

УДК 616.314.

Аналіз зусиль у системі імплантат–кістка з урахуванням дискретних геометричних параметрів різьби і механічних властивостей кісткових тканин

Analysis of Efforts in the Implant-bone in View of Thread Discreteness Geometrical Parameters and Mechanical Properties of Bone Tissue

Чуйко А.М.¹, к.техн.н.,

Угрин М.М.², к.мед.н., доц.

¹Український аналітично-дослідницький центр в галузі медицини М. Угриня «MARC-UA», Львів

²Львівський національний медичний університет ім. Данила Галицького

Chuiiko A.M.¹, Ugryn M.M.²

¹M. Ugryn Ukrainian Medical Analytical Research Centre, Lviv

²Danylo Halatskyi Lviv National Medical University

Адреса для кореспонденції:

Чуйко Анатолій Миколайович

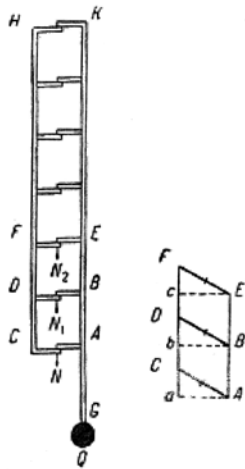
e-mail: tolya.chuiko@mail.ru

Мета: Розробити методику аналізу зусиль в системі імплантат–кістка з урахуванням дискретності як геометричних параметрів різьби (для конічних імплантів), так і механічних властивостей кісткових тканин, що оточують імплантат. **Методи:** Після порівняльного аналізу моделей різьби Жуковського і Бірґера–Йосилевича, розглянули з'єднання імплантат–кістка як багато разів статично невизначену систему. Отримали аналітичні вирази для зусиль у витках різьбового з'єднання типу болт–гайка стосовно системи імплантат–кістка. **Результати:** Отримано аналітичні вирази для зусиль при зсуві і вигині витків різьбового з'єднання болт–гайка стосовно системи імплантат–кістка з урахуванням дискретності геометричних параметрів (для конічної різьби) і механічних властивостей кісткових тканин, що оточують імплантат. Проведено порівняльний аналіз з класичними рішеннями для розрахункових випадків, коли дискретність параметрів не враховується. Проаналізовано зміну закону розподілу навантаження, коли модуль пружності знижується від витка до витка вглиб кістки. **Висновки:** Розроблена методика дозволяє провести аналіз зусиль в системі імплантат–кістка з урахуванням дискретності геометричних параметрів різьби (для конічних імплантів) і механічних властивостей кісткових тканин, які оточують імплантат.

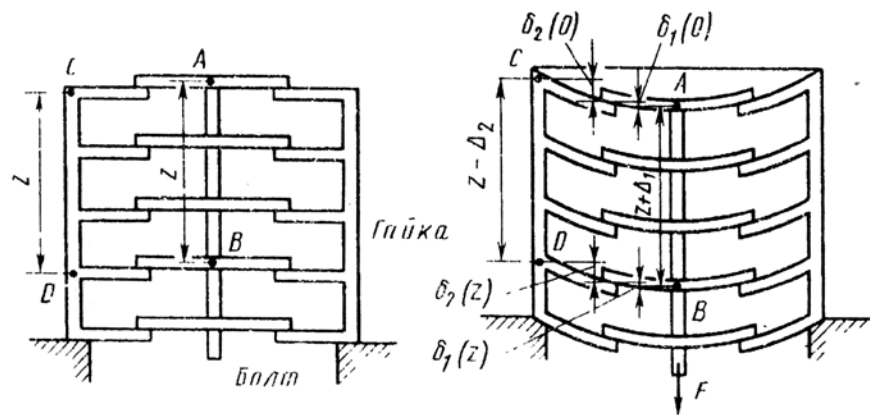
Ключові слова: різьбове з'єднання, зсув і вигин витків, гвинтовий імплантат, кісткова тканина, механічні властивості.

Purpose: To develop a method of analysis efforts in the implant-bone system based discrete as carving geometrical parameters (for conical implants) and mechanical properties of bone tissue surrounding the implant. **Methods:** After a comparative analysis of Zhukovsky and Birger-Iosylevich thread models, there was considered the implant-bone connection as multiple statistically uncertain system. Analytical expressions obtained for efforts coils threaded connection type bolt-nut system in relation to the implant-bone system. **Results:** The analytical expressions obtained for efforts in shear and bending turns threaded connection bolt-nut system in relation to the implant-bone system considering discrete geometric parameters (for conical threads) and mechanical properties of bone tissue surrounding the implant. A comparative analysis of classical solutions for settlement performed where discrete parameters not included. Analyzed the change of the distribution of the load rule, when the elastic modulus decreased from round to round deep into the bone. **Conclusions:** The methodic developed allows to analyze the efforts in bone-implant system based on discrete geometric parameters of thread (for conical implants) and mechanical properties of bone tissue surrounding the implant.

Key words: thread joint, shear and bending turns, screw implant, bone tissue, mechanical properties.



Мал. 1. Модель різьби Жуковського



Мал. 2. Модель різьби Біргера-Йосилевича

ВСТУП

Стаття продовжує цикл публікацій авторів [1, 2]. У статті [1] розглянуто 59 типів імплантів, доступних на ринку України, з урахуванням 20 показників (критеріїв), що характеризують конструктивні особливості та деякі органолептичні властивості. Цей огляд допоможе фахівцям краще орієнтуватися в пропозиціях ринку, але питання про підбір імплантів в кожному клінічному випадку залишається відкритим, оскільки немає рекомендацій щодо цього: довгий чи короткий, циліндричний чи конічний тощо. У статті [2] проведено порівняльний аналіз моделей різьби Жуковського і Біргера-Йосилевича, отримано аналітичні вирази для переміщень при вигині та зсуві витків різьби для нарізного з'єднання болт-гайка стосовно системи імплантат-кістка. Показано, що модель різьби Біргера-Йосилевича приблизно в 3-4 рази жорсткіша ніж реальний виток, який піддається зсуву і вигину. Проведений аналіз переміщень у мостоподібному протезі з опорою на імплантати, вказує на взаємозв'язок конструкції мостоподібного протеза, кількості імплантів (відстані між опорами), їх типорозміру (діаметр, довжина і тип різьби) і властивостей оточуючих імплантат кісткових тканин. Однак моделі різьби Жуковського та Біргера-Йосилевича в системі імплантат-кістка не дозволяють врахувати дискретність як геометричних параметрів (для конічних імплантів), так і механічних властивостей кісткових тканин, що оточують імплантат. Мета роботи – розробка методики аналізу напружено-деформованого стану кісткових тканин в системі імплантат-кістка з урахуванням дискретності як геометричних параметрів (для конічних імплантів), так і механічних властивостей кісткових тканин, що оточують імплантат.

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ РІЗЬБИ ЖУКОВСЬКОГО І БІРГЕРА-ЙОСИЛЕВИЧА

У статті [2] моделі різьби Жуковського і Біргера-Йосилевича проаналізовані досить докладно, але на деяких аспектах зупинимось додатково. Обидві моделі представлено на мал. 1 і 2. У моделі М.Є. Жуковського [3] (мал. 1) вертикальний стрижень АК моделює тіло болта (гвинта), а вертикальний стрижень СН – гайку. Горизонтальні виступи А, В, Е... і С, D, F... моделюють відповідно витки болта і гайки. Витки контактують у кінцевих точках, уся система нерухомо закріплена в точці С, а в точці G прикладена сила Q. При визначенні зусиль між витками N, N_1, N_2, \dots прийняті гіпотези: витки сприймають деформацію зсуву, а стрижні – деформацію розтягу-стиснення. Крім того, співвідношення зусиль у суміжних витках виражається у вигляді нескінченної неперервної дробу (ланцюговий дріб), яке при великій кількості витків буде постійною величиною. «Таким чином послідовний тиск (зусилля) в нашій задачі при великій кількості витків представляють спадну прогресію зі знаменником відношення q, яке визначається... квадратним рівнянням... Шуканий нами знаменник співвідношення є коренем меншим одиниці (1)»

$$q = 1 + \frac{\lambda}{2\Delta} - \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{2\Delta}\right)^2 - 1}, \quad (1)$$

де λ і Δ – параметри різьбового з'єднання, які визначаються за формулами (2), (3).

$$\lambda = \frac{h}{\omega E} + \frac{h}{\omega_1 E_1} \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{s}{\sigma g} + \frac{s_1}{\sigma_1 g_1} \quad (3)$$

У формулах (2), (3) відповідно до [3] прийняті позначення: h – крок різьби; s і s_1 – довжина виступів (висота профілів різьби); ω і ω_1 – площі перерізів правого та лівого стрижнів;

σ і σ_1 – площі основ виступів на правому та лівому стрижнях; E і E_1 – модулі пружності правого та лівого стрижнів; g і g_1 – коефіцієнти скошення (модулі зсуву) для прямих кутів. Індекс «1» у цих формулах стосується параметрів, які описують гайку. Тобто параметри λ та Δ виражають відповідно сумарну податливість тіл гвинта і гайки при розтягу–стисканні (2) та витків при зсуві (3). Величину зусилля у першому витку визначають за формулою

$$N = (1 - q)Q, \quad (4)$$

де всі позначення відповідають мал. 1.

Формула (4) може використовуватися для попереднього якісного аналізу. У техніці [4, 6] особлива увага приділяється зниженню навантаження на перший виток, з цією метою рекомендується ряд конструктивних рішень. Як впливає з (4) збільшення q зумовлює зменшення N – навантаження на перший виток. Тому якісний аналіз буде складатися з варіювання параметрів у виразах (1), (2) і (3). Слід також підкреслити, що в силу умови, що «... зусилля в суміжних витках виражається у вигляді нескінченної неперервної дробу (ланцюговий дріб), яке при великій кількості витків буде постійною величиною», формули (1–4) у принципі не можуть відобразити розподіл навантаження між витками з урахуванням їх кінцевого числа і дискретності як геометричних параметрів (для кінчної різьби), так і механічних характеристик.

У технічній літературі [4, 6], як правило, наводяться тільки підсумкові криві (мал. 3, 4), що характеризують розподіл навантаження між витками, без розрахункових формул і параметрів різьби. Як впливає з їх порівняння, характер розподілу навантаження у різних авторів може істотно відрізнитися. Переважно використовується крива, як на мал. 4, і в розрахунках на міцність першого витка приймається навантаження 34% (для з'єднання болт–гайка з різьбою М10, для якої існує 3 типорозміри кроку різьби і внутрішнього діаметра [6], що також будуть впливати на параметр q). За формулами (1–4) можна зробити деякі порівняльні розрахунки.

У роботах [5, 6] прийняті основні гіпотези роботи [3]: витки сприймають деформацію вигину і зсуву, а стрижні – деформацію розтягу–стиснення, отже потрібно «враховувати дефор-

мацію вигину і зсуву витків», а в розрахунковій формулі використано вираз для стиснення–розтягу кільця з параметрами витка. Модель різьби Біргера–Йосилевича приблизно в три–чотири рази жорсткіша, ніж реальний виток, який зазнає зсуву і вигину. Крім того, в [5, 6] різьбове з'єднання розглядається як з'єднання з безперервними витками, що дозволило застосувати диференціальні рівняння, розв'язок яких отримали в замкненій формі. Однак, як і в роботі [3], такий підхід не відображає розподілу навантаження між витками з урахуванням їх кінцевого числа і дискретності як геометричних параметрів (для кінчної різьби), так і механічних характеристик. Можливо, відмічені особливості моделей різьби в [3, 5, 6] не впливають на закони розподілу навантаження між витками різьби, але оскільки для розрахунку навантаження на імплантат [2] необхідно визначити переміщення (податливість) імплантатів максимально точно, можна зробити такі уточнення:

1. Крім деформації зсуву витків, враховувати і деформацію вигину [2].

2. Контакт витків здійснювати не в кінцевих точках, а по всій поверхні витків. З урахуванням пружної деформації витків і дзеркальності навантаження точки контакту будуть у середині висоти витка, що призводить до збільшення жорсткості при зсуві в 2 рази, а при вигині у 8 разів.

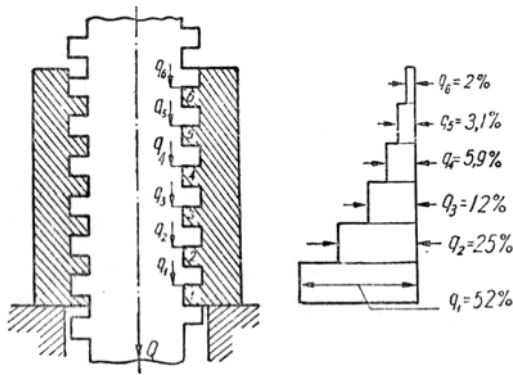
3. Витки не є прямокутною призмою (3), а кільцем, яке для болта жорстко закріплене по внутрішній торцевій поверхні, а для гайки – по зовнішній торцевій поверхні.

Розглянемо результати розрахунків за формулами (1)–(4), у яких варіювалися параметри різьби (діаметр болта), механічні властивості болта і гайки, точка контакту витків. Отримані результати можна використати при подальшому аналізі імплантатів.

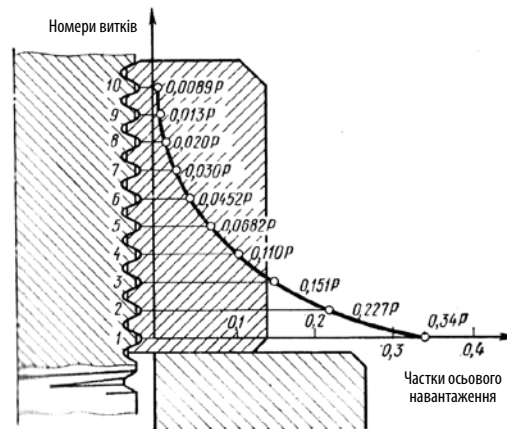
У табл. 1 наведені результати розрахунків навантаження на перший виток для різьбового з'єднання, в якому болт і гайка виготовлені з титану з діаметром різьби $d=2,8$ мм (імплантат Radix 51018) і стандартного болта $d=10$ мм. Збільшення діаметра болта, тобто жорсткості тіла болта, веде до зниження навантаження на перший виток. З іншого боку, перенесення розташування точки контакту в середину витка (збільшує жорсткість витка на зсув вдвічі) призводить до збільшення навантаження на перший виток, а збільшення висоти різьби

Таблиця 1. Результати розрахунків навантаження на перший виток залежно від діаметра різьби, висоти різьби і розміщення точки контакту

	$E_1 = E_2 = 1,1 \cdot 10^5$ МПа					
	$d=2,8$ мм, $d_1=1,975$ мм, $h=1,5$ мм		$d=10$ мм, $d_1=8,16$ мм, $h=1,5$ мм			
	$s=0,95$ мм	$s/2=0,475$ мм	$s=1,3$ мм	$s/2=0,65$ мм	$s=1,84$ мм	$s/2=0,92$ мм
λ , мм/Н	$0,29 \cdot 10^{-5}$	$0,29 \cdot 10^{-5}$	$0,3345 \cdot 10^{-6}$	$0,3345 \cdot 10^{-6}$	$0,3345 \cdot 10^{-6}$	$0,3345 \cdot 10^{-6}$
Δ , мм/Н	$0,43 \cdot 10^{-5}$	$0,215 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-6}$	$0,725 \cdot 10^{-6}$	$2,054 \cdot 10^{-6}$	$1,027 \cdot 10^{-6}$
q	0,451	0,333	0,622	0,513	0,67	0,57
N	0,549Q	0,667Q	0,378Q	0,487Q	0,33Q	0,43Q



Мал. 3. Схеми розподілу навантаження між витками різьби за [4]



Мал. 4. Схеми розподілу навантаження між витками різьби за [6]

приводить до зменшення навантаження на перший виток внаслідок зменшення жорсткості витків різьби. Очевидно, крива розподілу навантаження між витками (мал. 4) розрахована для параметрів у шостій колонці табл. 1.

Не менш цікаве варіювання механічних характеристик матеріалів болта і гайки. Припустимо, що гайка має модуль пружності близький до модуля пружності компактної кістки, а модуль пружності болта дорівнює модулю пружності титану (співвідношення 5,5) або хромокобальтового сплаву (співвідношення 10,5). За основу прийнято стандартний болт $d=10$ мм, а точка контакту розташована в середині витка, тобто порівнювати потрібно з п'ятою колонкою табл. 1.

За даними табл. 2 зниження жорсткості гайки (кістки) веде до рівномірнішого розподілу навантаження – навантаження на перший виток знижується, підвищення жорсткості болта (імплантату) сприяє ще рівномірнішому розподілу навантаження – навантаження на перший виток також знижується.

МЕТОДИКА АНАЛІЗУ ЗУСИЛЬ В СИСТЕМІ ІМПЛАНТАТ–КІСТКА З УРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ РІЗЬБИ І МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КІСТКИ

Суть запропонованої методики розглянемо на прикладі різьбового з'єднання з чотирма витками. По-перше, цієї

Таблиця 2. Результати розрахунків навантаження на перший виток залежно від модулів пружності тіла болта і гайки

	$E_1=E_2=1,1 \cdot 10^5$ МПа	$E_1=1,1 \cdot 10^5$ МПа $E_2=2 \cdot 10^4$ МПа	$E_1=2,1 \cdot 10^5$ МПа $E_2=2 \cdot 10^4$ МПа
λ , мм/Н	$0,3345 \cdot 10^{-6}$	$0,673 \cdot 10^{-6}$	$0,537 \cdot 10^{-6}$
Δ , мм/Н	$0,725 \cdot 10^{-6}$	$2,194 \cdot 10^{-6}$	$2,194 \cdot 10^{-6}$
q	0,513	0,58	0,613
N	0,487Q	0,42Q	0,387Q

кількості витків достатньо для виявлення суті методики, а подруге, при більшій кількості витків виконання розрахунків «вручну» трудомістке, оскільки правило Саррюса, використане нижче, для більшого числа витків не застосовується. В цьому випадку використовують пакет технічних обчислень типу Maple.

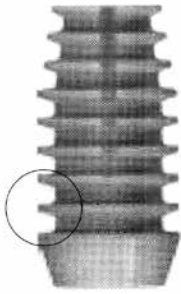
На мал. 5 представлений імплантат типу Vicon [1], а на мал. 6 – схема імплантату за умови, що різьба становить концентричні прямокутні витки, а імплантат оточений кісткою. Загалом, кожен виток має усереднені геометричні параметри, що ілюструється подвійною індексацією – перший індекс «1» або «2» вказує на приналежність до болта (імплантату) «1» або гайки (кістки) «2». Другий індекс 0,1,2,3... вказує на приналежність до витка, тобто параметри першого витка мають другий індекс «0», другого витка другий індекс «1» тощо. Така нумерація призводить до збігу номерів витків з номерами «зайвих» невідомих в статично невизначеній задачі (мал. 8).

Відповідно до робіт [3, 4] (мал.1, 2) приймаємо, що при дії навантаження витки, контактуючи в середніх точках витків (мал. 6), утворюють замкнуті комірки – рами (мал. 7). Плоска замкнута рама тричі статично невизначена [4, 6, 7], тобто ступінь статичної невизначеності (число «зайвих» зв'язків), у цій задачі можна визначити за формулою

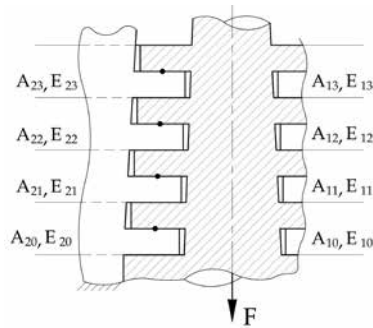
$$\text{ЧЛС} = 3(n-1), \quad (5)$$

де n – кількість витків.

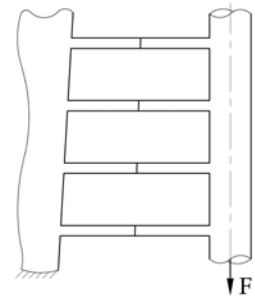
У плоскій системі в будь-якому перерізі діють три силових фактори – осьова сила N_i , поперечна сила Q_i і згинальний момент M_i , тобто до сторін перерізу слід докласти як «зайві» невідомі зазначені силові фактори N_i , Q_i і M_i (мал. 8). Ці силові фактори виражають взаємну дію обох частин системи один на одного в даному перерізі. Така система називається «основною системою» і є статично визначуваною. Для визначення силових факторів N_i , Q_i і M_i складають т. зв. канонічні рівняння, що виражають рівність нулю повних вза-



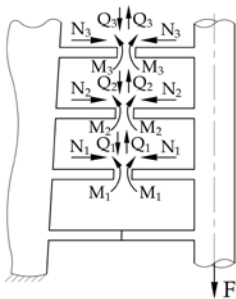
Мал. 5. Загальний вигляд імплантату типу Viscon [1]



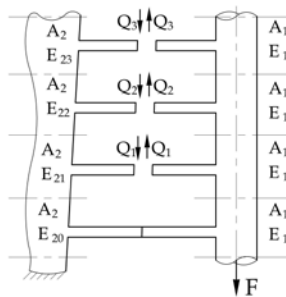
Мал. 6. Схема болта (імплантату) і гайки (кістки)



Мал. 7. Схема різьбового з'єднання у вигляді статично невизначеної системи



Мал. 8. Схема «зайвих» невідомих в статично невизначеній системі



Мал. 9. «Основна система» для різьбового з'єднання з чотирма витками

емних переміщень сторін перерізу за напрямками зайвих невідомих. У техніці [4, 6, 7] для балок і рам впливом нормальних і поперечних сил зазвичай нехтують і враховують лише дію згинальних моментів. У нашому випадку, з огляду на механічні особливості завдання і зважаючи на дані [3, 4], нехтуємо дією осьових сил N_i і згинальних моментів M_i , враховуючи тільки поперечні сили Q_i . Кількість «зайвих» невідомих в цьому випадку зменшується втричі і визначається за формулою (6)

$$\text{ЧЛС} = n - 1, \tag{6}$$

де n – кількість витків.

«Основна система» для цього розрахункового випадку представлена на мал. 9. Оскільки дослідження охоплює лише дискретність механічних властивостей кісткових тканин, що оточують циліндричний імплантат (мал. 9), на відміну від мал. 6, подвійну індексацію збережено тільки для модуля пружності кістки (гайки).

Система канонічних рівнянь для аналізованого випадку (мал. 9) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}Q_1 + \delta_{12}Q_2 + \delta_{13}Q_3 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}Q_1 + \delta_{22}Q_2 + \delta_{23}Q_3 + \Delta_{2F} &= 0, \\ \delta_{31}Q_1 + \delta_{32}Q_2 + \delta_{33}Q_3 + \Delta_{3F} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

де δ_{ik} – переміщення (податливість) від одиничної сили і у напрямку k ; Δ_{iF} – переміщення у напрямку i від зовнішніх сил F .

Коефіцієнти канонічних рівнянь визначають за формулами:

$$\delta_{ik} = \sum \left(\frac{\bar{N}_i \bar{N}_k l_i}{E_i A_i} + \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k l_i}{E_i J_i} + k \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k l_i}{G_i A_i} \right), \tag{8}$$

$$\Delta_{iF} = \sum \left(\frac{\bar{N}_i N_F l_i}{E_i A_i} + \frac{\bar{M}_i M_F l_i}{E_i J_i} + k \frac{\bar{Q}_i Q_F l_i}{G_i A_i} \right). \tag{9}$$

У формулах (8), (9) співмножники \bar{N}_i , \bar{M}_i і \bar{Q}_i є одиничними силовими факторами, що виникають від дії тільки «зайвої» невідомої – поперечної сили Q_i ; $E_i A_i$, $E_i J_i$, $G_i A_i$ – жорсткості елементів системи відповідно при розтягу-стисненні, вигині та зсуві, які є похідною модуля пружності E_i (або модуля зсуву G_i) на геометричну характеристику – площа поперечного перерізу A_i або момент інерції J_i , k – коефіцієнт форми, l_i – довжина елемента.

Силі фактори N_i та M_i не враховуються при переході від вихідної системи до «основної», а ці ж силі фактори, що виникають від дії «зайвої» невідомої поперечної сили Q_i в «основній системі» враховуються всі (8), (9).

Значення коефіцієнтів δ_{ik} і Δ_{iF} можна обчислювати або аналітично за інтегралом Мора, або графічно за правилом Верещагіна. В останньому випадку для наочності використаємо епюри від одиничних сил \bar{N}_i , \bar{M}_i і \bar{Q}_i (мал. 10). Порівняємо результати отриманих за формулами Жуковського (1–4) і пропонуваної методики для циліндричної різьби з постійними модулями пружності і без планованих уточнень. Коефіцієнти системи рівнянь (7) можна обчислити за формулами

$$\Delta_{iF} = -F \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right). \quad (10)$$

$$\delta_{11} = \left(\frac{s}{E_1 A_1} + \frac{s}{E_{21} A_2} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_1} + \frac{h}{G_{21} B_2} \right),$$

$$\delta_{12} = \left(\frac{s}{E_1 A_1} + \frac{s}{E_{21} A_2} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right),$$

$$\delta_{13} = \left(\frac{s}{E_1 A_1} + \frac{s}{E_{21} A_2} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right), \quad (11)$$

$$\delta_{22} = \left(2 \frac{s}{E_1 A_1} + \frac{s}{E_{21} A_2} + \frac{s}{E_{22} A_2} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right) + \left(\frac{h}{G_{21} B_2} + \frac{h}{G_{22} B_2} \right),$$

$$\delta_{23} = \left(2 \frac{s}{E_1 A_1} + \frac{s}{E_{21} A_2} + \frac{s}{E_{22} A_2} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right),$$

$$\delta_{33} = \left(3 \frac{s}{E_1 A_1} + \frac{s}{E_{21} A_2} + \frac{s}{E_{22} A_2} + \frac{s}{E_{23} A_2} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_{10}} + \frac{h}{G_{20} B_{20}} \right) + \left(\frac{h}{G_1 B_1} + \frac{h}{G_{23} B_2} \right).$$

У формулах (10), (11) прийняті позначення: s – крок різьби, h – висота різьби, B_i – площа основ витків для болта (імплантату) і гайки (кістки). Кожна складова у співвідношеннях (11) означає податливість тіла болта (імплантату), гайки (кістки) і витків різьби відповідно до схеми (мал. 9). З огляду на структуру співвідношень (7), (10) і (11), доцільно ввести множник $\bar{B} = \frac{s G (1/A_1 + 1/A_2)}{h E (1/B_{10} + 1/B_{20})}$, (12)

Для різьбового з'єднання з параметрами $s/h=1,5/1,3=1,154$, $G/E=1/2(1+\mu)=1/2,6=0,385$ і значеннями площ

$$A_1 = \pi(d)^2/4 = \pi(8,16)^2/4 = 52,296 \text{ мм}^2;$$

$$A_2 = \pi(D^2 - d^2)/4 = \pi(18,182 - 10^2)/4 = 181,27 \text{ мм}^2;$$

$$B_{10} = \pi d l s = \pi \cdot 8,16 \cdot 1,5 = 38,45 \text{ мм}^2;$$

$$B_{20} = \pi d s = \pi \cdot 10 \cdot 1,5 = 47,12 \text{ мм}^2$$

множник $\bar{B} = 0,231$. У цьому випадку систему рівнянь (7), після визначення значень коефіцієнтів, можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} 2,231 Q_1 + 1,231 Q_2 + 1,231 Q_3 &= F, \\ 1,231 Q_1 + 2,462 Q_2 + 1,462 Q_3 &= F, \\ 1,231 Q_1 + 1,462 Q_2 + 2,693 Q_3 &= F. \end{aligned} \quad (13)$$

За правилом Саррюса визначник системи рівнянь (13) дорівнює

$$D = 6,641. \quad (14)$$

Визначники з урахуванням неоднорідності системи рівнянь (13) дорівнюють

$$D_1 = 1,745, D_2 = 1,23, D_3 = 0,999. \quad (15)$$

За формулою Крамера корені рівняння (13) дорівнюють $Q_1 = 0,263F$, $Q_2 = 0,185F$, $Q_3 = 0,15F$. (16)

З умови рівноваги

$$Q_0 = 0,402F. \quad (17)$$

Система (13) дозволяє отримати значення Q_i для з'єднання з трьох і двох витків. Для трьох витків

$$Q_0 = 0,44F, Q_1 = 0,309F, Q_2 = 0,251F. \quad (18)$$

Для двох витків

$$Q_0 = 0,552F, Q_1 = 0,448F. \quad (19)$$

Порівняння даних при чотирьох (16), (17), трьох (18) і двох витках (19) показує, що в міру зменшення кількості витків збільшується навантаження на кожен виток. Це слід враховувати при підборі імплантатів залежно від їх довжини. У роботі [5] відображені якісні особливості завдання – якщо тіло болта і тіло гайки абсолютно жорсткі (при розтягу–стисненні), то навантаження між витками буде розподілятися рівномірно. Аналогічний висновок випливає з системи рівнянь (13), яка буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} 2Q_1 + 1Q_2 + 1Q_3 &= F, \\ 1Q_1 + 2Q_2 + 1Q_3 &= F, \\ 1Q_1 + 1Q_2 + 2Q_3 &= F. \end{aligned} \quad (20)$$

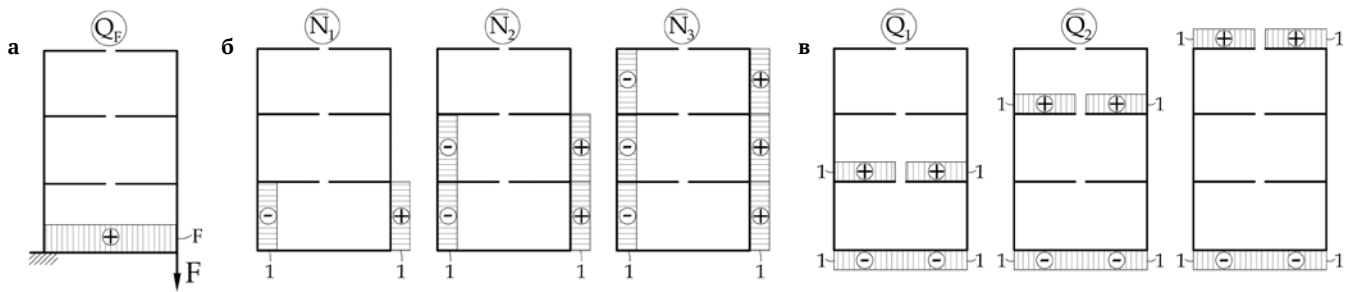
Легко показати, що визначник системи рівнянь (20) дорівнює $D=4$, $D_1=1$, навантаження на кожен виток $Q_i=0,25 F$. Аналогічно, при трьох витках $Q_i=0,333F$ і двох витках $Q_i=0,5 F$. Безпосереднє порівняння результатів за методикою М.Є. Жуковського [3] і за запропонованою методикою (при чотирьох витках) неможливе, так на мал. 4 навантаження розподілено на 10 витків. Тому умовно «довантажимо» перші три і чотири витки залишковим навантаженням пропорційно їх несучій здатності – третя і четверта колонки табл. 3.

Порівняння даних таблиці показує, що результати за запропонованою методикою корелюють з результатами за методикою М.Є. Жуковського, тобто, коли дискретність параметрів не враховується.

Після порівняльного аналізу проведемо дослідження для циліндричного різьбового з'єднання з урахуванням контакту витків у середній точці і впливу вигину витка. За роботою [2], у наближеному вирішенні будемо вважати, що зовнішня сила F , що діє на зовнішню кромку гвинта, розподілена по

Таблиця 3. Результати розрахунку навантаження на витки за методикою М.Є. Жуковського і за запропонованою методикою

Витки	За методикою М.Є. Жуковського [3]			За запропонованою методикою	
	% Р за мал. 2	3 витки	4 витки	3 витки	4 витки
1	0,34	0,47	0,410	0,44	0,402
2	0,227	0,316	0,274	0,309	0,263
3	0,151	0,210	0,182	0,251	0,185
4	0,110		0,132		0,15
Σ	0,828	0,996	0,998	1,0	1,0



Мал. 10. Епюри при дії зовнішнього навантаження (а) і одиничних силових факторів (б, в)

поверхні витка рівномірно у вигляді тиску p або погонного зусилля q , тобто $F = \pi d^2 h p = qh$. Цю силу, як і вище, докладаємо в середній точці витка (мал. 6). Переміщення цієї точки при зсуві і вигині можна обчислити за формулами:

$$\Delta_G = \frac{Fh}{2GB}, \quad \Delta_M = \frac{F(\frac{h}{2})^3}{3EJ}, \quad (21)$$

а сумарне переміщення (відносно зсуву) за формулою

$$\Delta_z = \frac{Fh}{2GB} \left[1 + 4 \frac{G}{E} \left(\frac{h}{s} \right)^2 \right]. \quad (22)$$

При виведенні співвідношення (22) враховано, що для прямокутної різьби висота основи витка дорівнює $s/2$. При прийнятих вище параметрах

$$4 \frac{G}{E} \left(\frac{h}{s} \right)^2 = 4 \cdot 0,385 \cdot 0,752 = 1,158,$$

тобто, облік переміщень від вигину збільшує переміщення відносно зсуву в 1,158 рази. Тому всі складові у співвідношеннях (10), (11), що відображають зсув, слід помножити на 2,158 або в підсумковому виразі розділити на 1,079. Тоді, спростивши обчислення, отримаємо

$$\bar{B} = \frac{s G (1/A_1 + 1/A_2)}{h E (2/B_{10} + 2/B_{20})} = \frac{1,154}{1,079} 0,385 \cdot 0,26 = 0,107.$$

Система рівнянь розв'язку для трьох витків матиме вигляд $2,107Q_1 + 1,107Q_2 = F$.

$$1,107Q_1 + 2,214Q_2 = F. \quad (23)$$

Визначник системи рівнянь (23) дорівнює $D = 3,44$, $D_1 = 1,107$, $D_2 = 1$. Навантаження на витки відповідно становить – $Q_0 = 0,388F$, $Q_1 = 0,321F$ і $Q_2 = 0,291F$. Порівняння з даними

п'ятого стовпчика табл. 3 показує, що облік переміщень внаслідок вигину витка веде до рівномірнішого розподілу навантаження через збільшення податливості кожного витка. Далі розглянемо розрахунковий випадок, коли при імплантаті, виготовленому з титану, гайка (кістка) має модуль пружності близький до модуля пружності кортикальної кістки ($E_2 = 2 \cdot 10^4$ МПа), а потім модуль пружності кістки зменшується від витка до витка відповідно – $E_{20} = 2 \cdot 10^4$ МПа, $E_{21} = 0,75E_{20}$, $E_{22} = 0,5E_{20}$ (табл. 4).

На підставі аналізу отриманих результатів доходимо таких висновків, що облік переміщень внаслідок вигину витка (порівняно з даними п'ятого стовпчика табл. 3) веде до рівномірнішого розподілу навантаження – через збільшення податливості кожного витка. Для різьбового з'єднання, коли болт і гайка виготовлені з металу, розподіл навантаження по витках наближений до класичного розподілу (мал. 4), але залежить від кількості витків у з'єднанні. Зниження жорсткості гайки (кістки) сприяє рівномірнішому розподілу навантаження – навантаження на перший виток знижується (табл. 2 третя колонка і табл. 4 третя колонка). Зниження модуля пружності гайки (кістки), коли модуль пружності знижується від витка до витка (четверта колонка табл. 4), приводить до істотного перерозподілу навантаження між витками. Через зниження жорсткості глибших витків їх несуча здатність знижується і навантаження передається на верхні витки. Це положення слід враховувати як при розрахунку на міцність першого витка, так і глибше розташованих витків.

Витки	$E_1 = 1,1 \cdot 10^5$ МПа		
	$E_1 = E_2 = 1,1 \cdot 10^5$ МПа	$E_2 = 2 \cdot 10^4$ МПа	$E_{20} = 2 \cdot 10^4$ МПа, $E_{21} = 0,75E_{20}$, $E_{22} = 0,5E_{20}$
0	0,388	0,35	0,466
1	0,321	0,33	0,337
2	0,291	0,32	0,217
Σ	1,0	1,0	1,0

Таблиця 4. Результати розрахунку навантаження на витки за пропонованою методикою при зменшенні жорсткості гайки (кістки) від витка до витка

ВИСНОВКИ

Розроблена методика дозволяє провести аналіз зусиль в системі імплантат–кістка з урахуванням дискретності геометричних параметрів різьби (для конічних імплантатів) і механічних властивостей кісткових тканин, які оточують імплантат. Особливо слід підкреслити істотну зміну закону розподілу навантаження, коли модуль пружності знижується від витка до витка в глибину кістки.

Попередній аналіз показав, що довжина імплантату може бути обґрунтована з урахуванням даних комп'ютерної томо-

графії – довжина імплантату більша від товщини кортикального шару є нераціональною. Методика дозволяє провести чисельний аналіз будь-якого клінічного випадку. Для імплантату з конічною різьбою можливий аналіз з передачею навантаження на глибше розташовані витки, у ділянку, де міцність і жорсткість кістки може бути значно нижчою. Виникає класична задача оптимізації системи з можливістю чисельного аналізу будь-якої конструкції імплантату. З метою розвитку методики слід проаналізувати, для розрахункового випадку більш характерного імплантату, коли він сприймає зусилля стиснення і для трикутної різьби.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Системи імплантатів. Огляд ринку України // Імплантологія Пародонтологія Osteологія. – 2016, №1. – С. 69–86.
2. Чуйко А.М., Угрин М.М. Розрахунок переміщень гвинтових імплантатів та мостоподібних протезів з опорою на імплантати // Імплантологія Пародонтологія Osteологія. – 2016, Ч. 1, №1, С. 24–30. Ч. 2, №2, С. 64–70.
3. Жуковский Н.Е. Распределение давлений на нарезках винта и гайки. Бюллетень Политехнического общества, №1, 1902, С. 50–54 (см. Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений в 16 т., том. 8).
4. Добровольский В.А. Детали машин. – К.: ГИТЛ Украины, 1950. – 784 с.: илл.
5. Биргер И.А. Расчет резьбовых соединений. Оборонгиз, 1951г. – С. 164.
6. Иосилевич Г.Б. Детали машин: учебник для студентов машиностр. спец. вузов. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.: илл.
7. Сопrotивление материалов / Под общей ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. – Вища школа, 1973. – 672 с.
8. Чуйко А.Н., Угрин М.М., Левандовский Р.А., Калиновский Д.К., Алымбаев Р.С. Биомеханика и компьютерные технологии в челюстно-лицевой ортопедии и дентальной имплантологии. – Львов: ГалДент, 2014. – 350 с., 408 илл.

REFERENCES

1. *Implantologiya Parodontologiya Osteologiya* (2016). №1, S. 69–86 (in Ukrainian).
2. Chuiiko, A.M., Ugrin, M.M. (2016). *Implantologiya Parodontologiya Osteologiya*, Ch. 1, №1, S. 24–30. Ch. 2, №2, S. 64–70 (in Ukrainian).
3. Zhukovskij, N.E. (1902). *Polnoe sobranie sochinenij v 16 tomah*, tom. 8) (in Russian).
4. Dobrovolskij, V.A. (1950). *Detali mashin*, 784 s. (in Russian).
5. Birger, I.A. (1951). *Raschet rez'bovyh soedinenij*, s.164 (in Russian).
6. Iosilevich, G.B. (1988). *Detali mashin*, 368 s. (in Russian).
7. *Soprotivlenie materialov* (1973). Pod obshhej red. Akad. AN USSR G.S. Pisarenko, 672 s (in Russian).
8. Chujko, A.N., Ugrin, M.M., Levandovskij, R.A., Kalinovskij, D.K., Alymbaev, R.S. (2014). *Biomehanika i komp'yuternye tehnologii v cheljustno-licevoj ortopedii i dental'noj implantologii*, 350 s. (in Russian).

Стаття надійшла в редакцію 20 вересня 2016 року