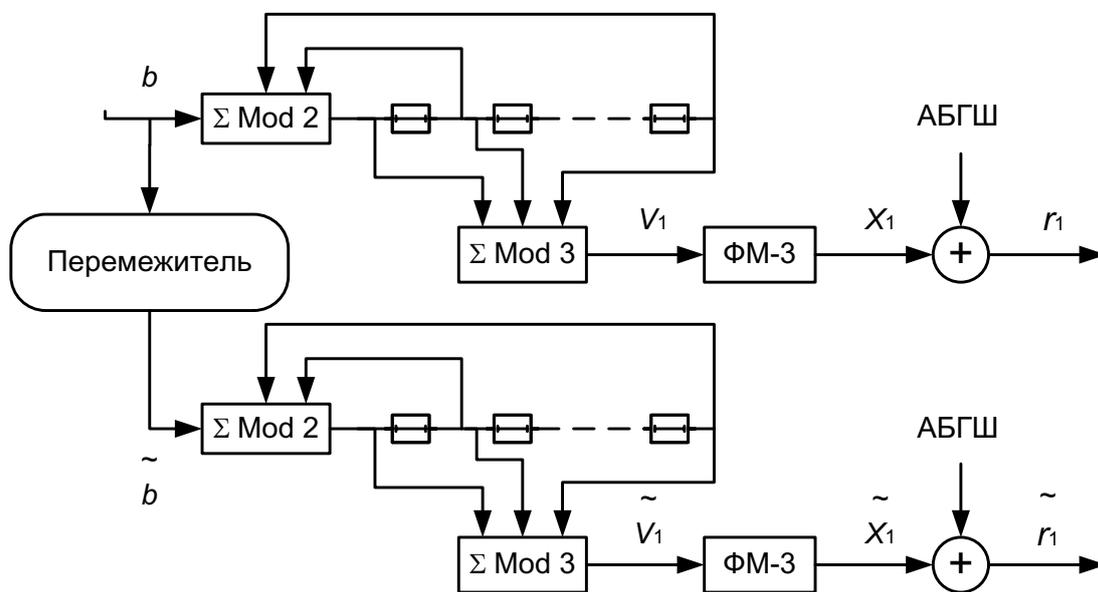


Рисунок 2 – Схема построения турбо-кодера с компонентным несистематическим кодом с сокращённым входным алфавитом

Кодер создаёт на своём выходе кодированную последовательность, обозначенную v_1 . На второй кодер поступает та же информационная последовательность, прошедшая через

переमेжитель и обозначенная \tilde{b} . Соответственно на выходе второго кодера возникают последовательность \tilde{v}_1 .

В итерационной схеме, основанной на АВМР, первый декодер АВМР принимает входную кодированную последовательность r_1 . Он обрабатывает её и выдаёт мягкое решение, которое через перемежитель поступает на второй декодер вместе с принятой кодированной последовательностью со второго кодера r_1 . Второй декодер тоже выносит мягкое решение, которое может быть использовано первым декодером для дальнейшего исправления ошибок в декодируемом блоке, и так многократно.

Мягкое решение на выходе каждого декодера АВМР выносится в соответствии с выражением (8)

$$\Lambda_1(b_t) = \mu_\tau^0 - \mu_\tau^1. \quad (9)$$

В итерационном декодировании априорная вероятность b_t вообще отличается от 0,5, поскольку предыдущая ступень декодирования обеспечивает улучшенную оценку относительно двоичного симметричного источника. Следовательно, вес пути в уравнении (8) для первого АВМР декодера представляет собой [5]

$$\mu_t^{(x)} = \mu_{t-1}^{(x)} + \sum_{i=0}^{n-1} (r_{t,i} - x_{t,i})^2 - b_t \log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right], \quad (10)$$

где $b_t \log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right]$ обеспечивается предыдущей ступенью декодирования. Как и в

алгоритме МАВ, мягкая выходная информация $\Lambda(b_t)$ из АВМР декодера разделяется на две части, собственная информация $\Lambda_i(b_t)$ и привнесенная информация $\Lambda_e(b_t)$. Привнесенная информация $\Lambda_e(b_t)$ может использоваться как априорная информация для следующей ступени, декодирующей после перемежения или деперемежения. Обозначим $\Lambda_1(b_t)$ выход первого декодера. Собственная информация – $\Lambda_{1i}(b_t)$ и привнесенная информация – $\Lambda_{1e}(b_t)$. Объединяя уравнения (2) и (10), состояние на выходе декодера АВМР может быть выражено как

$$\begin{aligned} \Lambda_1(b_t) &= \mu_\tau^0 - \mu_\tau^1 = \left\{ \mu_{\tau-1}^0 + \sum_{i=0}^{n-1} (r_{t,i} - x_{t,i}^0)^2 \right\} - \left\{ \mu_{\tau-1}^1 + \sum_{i=0}^{n-1} (r_{t,i} - x_{t,i}^1)^2 - \log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right] \right\} = \\ &= \log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right] + 4r_{t,0} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (x_{t,i}^1 - x_{t,i}^0)^2 r_{t,i} + \mu_{\tau-1}^0 - \mu_{\tau-1}^1 = \Lambda_{1i}(b_t) + \Lambda_{1e}(b_t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где} \quad \Lambda_{1i}(b_t) = \log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right] + 4r_{t,0} \quad (12)$$

$$\text{и} \quad \Lambda_{1e}(b_t) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (x_{t,i}^1 - x_{t,i}^0)^2 r_{t,i} + \mu_{\tau-1}^0 - \mu_{\tau-1}^1. \quad (13)$$

Так, привнесенная информация $\Lambda_e(b_t)$ может быть получена из (11) и (12) как

$$\Lambda_{1e}(b_t) = \Lambda_1(b_t) - \Lambda_{1i}(b_t) = \Lambda_1(b_t) - \log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right] - 4r_{t,0}, \quad (14)$$

где $\log \left[\frac{P(b_t = 1)}{P(b_t = 0)} \right]$ – логарифм отношения априорных вероятностей приравнивается к привнесенной информации второго декодера после деперемежителя при итерационном декодировании. Обозначим $\tilde{\Lambda}_{2e}(b_t)$, привнесенную информацию от второго декодера после перемежителя. Затем выражение (13) преобразуется в

$$\Lambda_{1e}(b_i) = \Lambda_1(b_i) - \Lambda_{1i}(b_i) = \Lambda_1(b_i) - \tilde{\Lambda}_{2e}(b_i) - 4r_{i,0}. \quad (15)$$

Обозначим $\Lambda_2(b_i)$ выход второго декодера с собственной и привнесенной информацией $\Lambda_{2i}(b_i)$ и $\Lambda_{2e}(b_i)$ соответственно. Затем как в (14) преобразуем

$$\Lambda_{2e}(b_i) = \Lambda_2(b_i) - \Lambda_{2i}(b_i) = \Lambda_2(b_i) - \log \left[\frac{P(b_i=1)}{P(b_i=0)} \right] - 4r_{i,0} = \Lambda_2(b_i) - \tilde{\Lambda}_{1e}(b_i) - 4r_{i,0}, \quad (16)$$

где $\tilde{\Lambda}_{1e}(b_i)$ – перемежённая привнесенная информация от первого декодера.

На рис. 3 показана функциональная схема синтезированного декодера.

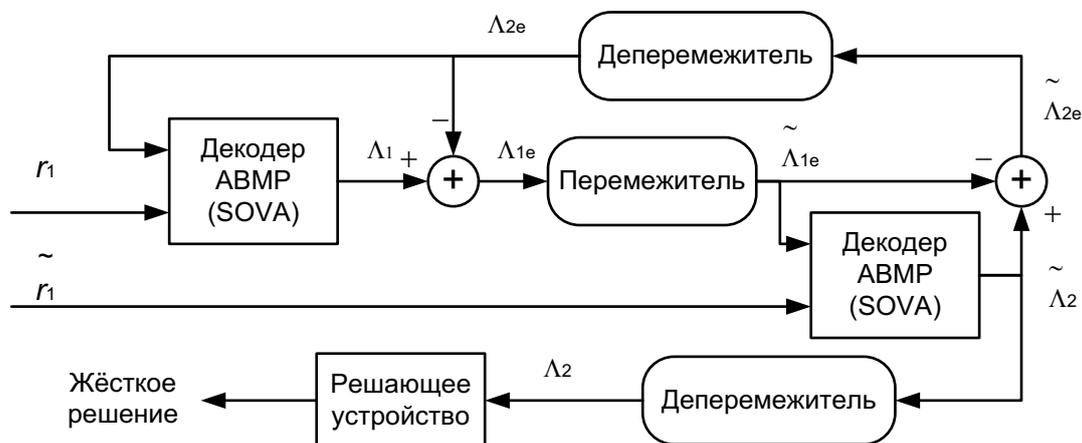


Рисунок 3 – Схема итерационного декодера кода на основе рекурсивных несистематических компонентных кодов с сокращённым алфавитом

Выбор компонентных кодов для итерационного декодера. Компонентные коды для турбо-кодов выбирались по критерию максимума минимального кодового расстояния при фиксированной длине кодового ограничения – v . Затем, для выбранных кодов проводилось сравнительное моделирование передачи по каналу с аддитивным белым шумом и выбирался тот из кодов, который показывал лучший коэффициент исправления ошибок. Поскольку в работе [3] было показано, что коды с сокращённым входным алфавитом в общем случае не линейны, то их переборный поиск значительно более затратный по вычислительным ресурсам, чем переборный поиск линейных свёрточных кодов.

Перфорация турбо-кодов с сокращённым алфавитом. В связи с тем, что у компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом избыточность создаётся за счёт расширения алфавита, а не за счёт добавления дополнительных символов, то невозможно корректно использовать описание перфорации обычных свёрточных кодов. Например, при использовании двоично-троичного турбо-кодирования без перфорации на каждый двоичный символ входных данных получаем два выходных троичных символа. Относительная скорость кода получится не $1/3$ (на 1 двоичный входной 3 двоичных выходных символа), как у обычных турбо-кодов, а $R = (\log_2 2) / (2 \log_2 3) \approx 0,31546$, но удобнее её описать следующим образом: $R = 1b/2t$. Далее в статье даны результаты моделирования для перфорированных турбо-кодов с сокращённым алфавитом с относительной скоростью $R = 2b/3t = (2 \log_2 2) / (3 \log_2 3) \approx 0,4206198$ и $R = 2b/3q = (2 \log_2 2) / (3 \log_2 4) = 1/3$, а матрица перфорации (P) выходной кодовой последовательности выглядит следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & X & \dots \\ 1 & X & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Результаты моделирования итерационного декодирования по Витерби для перфорированных турбо-кодов с сокращённым алфавитом с относительными скоростями $2b/3t$ и $2b/3q$

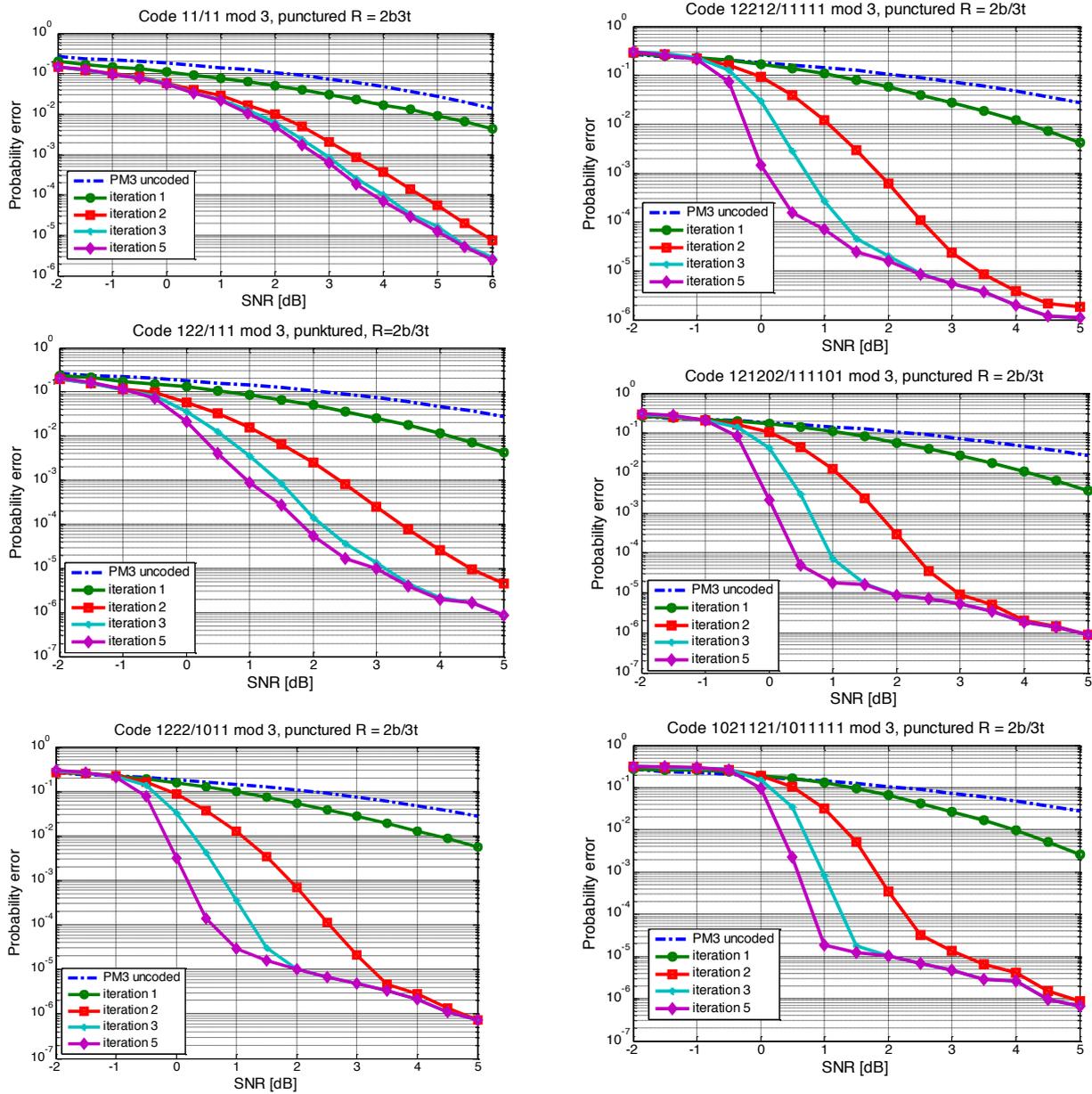


Рисунок 4 – Характеристики помехоустойчивости турбо-кодов на основе несистематических двоично-троичных рекурсивных перфорированных компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом

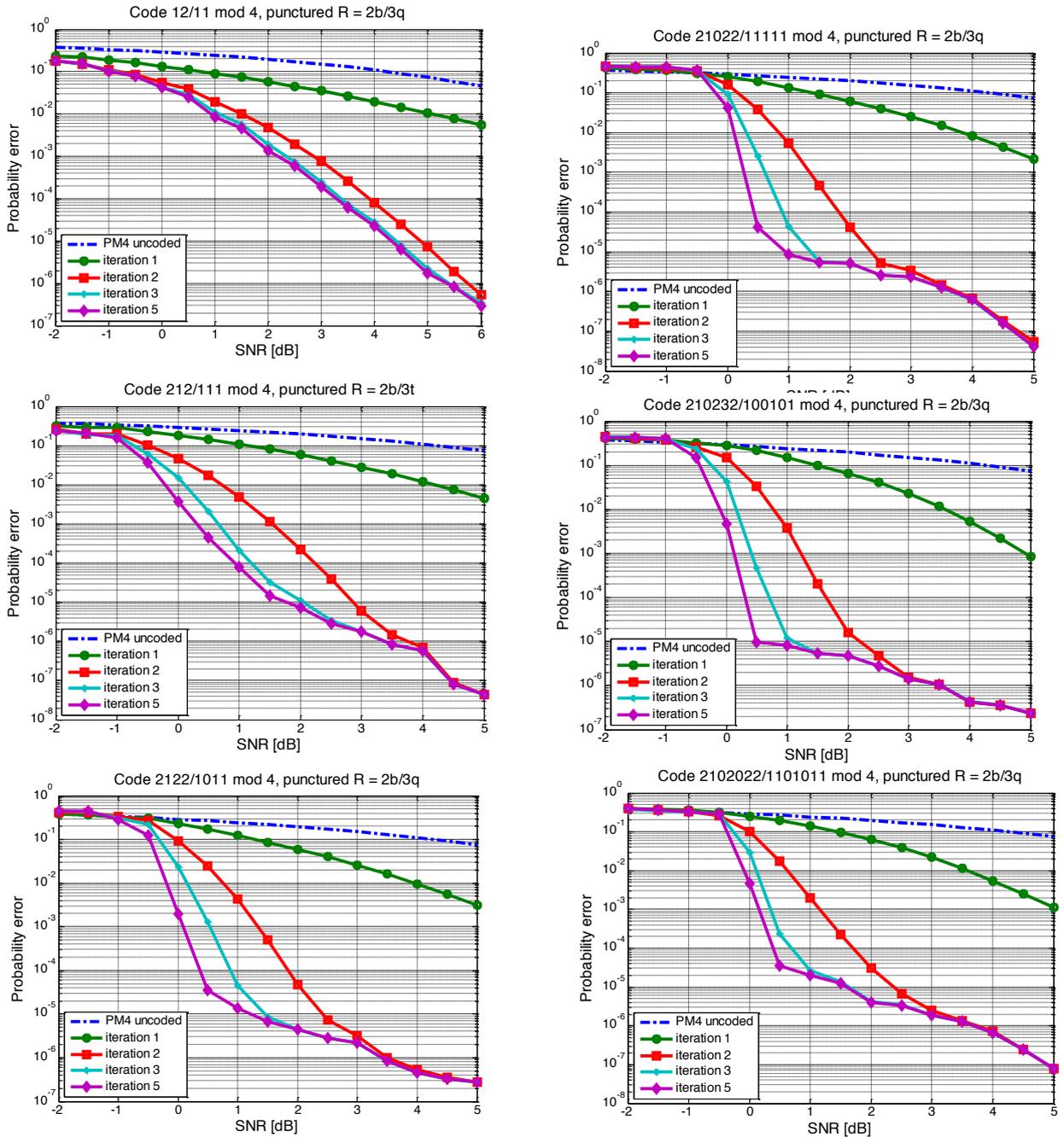


Рисунок 5 – Характеристики помехоустойчивости турбо-кодов на основе несистематических двоично-четверичных рекурсивных перфорированных компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом

Таблица 1 – Рекурсивные двоично-троичные несистематические компонентные коды с сокращённым входным алфавитом

№ п/п	v – кодовое ограничение	$G_0(\text{mod } 2)$ обр. связи	G_1 (mod 3)	d_{\min} по Ли	d_{\min}^2/E_s Эвклида	ЭВК, дБ при $R=1b/2t$, $p_{er}=10^{-4}$	ЭВК, дБ при $R=2b/3t$, $p_{er}=10^{-4}$
1	1	11	11	2	6	6,5	4,6
2	2	111	122	2	6	7,7	6,6
3	3	1011	1222	3	9	8,1	7,8
4	4	11111	12212	3	9	8,5	7,8
5	5	111101	121202	4	12	9,5	8,0
6	6	1011111	1021121	4	12	9,6	7,8

Таблица 2 – Рекурсивные двоично-четверичные несистематические компонентные коды с сокращённым входным алфавитом

№ п/п	v – кодовое ограничение	$G_0(\text{mod } 2)$ обр. связи	G_1 (mod 4)	d_{\min} по Ли	d_{\min}^2/E_s Эвклида	ЭВК, дБ при $R=1b/2q=1/4$, $p_{er}=10^{-4}$	ЭВК, дБ при $R=2b/3q$, $p_{er}=10^{-4}$
7	1	11	12	3	6	6,4	5,1
8	2	111	212	5	10	8,0	7,5
9	3	1011	2122	6	12	8,6	8,0
10	4	11111	21022	7	14	9,0	8,0
11	5	100101	210232	8	16	10	8,1
12	6	1101011	2102022	9	18	10	8,1

В ходе исследования получены следующие результаты:

- использована, разработанная ранее, имитационная модель канала с турбо-кодом на основе алгоритма Витерби с мягким решением для перфорированных несистематических компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом;
- с помощью созданной модели канала впервые получены и опубликованы характеристики помехоустойчивости турбо-кодов на основе перфорированных рекурсивных свёрточных компонентных кодов с сокращённым входным алфавитом и относительными скоростями $2b/3t$ и $2b/3q$;
- полученные сигнально-кодовые конструкции по своей эффективности сравнимы с известными турбо-кодами при одинаковой сложности реализации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Басов В.Е. Свёрточные коды с сокращённым входным алфавитом / В. Е. Басов // Труды IV Международной НТК [“Телеком-99, сентябрь”]. – Одесса: УГАС, 1999. – С. 213–216.
2. Басов В.Е. Перспективы использования непрерывных кодов с сокращённым входным алфавитом / В. Е. Басов // Моделювання та інформаційні технології. – К., 2005. – № 30. – С. 128–137.
3. Басов В.Е. Эффективность совместного использования многопозиционных сигналов и свёрточных кодов: дис... канд. техн. наук: 05.12.02 / Басов Виктор Евгеньевич. – Одесса, 2006, – 208 с.
4. Басов В.Е. Синтез итерационного декодера по максимуму апостериорной вероятности для кодов с сокращённым входным алфавитом / В.Е. Басов // Вісник ДУИКТ. Спеціальний випуск. – К.: ДУИКТ, 2007. – С. 136–142.

5. Басов В.Е. Синтез итерационного декодера Витерби для кодов с сокращённым входным алфавитом / В.Е. Басов // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2015. – № 2. – С. 89–95.
6. Басов В.Е. Новые рекурсивные коды с сокращённым входным алфавитом / В.Е. Басов, В.Н. Исарев // Радиоэлектроника та телекомунікації.– 2009. – № 645. – С. 138–146.
7. Басов В.Е. Итерационное декодирование по Витерби неперфорированных кодов с сокращённым входным алфавитом / В. Е. Басов, Е.А. Севастеев // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2016. – № 2. – С. 107–114.

REFERENCES:

1. Basov, V.E. "Convolutional codes with the reduced input alphabet." Proc. of the IV International STC «Telekom-99 September» – Odessa: USAC, (1999) 213–216. Print
2. Basov, V. E. "Perspectives of Use of the Continuous Codes with the Reduced Input Alphabet." *Simulation and Information Technologies* 30 (Kiev, 2005): 128–137. Print.
3. Basov, Viktor Eugenievich. "Efficiency of Sharing of Multiposition Signals and Convolutional Codes." Diss. O.S. POPOV ONAT, 2006. Print.
4. Basov, Viktor Eugenievich. "Synthesis of the Iterative Decoder to the Maximum Posterior Probability for Codes with the Reduced Input Alphabet." *DUIKT Buletin Special Release* (2007): 136–42. Print.
5. Basov, Viktor Eugenievich. "Synthesis of the Iterative Decoder Viterbi for Codes with the Reduced Input Alphabet." *Scientific Works of ONAT*. – Odessa: ONAT, 2016. – № 2. – P. 89–95.
6. Basov V.E., Isarev V.N. "New recursive codes with short input alphabet" // *Radioelectronics and telecommunications*. – 2009. – № 645. – P. 138–146.
7. Basov V. E., Sevasteev E. A. "Iterative decoding viterbi for punctured codes with brief source alphabet" // *Scientific Works of ONAT*. – Odessa: ONAT, 2016. – № 2. – P. 107–114.