

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ОПТИЧЕСКИМИ ИМПУЛЬСАМИ РАВНОЙ ДИСПЕРСИИ

Одегов Н.А.

*Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова,
65029, Украина, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1.
onick_64@ukr.net*

ПЕРЕДАВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ ОПТИЧНИМИ ІМПУЛЬСАМИ РІВНОЇ ДИСПЕРСІЇ

Одегов М.А.

*Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
65029, Україна, м. Одеса, вул. Кузнечна, 1.
onick_64@ukr.net*

TRANSMISSION OF INFORMATION BY OPTICAL IMPULSES OF EQUIVALENT DISPERSION

Odegov N.A.

*O.S. Popov Odessa national academy of telecommunications,
1 Kuznechna St., Odessa, 65029, Ukraine.
onick_64@ukr.net*

Аннотация. Статья посвящена общей проблеме повышения спектральной эффективности волоконно-оптических систем передачи данных. Рассмотрен один из возможных подходов к решению данной проблемы. Суть подхода – распознавание сигналов в спектральной области. Полагается, что энергетический спектр оптического импульса устойчив к материальной дисперсии. При этом оптические импульсы с различным спектральным составом подвергаются, вообще говоря, разной дисперсионной эволюции. Решаемая задача сводится к синтезу оптических сигналов, имеющих приблизительно одну ширину спектральной плотности и приблизительно равные параметры дисперсионного уширения. Задача сформулирована в математических терминах. Задача решена для импульсов с прямоугольным спектром и с гауссовым спектром. Показана возможность передачи информации со скоростью больше одного бита в одном импульсе посредством таких сигналов. Задача решена для узкополосного сигнала в условиях превалирования материальной дисперсии.

Ключевые слова: дисперсия, сигнал, спектр, преобразование Фурье, функционал.

Анотація. Стаття присвячена загальній проблемі підвищення спектральної ефективності волоконно-оптичних систем передачі даних. Розглянуто один із можливих підходів до вирішення даної проблеми. Суть підходу - розпізнавання сигналів у спектральній області. Вважається, що енергетичний спектр оптичного імпульсу стійкий до матеріальної дисперсії. При цьому оптичні імпульси з різним спектральним складом піддаються, взагалі кажучи, різній дисперсійній еволюції. Завдання зводиться до синтезу оптичних сигналів, що мають приблизно одну ширину спектральної щільності і приблизно рівні параметри дисперсійного поширення. Задача сформульована в математичних термінах. Завдання вирішене для імпульсів з прямокутним спектром і з гауссовим спектром. Показана можливість передачі інформації зі швидкістю більше одного біта в одному імпульсі за допомогою таких сигналів. Задача вирішена для вузькосмугового сигналу в умовах превалювання матеріальної дисперсії.

Ключові слова: дисперсія, сигнал, спектр, перетворення Фур'є, функціонал.

Abstract. The article is devoted to the general problem of increasing the spectral efficiency of fiber-optic data transmission systems. One possible approach to solving this problem is considered. The essence of the approach is the recognition of signals in the spectral region. It is assumed that the energy spectrum of optical pulse is stable to material dispersion. In this case, optical pulses with a distinct spectral composition undergo, in general, different dispersion evolution. The problem solved is reduced to the

synthesis of optical signals having approximately one spectral width and approximately equal parameters of the dispersion broadening. The problem is formulated in mathematical terms. The problem is solved for pulses with a rectangular spectrum and with a Gaussian spectrum. It is shown that information can be transmitted at a rate greater than one bit in one pulse by means of such signals. The problem is solved for a narrow-band signal under conditions of prevailing material dispersion.

Key words: dispersion, signal, spectrum, Fourier transform, functional.

Среди показателей качества систем передачи данных особое место занимает спектральная эффективность (СПЭ) $SpE = Bps / \Delta f$ [бит/с/Гц], где Bps – скорость передачи данных; Δf – ширина полосы частот канала передачи. В современных системах передачи этот показатель значительно варьируется в зависимости от применяемой технологии, среды распространения сигнала, расстояния, помеховой обстановки и многих других факторов. Так, в системах мобильной связи СПЭ имеет типичные значения от 0,5 до 5 единиц [1] для технологии LTE (Long Term Evolution). При этом речь идет о полосе канала передачи порядка 20 МГц и о расстоянии порядка единиц – десятков километров.

Используемый в настоящее время оптический диапазон занимает промежуток длин волн 800...1800 нм, чему соответствует полоса частот приблизительно 175 ... 375 ТГц. Таким образом, общая полоса частот для передачи оптических сигналов составляет примерно 200 ТГц. Имеются данные об экспериментальных разработках [2], позволяющих передавать данные в волоконно-оптических системах передачи (ВОСП) на расстояние более 6000 км со скоростью до 20 Тбит/с. При этом достигается значение СПЭ около 0,1 единицы.

Еще меньшее значение СПЭ получается для ВОСП в существующих сетях связи. Так, для оборудования STM-16 в полосе канала 100 ГГц скорость передачи данных составляет 2,5 Гбит/с [3]. Соответственно, значение СПЭ 0,025 единицы. Несколько большее значение СПЭ получается для STM-64, где скорость передачи составляет 10 Гбит/с. При этом значительно уменьшается длина регенерационных участков.

Сравнение СПЭ в системах мобильной связи и ВОСП показывает относительно низкую эффективность использования спектра частот в последнем случае. Данный вывод может показаться парадоксальным: в ВОСП влияние внешних шумов, ограничивающих скорость передачи, пренебрежимо мало по сравнению с радиоканалами. В то же время СПЭ ВОСП оказывается зависящим от других факторов. Во-первых, в данном случае типичные расстояния передачи составляют десятки, сотни и даже тысячи километров. Во-вторых, СПЭ ограничивается сильной зависимостью коэффициента затухания от частоты. В-третьих, оптические сигналы подвержены существенным искажениям за счет различных дисперсионных эффектов.

Среди методов повышения СПЭ ВОСП отметим следующие.

Пространственные, временные и спектральные методы [4]. Пространственные методы наиболее просты в реализации: различные потоки данных передаются по разным оптическим волокнам (ОВ). Недостаток методов – высокая стоимость ВОСП. Временные методы на протяжении длительного времени используются в системах TDM (Time Division Multiplexing). Достоинством таких методов является простота технической реализации. Решаемая при этом задача сводится к разделению логических каналов во временной последовательности. При этом собственно СПЭ не увеличивается, скорее даже уменьшается за счет необходимости использования части трафика как служебного. Частотные методы уплотнения (WDM – Wavelength Division Multiplexing и DWDM – Dense Wavelength Division Multiplexing) на сегодняшний день являются наиболее широко используемыми и с практической точки зрения наиболее эффективными. Технология плотного спектрального мультиплексирования DWDM позволяет организовать несколько значительно разделенных в частотной области мультиканалов передачи данных.

Модовые и поляризационные методы [5]. Первые из них основаны на принципиальной возможности передавать разные информационные потоки на разных модах многомодового ОВ. Данные методы практически неприменимы в ВОСП с одномодовыми

ОВ, которые используются для построения магистральных каналов передачи. Кроме того, при изгибах и прочих деформациях ОВ может наблюдаться смешение мод. Поляризационные методы основаны на формировании оптических сигналов с различной линейной поляризацией. Определенную трудность применения таких методов составляет неоднородность ОВ, включая наличие сварных соединений.

Методы оптимального кодирования [6], которые сводятся, в частности, к дополнению кодовых последовательностей определенным количеством нулевых битов для выявления и последующего устранения «фантомных» единичных битов, появляющихся на приемном конце за счет различных нелинейных эффектов.

Компенсаторные методы [7] позволяют решить принципиальную задачу – уменьшить влияние дисперсии на длительность импульса на приемном конце. При этом за счет уменьшения длительности импульса уменьшается и длительность межимпульсного интервала (далее – тайм-слот). Соответственно, увеличивается скорость передачи данных и СПЭ. В данную группу входят активные и пассивные методы. Пассивные методы включают использование ОВ с нулевой дисперсией, компенсацию дисперсии на различных строительных длинах за счет чередования ОВ с положительной и отрицательной дисперсией, использование антидисперсионных вставок и др. Определенным недостатком таких методов является то, что они эффективны только для определенной длины волны. Активные методы предполагают компенсацию дисперсии на передающем конце ВОСП за счет формирования оптического сигнала определенной формы и на приемном конце за счет восстановления первоначальной формы сигнала.

Отдельную перспективную группу компенсаторных методов составляют способы передачи сигналов оптическими солитонами [8,9]. Практическая применимость таких методов ограничивается из-за того, что мощность сигнала по мере распространения его вдоль ОВ уменьшается, что приводит к нарушению условий нелинейности, вызывающих солитонные эффекты.

Относительно мало исследованным является комплекс задач установления соотношений между тонкой структурой оптического сигнала и его дисперсионными свойствами. Частичному пополнению данного научно-методического аппарата посвящается настоящая статья.

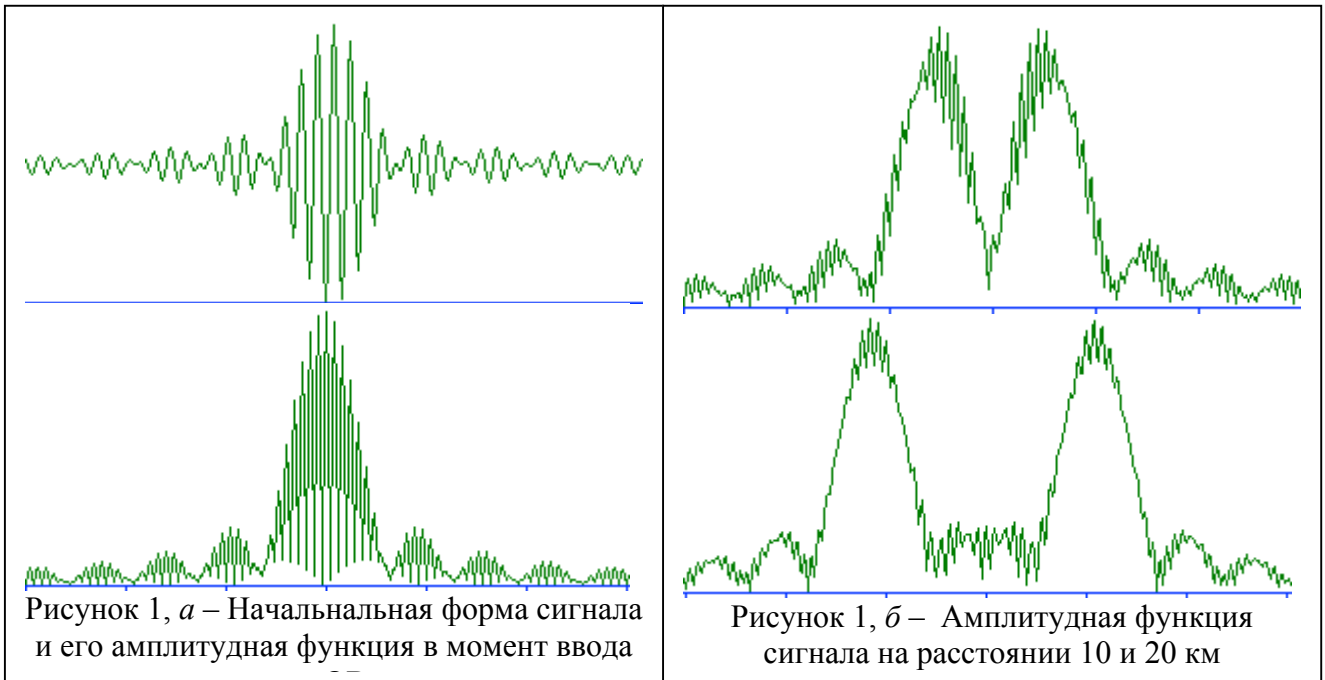
Цель статьи – синтез алфавита оптических сигналов, занимающих в частотной области приблизительно одинаковую полосу, имеющих хорошо различимые энергетические спектры и обладающих приблизительно одинаковым дисперсионным уширением. С использованием таких сигналов принципиально возможной оказывается передача информации со скоростью больше одного бита на тайм-слот.

Постановка задачи

Примем некоторые ограничения на условия формирования и распространения сигналов в оптическом волокне (ОВ), а именно:

- ОВ функционирует в одномодовом режиме;
- перераспределением энергии между сердцевиной и оболочкой ОВ пренебрегаем;
- начальная поляризация импульсов круговая;
- неравномерностью коэффициента затухания по частоте также можно пренебречь;
- мощность импульса достаточно мала для того, чтобы исключить нелинейные эффекты.

Таким образом, исследуется влияние *собственно* материальной дисперсии на форму и спектральные характеристики оптического импульса на стороне приема. При этом распознавание сигналов отличной формы можно осуществлять как во временной, так и в частотной области. Однако во временной области сигналы претерпевают существенные деформации по мере продвижения вдоль ОВ. В качестве примера на рис. 1 показана амплитудная функция одного и того же начального сигнала с низкочастотной составляющей вида $\sin(\alpha t) \cos(\beta t) / \alpha t$, $\alpha < \beta$ на разных расстояниях от точки ввода.



В то же время, спектр сигнала оказывается устойчивым к хроматической дисперсии [9]. На самом деле, дисперсия с точки зрения теории сигналов может рассматриваться как перераспределение энергии между вещественной и мнимой составляющими спектральной плотности. При этом амплитудный спектр и, соответственно, энергетический спектр остаются неизменными по форме.

Рассмотрим сигнал вида

$$u(t) = U(t, z = 0) \exp(j\omega_0 t), \quad (1)$$

где $U(t, z = 0)$ – низкочастотная составляющая сигнала (НЧС) в момент его ввода в ОВ; z – расстояние, пройденное сигналом вдоль ОВ; ω_0 – несущая (центральная) частота, которая в рабочем диапазоне имеет порядок 175...375 ТГц.

Эволюция НЧС вследствие воздействия хроматической дисперсии с высокой точностью описывается уравнением [10]:

$$U(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\varphi(\omega_0)\tau\Omega^2) G(\Omega) d\Omega, \quad \tau = \frac{z}{c}, \quad \Omega = \omega - \omega_0, \quad (2)$$

где коэффициент фазы φ выражается через значения первой и второй производной коэффициента преломления по частоте в точке ω_0 : $\varphi(\omega_0) = n_0^{[1]} + \frac{1}{2} n_0^{[2]} \omega_0$; $G(\Omega)$ – спектральная плотность НЧС сигнала в момент ввода в ОВ. Спектральную плотность далее будем полагать вещественной функцией.

Ранее отмеченное положение о том, что энергетический спектр сигнала инвариантен к материальной дисперсии, доказывается в данном случае так:

$$|G(\Omega, \tau)|^2 = G(\Omega, \tau) G^*(\Omega, \tau) = G^2(\Omega) \exp[j\varphi(\omega_0)\tau - j\varphi(\omega_0)\tau] = G^2(\Omega, \tau = 0) = G^2(\Omega). \quad (3)$$

Отсюда следует, что оптические сигналы, подверженные воздействию дисперсии целесообразно распознавать в частотной области. При этом для решения поставленной задачи (больше одного бита на один тайм-слот) важно, чтобы различные оптические импульсы имели различимые энергетические спектры. Другое требование следует из элементарного требования баланса тайм-слотов: скорость передачи данных будет ограничиваться длительностью импульса, подверженного наибольшему уширению. Третье

требование: различные импульсы должны обладать примерно одинаковой энергией.

Показано [11], что приращение эффективной длительности симметричного оптического импульса за счет материальной дисперсии выражается функционалом:

$$\Delta T_{eff}^2(z) = \frac{2\varphi^2(\omega_0)\tau^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 G^2(\Omega) d\Omega, \quad E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\Omega) d\Omega, \quad (4)$$

где E – энергия импульса.

Исходя из выражений (2–4), сформулируем постановку задачи в математических терминах.

Требуется найти конечную систему функций $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Условие существования прямого и обратного преобразования Фурье

$$G_n(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_n(t) \exp(-j\Omega t) dt, \quad U_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\Omega) \exp(j\Omega t) d\Omega, \quad n = 1 \dots N. \quad (5)$$

2. Условие равенства и ограниченности энергий

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} U_n^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\Omega) d\Omega = E, \quad n = 1 \dots N. \quad (6)$$

Выполнение этого условия соответствует, в том числе, требованию относительной малости мощности импульса, что предотвращает нелинейные эффекты.

3. Условие равенства дисперсий, следует из выражения (4)

$$D_n = \frac{1}{E_n} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 G_n^2(\Omega) d\Omega = D, \quad n = 1 \dots N. \quad (7)$$

4. Условие различимости в спектральной области: существует такое множество значений аргумента $\{\Omega\}$, что для него выполняется условие

$$G_1^2(\Omega) \neq G_2^2(\Omega) \neq \dots \neq G_N^2(\Omega), \quad \Omega \in \{\Omega\}. \quad (8)$$

Условиям (5–8) удовлетворяет бесконечное множество систем функций. Рассмотрим некоторое подмножество таких систем.

Ортогональные знакопостоянные спектральные функции

Условие (8) очевидно выполнено, если энергетические спектры ортогональны. Свойство ортогональности является полезным при распознавании сигналов с использованием корреляционных методов.

Энергетические спектры, очевидно, являются знакопостоянными функциями: $G_n^2(\Omega) \geq 0, \forall \Omega$. Определим носитель $\{\Omega_n\}$ функции $G_n^2(\Omega)$ как множество значений аргумента, при которых данная функция строго положительна, а вне этого множества всюду равна нулю.

Очевидно, что функции $G_n^2(\Omega)$ и $G_m^2(\Omega)$ ортогональны тогда и только тогда, когда их носители не имеют пересечения: $\{\Omega_n\} \cap \{\Omega_m\} \equiv \emptyset$, за исключением, разве что, счетного множества точек. Доказывается данное предложение элементарно от противного. В самом деле, с учетом знакопостоянства данных функций интеграл

$$\int_{\{\Omega_n\} \cap \{\Omega_m\}} G_n^2(\Omega) G_m^2(\Omega) d\Omega > 0, \quad \text{если } \{\Omega_n\} \cap \{\Omega_m\} \neq \emptyset. \quad (9)$$

Условием ортогональности обладает, в частности, система функций, для которых спектральные плотности постоянны в соответствующих полосах частот, имеющих не более одной точки пересечения:

$$\begin{aligned} G_n(\Omega) &= C_n \text{rect}[\Omega_{n-1}, \Omega_n] + C_n \text{rect}[-\Omega_n, -\Omega_{n-1}], \quad \Omega_{n-1} < \Omega_n, \\ \Rightarrow G_n^2(\Omega) &= C_n^2 \text{rect}[\Omega_{n-1}, \Omega_n] + C_n^2 \text{rect}[\Omega_{n-1}, \Omega_n], \quad n = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие равенства энергий (6) для функций (10) выполнено, если

$$2C_n^2(\Omega_n - \Omega_{n-1}) = E \Rightarrow C_n = \sqrt{\frac{E}{2(\Omega_n - \Omega_{n-1})}}. \quad (11)$$

Из определения (10) следует выражение для НЧС искомой системы функций:

$$U_n(t) = \frac{C_n}{2\pi} \int_{\Omega_{n-1}}^{\Omega_n} \exp(j\Omega t) d\Omega + \frac{C_n}{2\pi} \int_{-\Omega_n}^{-\Omega_{n-1}} \exp(j\Omega t) d\Omega. \quad (12)$$

Заметим, что мнимая часть НЧС после интегрирования в выбранных пределах обращается в ноль, а вещественная часть будет определяться:

$$U_n(t) = \frac{C_n}{\pi} \int_{\Omega_{n-1}}^{\Omega_n} \cos(\Omega t) d\Omega = \frac{C_n}{\pi t} (\sin \Omega_n t - \sin \Omega_{n-1} t), \quad (13)$$

что дает после несложных преобразований:

$$U_n(t) = \frac{C_n \Delta \Omega_n}{2\pi} \frac{\sin \frac{\Delta \Omega_n}{2} t}{\frac{\Delta \Omega_n}{2} t} \cos \overline{\Omega_n} t, \quad (14)$$

где $\Delta \Omega_n = \Omega_n - \Omega_{n-1}$ – ширина полосы НЧС сигнала; $\overline{\Omega_n} = (\Omega_n + \Omega_{n-1})/2$ – средняя частота в полосе $[\Omega_{n-1}, \Omega_n]$.

Таким образом, с точностью до постоянных множителей искомая система функций определяется как сигналы вида $\sin x/x$, промодулированные гармоникой частоты $\overline{\Omega_n}$. Для каждой из набора этих функций нули огибающей НЧС будут расположены в точках

$$t_{kn} = \pm \frac{2k\pi}{\Delta \Omega_n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

а ширина главного лепестка составит $\Delta T_n = 4\pi / \Delta \Omega_n$.

Система импульсов равной дисперсии с прямоугольным спектром

Для полученной системы (14) остается доопределить границы полос отдельных функций $[\Omega_{n-1}, \Omega_n]$. Для выполнения условия равных дисперсий (7) необходимо, чтобы:

$$D_n = \frac{d_n}{E_n} = D, \quad d_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 G_n^2(\Omega) d\Omega, \quad E_n = \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\Omega) d\Omega, \quad n = 1..N, \quad (16)$$

где числитель d_n здесь и далее будет называться дисперсионным функционалом.

Условие (16) можно несколько упростить, воспользовавшись следующим предложением.

Лемма. Дисперсионное уширение импульса зависит от формы его спектральной плотности, но не зависит от его энергии.

В самом деле, рассмотрим два импульса со спектральными плотностями $g_1(\omega)$ и $g_2(\omega) = r g_1(\omega)$. Тогда дисперсионное уширение второго импульса в соответствии с формулой (4) будет:

$$\Delta T_{eff,2}^2(z) = \frac{2\varphi^2(\omega_0)\tau^2}{\pi E_2} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 r^2 g_1^2(\Omega) d\Omega = \frac{2\varphi^2(\omega_0)\tau^2 r^2}{r^2 \pi E_1} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 g_1^2(\Omega) d\Omega = \Delta T_{eff,1}^2(z),$$

что и требовалось доказать.

С учетом леммы будем рассматривать упрощенные условия (16), которые сведем к требованию равенства дисперсионных функционалов:

$$d_n = d_{n+1} \Rightarrow \int_{\Omega_{n-1}}^{\Omega_n} \Omega^2 d\Omega = \int_{\Omega_n}^{\Omega_{n+1}} \Omega^2 d\Omega. \quad (17)$$

Условие (17) очевидно выполняется, если куб высшей частоты:

$$\Omega_{n+1}^3 = 2\Omega_n^3 - \Omega_{n-1}^3. \quad (18)$$

Для формирования сетки частот сигналов вида (14) примем $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1 = \alpha$. Тогда из (18) следует, что $\Omega_2^3 = 2\alpha^3$. И вообще $\Omega_n^3 = n\alpha^3$. Последнее доказывается по индукции. В самом деле, если $\Omega_n^3 = n\alpha^3$, то из (18) следует $\Omega_{n+1}^3 = 2\Omega_n^3 - \Omega_{n-1}^3 = 2n\alpha^3 - (n-1)\alpha^3 = (n+1)\alpha^3$, что и требовалось доказать. Отсюда следует, что $\Omega_n = \alpha\sqrt[3]{n}$. Значения граничных и средних частот для восьми функций равной дисперсии и для полосы частот ± 50 ГГц представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Сетка частот для НЧС вида (14)

$n-1$	n	$\sqrt[3]{n}$	Ω_{n-1}	Ω_n	$\Omega_n - \Omega_{n-1}$	$\overline{\Omega_n}$
0	1	1,0000	0,0000	25,0000	25,0000	12,5000
1	2	1,2599	25,0000	31,4980	6,4980	28,2490
2	3	1,4422	31,4980	36,0562	4,5582	33,7771
3	4	1,5874	36,0562	39,6850	3,6288	37,8706
4	5	1,7100	39,6850	42,7494	3,0644	41,2172
5	6	1,8171	42,7494	45,4280	2,6786	44,0887
6	7	1,9129	45,4280	47,8233	2,3953	46,6256
7	8	2,0000	47,8233	50,0000	2,1767	48,9116

Из табл. 1 следует, что ширина полос, занимаемых спектром НЧС вида (14), очень быстро убывает с ростом порядка функции n . Это требует применения весьма тонких методов распознавания сигналов в частотной области. В частности, если анализировать полученную энергию сигналов с помощью полосовых фильтров, то ширина полосы их пропускания должна очень быстро убывать до нуля. Обратным эффектом является то, что во временной области начальная длительность сигнала будет быстро возрастать при увеличении порядка функции n . Таким образом, данные аналитические выводы можно использовать на относительно больших расстояниях и для очень малого количества сигналов системы (14). Представляется, что количество таких сигналов вряд ли может превышать 8...10; как следует из табл. 1 уже при $N = 8$ ширина полосы 8-го сигнала на порядок меньше, чем ширина полосы первого сигнала. Соответственно, начальная эффективная длительность первого сигнала на порядок больше данного параметра 8-го сигнала. Отсюда следует, что практическая польза применения подобных систем сигналов может иметь место при относительно больших длинах регенерационных участков, когда начальная длительность импульса пренебрежимо мала по сравнению с его дисперсионным уширением.

Итак, с помощью не совсем тривиальных рассуждений мы показали, что в одном импульсе теоретически можно передавать 8 различных состояний, или $m = \log_2 8 = 3$ бита информации. Т.е., СПЭ можно увеличить в 3 раза. Данный результат может усилить следующее предложение.

Теорема. Для системы НЧС $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$ с ортогональными спектральными плотностями, все функции которой удовлетворяют условиям равной энергии $E_n = E$, имеют одинаковые дисперсионные функционалы $d_n = d$, любая функция из линейного многообразия, натянутого на эти функции:

$$W = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_N U_N \quad (19)$$

будет иметь то же дисперсионное уширение, что и каждая из этих НЧС.

Доказательство данного предложения элементарно сводится к тому, что из выражений

(16) и условий теоремы следует, что дисперсия отдельной НЧС $D_n = d_n / E_n = d / E = D$. Тогда с учетом линейности преобразования Фурье:

$$D(W) = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 G_n^2(\Omega) d\Omega + 2 \sum_{n \neq m}^N \alpha_n \alpha_m \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 G_n(\Omega) G_m(\Omega) d\Omega}{\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\Omega) d\Omega + 2 \sum_{n \neq m}^N \alpha_n \alpha_m \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\Omega) G_m(\Omega) d\Omega}, \quad (20)$$

где интегралы, содержащие произведения спектральных плотностей в силу ортогональности последних равны нулю. Тогда

$$D(W) = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 G_n^2(\Omega) d\Omega}{\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\Omega) d\Omega} = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 d_n}{\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 E_n} = \frac{d \sum_{n=1}^N \alpha_n^2}{E \sum_{n=1}^N \alpha_n^2} = \frac{d}{E} = D,$$

что и требовалось доказать.

Для различимости сигналов сформируем множество НЧС в виде разложений (19)

$$W_m = \sum_{n=1}^N \alpha_{n-1}^m U_n(t), \quad \alpha_{n-1}^m = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad m = 1 \dots M, \quad M = 2^N, \quad (21)$$

где α_{n-1}^m – коэффициенты разложения числа m в двоичной системе, а функции $U_n(t)$ определяются зависимостями (14). Очевидно, система НЧС (21) позволяет передавать существенно большее количество информации в одном импульсе. Так, для примера табл. 2 с использованием системы НЧС (21) в одном импульсе можно передавать один байт, или 256 различных сообщений. При этом СПЭ увеличивается в тех же условиях в 8 раз.

Система гауссовых импульсов равной дисперсии

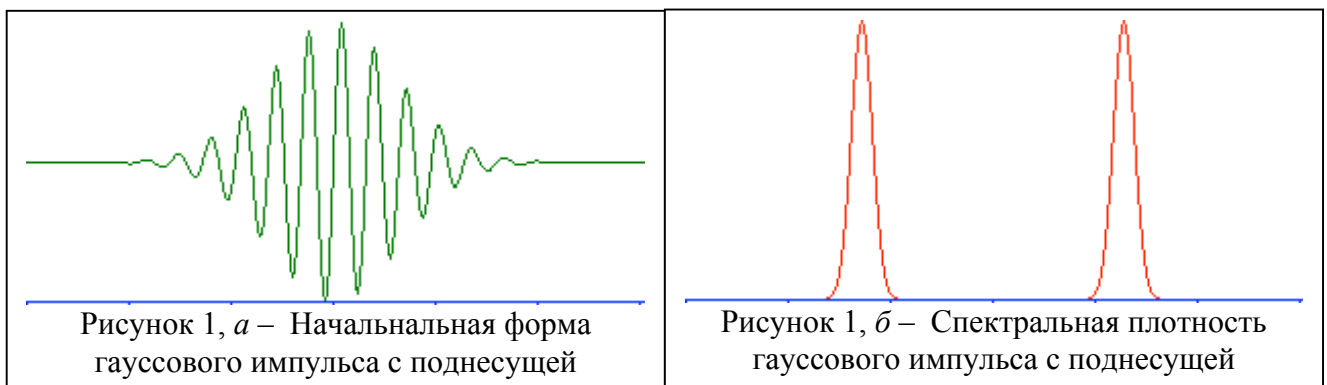
В предыдущем разделе мы прибегли к некоторой условности, считая приблизительно одинаковыми требования равной дисперсии и условие равных дисперсионных функционалов. Это позволило получить наглядные с математической точки зрения результаты. Однако, если полностью выполнить математические преобразования, то условие равенства дисперсий для НЧС (14) будет весьма сложным.

Рассмотрим систему НЧС в виде гауссовых функций. Для этой системы условие ортогональности энергетических спектров выполняется лишь с некоторым приближением. Достоинством будет более строгий учет дисперсионной эволюции импульсов.

НЧС искомой системы импульсов с единичной энергией будем определять в общей форме:

$$U_n(t, z = 0) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_n^2}\right) \cos(\Omega_n t). \quad (22)$$

Пример НЧС такого импульса и его спектральной плотности представлены на рис. 1.



Для дальнейших выводов понадобятся два табличных интеграла [12, с. 344]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-px^2 - qx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \quad \text{Re } p > 0, \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ax^2 + 2bx + c) \exp(-px^2 - qx) dx = \frac{1}{4p^2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} [4cp^2 - 4pqb + a(q^2 + 2p)] \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right). \quad (24)$$

Выполним прямое преобразование Фурье для функций (22). Используя интеграл (23) с параметрами $p = \sigma^2 / 2, q = -jt$ и применив теорему модуляции, получим выражение для спектральной плотности и энергетического спектра:

$$G_n(\Omega) = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{\sigma_n^2(\Omega \pm \Omega_n)^2}{2}\right], \quad G_n^2(\Omega) = \frac{1}{4} \exp\left[-\sigma_n^2(\Omega \pm \Omega_n)^2\right]. \quad (25)$$

Далее ограничимся рассмотрением только положительной частью спектров в силу симметрии получаемых решений. Равное дисперсионное уширение импульсов с НЧС (22) будет определяться системой уравнений:

$$D_n = \frac{d_n}{E_n} = \frac{\exp(\Omega_n^2 \sigma_n^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \exp(-\sigma_n^2 \Omega^2 + 2\sigma_n^2 \Omega \Omega_n) d\Omega}{\exp(\Omega_n^2 \sigma_n^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma_n^2 \Omega^2 + 2\sigma_n^2 \Omega \Omega_n) d\Omega} = D, \quad n=1..N. \quad (26)$$

С учетом табличных интегралов (23-24) при определении числителя и знаменателя в уравнениях (26) положим: $p = \sigma_n^2, q = -2\sigma_n^2 \Omega_n, a = 1, b = 0, c = 0$. Тогда уравнения (26) после несложных преобразований приводятся к следующему виду:

$$D_n = \frac{q^2 + 2p}{4p^2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \sqrt{\frac{p}{\pi}} = \frac{4\sigma_n^4 \Omega_n^2 + 2\sigma_n^2}{4\sigma_n^4} = \Omega_n^2 + \frac{1}{2\sigma_n^2} = D, \quad n=1..N. \quad (27)$$

Можно рассматривать различные системы функций (22), удовлетворяющих условиям (27). Остановимся на достаточно общем случае, когда шкала поднесущих частот строится по правилу $\Omega_n = \Omega_1 \sqrt{f(n)}$, где $f(n)$ – монотонно возрастающая функция, причем $f(1)=1$. Также положим, что среднее квадратическое отклонение (СКО) огибающей НЧС во временной области для импульса порядка 1 определяется зависимостью: $\sigma_1^2 = 1/(2\alpha\Omega_1^2)$. Тогда из выражения (27) следует, что СКО огибающей импульса порядка n во временной области должно удовлетворять уравнению:

$$f(n)\Omega_1^2 + \frac{1}{2\sigma_n^2} = \Omega_1^2 + \alpha\Omega_1^2, \quad \Rightarrow \sigma_n^2 = \frac{1}{2\Omega_1^2[1 + \alpha - f(n)]}. \quad (28)$$

Решение уравнений вида (28) имеет смысл, если $1 + \alpha - f(n) > 0$. С учетом ранее сделанных предположений это условие выполняется, если для наибольшего порядка импульса выполнено $\alpha = f(N)$.

Подбор параметра α и системы функций $f(n)$ требует решения непростой вариационной задачи оптимизации. Так, известным является соотношение для СКО гауссового импульса во временной области σ и в частотной области $\zeta = 1/\sigma$. Из уравнений (28) следует, что СКО модуля спектральной плотности должно удовлетворять уравнению

$$\zeta_n = \Omega_1 \sqrt{2[1 + f(N) - f(n)]}. \quad (29)$$

При этом надо соблюсти некоторый баланс между распределением поднесущих в частотной области (они не должны располагаться слишком плотно), начальной длительностью импульсов и шириной спектра. Не идеальным, но компромиссным представляется вариант, когда $f(n) = n$. Расчеты параметров сигналов для этого случая и для частоты $F_1 = \Omega_1 / 2\pi = 20$ ГГц при $N = 8$ даны в табл. 2.

Таблица 2 – Параметры системы гауссовых импульсов равной дисперсии

n	$F_n, ГГц$	$\Omega_n, 2\pi \cdot 10^9 \text{ рад/с}$	$\sqrt{2[1 + f(N) - f(n)]}$	$\zeta_n, ГГц$	$\sigma_n, пс$
1	2,0000E+01	1,2566E+02	4,0000E+00	8,0000E+01	1,2500E+01
2	2,8284E+01	1,7771E+02	3,7417E+00	7,4833E+01	1,3363E+01
3	3,4641E+01	2,1765E+02	3,4641E+00	6,9282E+01	1,4434E+01
4	4,0000E+01	2,5132E+02	3,1623E+00	6,3246E+01	1,5811E+01
5	4,4721E+01	2,8098E+02	2,8284E+00	5,6569E+01	1,7678E+01
6	4,8990E+01	3,0780E+02	2,4495E+00	4,8990E+01	2,0412E+01
7	5,2915E+01	3,3247E+02	2,0000E+00	4,0000E+01	2,5000E+01
8	5,6569E+01	3,5542E+02	1,4142E+00	2,8284E+01	3,5355E+01

Анализ табл. 2 показывает, что центральные частоты НЧС импульсов разнесены с достаточно большим для частотной фильтрации шагом. Во временной области ширина начальных импульсов также является сбалансированной: по уровню 0,5 от амплитуды этот параметр изменяется менее чем на порядок. В то же время, энергетические спектры таких импульсов не являются ортогональными даже в первом приближении. Наложение спектральных характеристик данной системы импульсов, очевидно, будет значительным.

Улучшить разрешение в спектральной области позволит, например, эквидистантное определение поднесущих с параметрической функцией $f(n) = n^2$, $\Omega_n = n\Omega_1$. При этом возникнет другой отрицательный эффект: существенное увеличение разницы начальных длительностей импульсов и существенное различие ширины их спектров.

Как видно из вышеизложенного, математически задача сводится к исследованию свойств соотношений функционалов определенного вида. Несмотря на их простоту, общее решение поставленной задачи требует применения численно-аналитических методов. Полученные решения позволяют сделать самые общие выводы на основе аналитических зависимостей для самых простых случаев. По крайней мере, понятно, что можно формировать узкополосные оптические сигналы с одной и той же несущей, которые, тем не менее, обладают свойством равного дисперсионного уширения.

В данной статье не ставилась задача практического воплощения предложенных решений. Более того, ни одну из систем функций (14) или (22) физически воспроизвести нельзя: любая огибающая НЧС в этих случаях имеет бесконечные носители. Несколько обнадеживает в этом смысле тождество Парсеваля и линейность преобразования Фурье. Из этих положений следует, что небольшая погрешность воспроизведения сигнала во временной области вызовет небольшое изменение энергетического спектра.

Важный вопрос физической воспроизводимости сигналов рассмотренного вида выходит за рамки настоящей работы и может составить предмет отдельных исследований.

Интересными представляются задачи воспроизведения сигналов заданной формы в оптическом диапазоне, а также разработка методов распознавания оптических сигналов на основе анализа их спектрального состава.

Также интересной как с теоретической, так и с практической точек зрения представляется задача синтеза сигналов равной дисперсии с существенно различными несущими. Решение такой задачи позволит разработать теоретические основы передачи оптических сигналов в сверхширокополосных системах.

Автор считает своим *приятным долгом* выразить искреннюю благодарность д.т.н. Тихонову Виктору Ивановичу за предложение использовать показатель частотной эффективности в качестве ведущего при исследовании влияния дисперсионных эволюций оптических импульсов на качество передачи данных в волоконно-оптических системах.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тихвинский В.О. Спектральная эффективность систем мобильной связи [Электронный ресурс] / В.О. Тихвинский, С.В. Терентьев, В.И. Минаев – Электронные данные. – Режим доступа: <https://refdb.ru/look/1684753.html> (Дата обращения 29.10.2017). – Название с экрана.
2. 20 Tbit/s transmission over 6860 km with sub-Nyquist channel spacing / J. Cai, C.R. Davidson, A. Lucero et al. // Journal of Lightwave Technology . – 2012. – Vol. 30. – P. 651–657.
3. Макаров Т.В. Когерентные волоконно-оптические системы передачи / Макаров Т.В. – Одесса: ОНАС им. А.С. Попова, 2009. – 220 с.
4. Методы уплотнения волоконно-оптических линий передачи [Электронный ресурс] – Электронные данные. – Режим доступа: <https://studfiles.net/preview/5450887/page:29/>. (Дата обращения 29.10.2017). – Название с экрана.
5. Скларов О.К. Волоконно-оптические сети и системы связи / Скларов О.К. – М.: СОЛОН-Пресс, 2010. – 272 с.
6. Скидин А.С. Преодоление паттерн-эффекта в оптоволоконных линиях связи с помощью адаптивного блочного кодирования / [А.С. Скидин, М.П. Федорук, А.В. Шафаренко, С.К. Турицын] // Дискретный анализ и исследование операций, (Июль–август 2010). – Том 17. – № 4. – С. 67–83.
7. Бурдин В.А. Компенсация хроматической дисперсии на регенерационных участках линий передачи сетей связи / Бурдин В.А. // ISSN 0013-5771 // Электросвязь. – 2006. – № 7. – С. 28– 33.
8. Юшко О.В. Математическое моделирование солитонных оптических линий связи на основе новых форматов и технологий передачи данных : дис. ... канд. ф-м. наук : 2016 / Юшко Олеся Викторовна. 1. ФГБУ Науки, Институт вычислительных технологий сибирского отделения РАН; научн. руков. Федорук М.П. – Новосибирск, 2016. – 134 с.
9. Agrawal G.P. Nonlinear fiber optics / Ed. by P. Kelly, I. Kaminov. – Academic Press, 2001. – 230 p.
10. Одегов Н.А. Косвенные измерения дисперсионных характеристик оптических импульсов методом динамического моделирования / Одегов Н.А. // Матеріали XVII наук.-техн. конф. [«Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах»], (Одеса, 8-13 червня 2017 р.). – Одеса. – С. 48–50.
11. Одегов Н.А. Тестовые сигналы и показатели в задачах исследования материальной дисперсии / Одегов Н.А. // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2017. – № 1. – С. 124–131.
12. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / Прудников А.П., Брычков О.А., Маричев О.И. – М: Наука, 1981. – 800 с.

REFERENCES:

1. Tihvinskij V.O. Spektral'naja effektivnost' sistem mobil'noj svjazi [Elektonnij resurs] / V.O. Tihvinskij, S.V. Terent'ev, V.I. Minaev – Elektronnyye dannye – Rezhim dostupa : <https://refdb.ru/look/1684753.html> (Data obraschenija 29.10.2017). Nazvanie s ekrana.
2. 20 Tbit/s transmission over 6860 km with sub-Nyquist channel spacing / J. Cai, C.R. Davidson, A. Lucero et al. // Journal of Lightwave Technology . – 2012. – Vol. 30. – P. 651–657.
3. Makarov T.V. Kogerentnyye volokonno-opticheskie sistemy peredachi / Makarov T.V. – Odessa: ONAS im. A.S. Popova, 2009. – 220 s.
4. Metody uplotnenija volokonno-opticheskij linij peredachi [Elektonnij resurs – Elektronnyye dannye – Rezhim dostupa : <https://studfiles.net/preview/5450887/page:29/> (Data obraschenija 29.10.2017). – Nazvanie s ekrana.
5. Skljarov O.K. Volokonno-opticheskie seti i sistemy svjazi / Skljarov O.K. – M.: SOLON-Press, 2010. – 272 p.
6. Skidin A.S. Preodolenie pattern-effekta v optovolonnyh linijah s pomosh'ju blochnogo kodirovanija / [A.S. Skidin, M.P. Fedoruk, A.V. Shafarenko, S.K. Turicyn] // Diskretnyj analiz i issledovanie operacij, (ijul' – avgust 2010). – Tom 17. – No 4. – P. 67–83.
7. Burdin V.A. Kompensacija hromaticheskij dispersii na regeracionnyh uchastkah linij peredschi setej svjazi / Burdin V.A. // ISSN 0013-5771 // Elektrosvjaz'. – 2006. – № 7. – P. 28– 33.
8. Jushko O.V. Matematicheskije modelirovanie solitonnyh opticheskij linij svjazi na osnove novyh formatov i tehnologij peredachi dannyh.: dis. ... kand. f-m. nauk : 2016 / Jushko Olesja Viktorovna; FGBU Nauki, Institut vychislitel'nyh tehnologij sibirskogo otdelenija RAN; nauchn. Rukov. Fedoruk M.P. – Novosibirsk, 2016. – 134 p.
9. Agrawal G.P. Nonlinear fiber optics / Ed. by P. Kelly, I. Kaminov. – Academic Press, 2001. – 230 p.
10. Odegov N.A. Kosvennye izmerenija dispersionnyh harakteristik opticheskij impul'sov metodom dinamicheskogo modelirovanija / Odegov N.A. // Materialy XVII nauk.-tehn. konf. [«Vymirjuval'na ta obchysljuval'na tehnika v tehnologichnyh procesah»], (Odesa, 8-13 chervnja 2017 r.). – Odesa. – P. 48–50.
11. Odegov N.A. Testovye signaly i pokazateli v zadachah issledovanija material'noj dispersii / Odegov N.A. // Naukovi praci ONAZ im. O.S. Popova. – 2017. – № 1. – S. 124–131.
12. Prudnikov A.P. Integraly i rjady. Elementarnye funkcii / Prudnikov A.P., Brychkov O.A., Marichev O.I. – M: Nauka, 1981. – 800 p.