АЙВАЗЯН Э.И.,
главный специалист Национального института образования МОН Республики Армения, доцент Ереванского государственного университета, кандидат педагогических наук, доцент

УДК 372:51 + 378

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЪЕКТА (ОТНОШЕНИЯ)

В статье обсуждаются особенности применения метода конструирования при доказательстве утверждений (фактов) из курсов геометрии и алгебры основной школы Республики Армения.

Ключевые слова: доказательство, метод конструирования.

У статті обговорюються особливості застосування методу конструювання при доказі тверджень (фактів) із курсів геометрії та алгебри основної школи Республіки Вірменія.

Ключові слова: доказ, метод конструювання.

In the article the features of application of method of constructing at proofs of existence of object (facts) from the courses of geometry and algebra of basic school of Republic Armenia.

Keywords: proof, method of constructing.

Одним из важнейших способов доказательства является метод доказательства существования объекта (отношения). В работе [2] нами было выявлено, что в процессе доказательства существования объекта или отношения применяется своеобразный комплекс методов доказательства – метод конструирования.

Метод (комплекс) конструирования имеет очень широкую сферу применяемости не только в геометрии, но и в остальных математических, а также в естественных и общественных науках [2, с. 29]. Метод конструирования не имеет определенной логической конструкции. Определенно можно сказать, что доказательства, выполняемые этим методом, состоят из двух этапов: а) конструирования искомого объекта, и б) доказательства того факта, что «построенный» таким образом объект является тем, существование которого требуется обосновать.

Для иллюстрации сказанного обратимся к примерам применения метода конструирования при доказательстве утверждений (фактов) из курсов геометрии и алгебры основной школы.

1. Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB [7].

Процесс доказательства сведется к последовательности шагов, опирающихся на некоторые положения, статус которых может быть явно указан. Таким образом, будем иметь следующее.

Конструирование

1. Пусть AB – данная прямая и C, не лежащая на ней точка (условие).

Построим прямую AB и точку вне прямой (рис. 1, а).

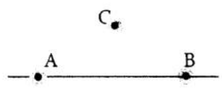

Рис. 1, а)

2. Две точки A и C однозначно задают (определяют) прямую AC (аксиома I2). Построим ее (рис. 1, б).
3. Прямая AC разбивает плоскость на две полуплоскости (аксиома II2).
4. Точка B лежит на одной из них (следствие 3).

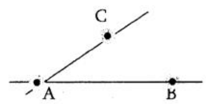

Рис. 1, б)

5. Отложим от полупрямой CA в другую полуплоскость угол ACD, равный углу CAB (аксиома IV2, рис. 1, в).
6. Тогда прямые AB и CD являются параллельными (рис. 1, г).

Доказательство

7. В самом деле, для этих прямых и секущей AC углы BAC и DCA внутренние накрест лежащие (подведение под понятие «внутренние накрест лежащие углы»).
8. Так как они равны (по построению),

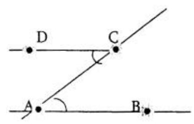

Рис. 1, в)

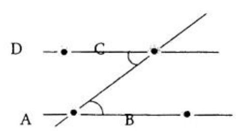

Рис. 1, г)

9. то по теореме 4.2 прямые AB и CD параллельны (7, 8 – подведение под теорему 4.2).

2. Существует ли обыкновенная дробь со знаменателем, равным 20, которая принадлежит промежутку $\left(\frac{4}{13}; \frac{5}{13}\right)$? [5, с. 260].

Решение.

Конструирование

1. Допустим $\frac{x}{20} \in \left(\frac{4}{13}; \frac{5}{13}\right)$, где $x \in \boldsymbol{N}$.
2. Следовательно $\frac{4}{13} < \frac{x}{20} < \frac{5}{13}$.
3. Иначе говоря, будем иметь: $\frac{4 \cdot 20}{13 \cdot 20} < \frac{x \cdot 13}{20 \cdot 13} < \frac{5 \cdot 20}{13 \cdot 20}$.
4. Откуда получаем, что 80<13x<100.
5. Значит $\frac{80}{13} < x < \frac{100}{13}$,
6. то есть $6\frac{2}{13} < x < 7\frac{9}{13}$,
7. откуда следует, что x=7, поскольку $x \in \boldsymbol{N}$.
8. Следовательно, искомая дробь равна $\frac{7}{20}$.

Доказательство

9. Действительно $\frac{4}{13} < \frac{7}{20}$, поскольку 4·20<13·7;
10. Аналогично $\frac{7}{20} < \frac{5}{13}$, поскольку 7·13<5·20.
11. Таким образом $\frac{4}{13} < \frac{7}{20} < \frac{5}{13}$.

Это доказательство существования методом конструирования. Этим же методом решается также следующая задача.

3. Число диагоналей выпуклого многоугольника определяется формулой $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, где n – число сторон многоугольника и n>4. Существует ли многоугольник, у которого число диагоналей равно 9, 14? Число диагоналей каких многоугольников не больше 20?» [5; 8, с. 39].

Простейшим примером применения метода конструирования является доказательство существования разности, которое в учебнике [73, с. 120] изложено следующим образом:

Доказательство	*Аргументы*
a, b	выражения
(a + (–b))+ b = a +((– b) + b)= a + 0 = a	сочетательный закон сложения; свойство сложения противоположных чисел; закон сложения с 0
(a +(–b)) + b = a	транзитивный закон равенства
a + (–b) = a – b	определение разности
a – b = a + (–b)	закон симметричности равенства

Первая фаза метода конструирования – «конструирование» входит в формулировку свойства: «Выражение разности через сумму и противоположное», то есть, «a – b = a + (–b)».

Таким образом x = a + (–b) как раз и есть тот искомый объект, существование которого и необходимо доказать. А вышеизложенная цепочка умозаключений является доказательством того, что (a + (–b)) является тем выражением, которое равно разности (a – b).

4.Свойство существования и единственности частного. Существует единственное частное двух выражений, если только второе выражение отличное от нуля. Причем, если данные выражения a и b, то $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ [6, с. 219].

	Доказательство	Аргументы
Доказательство существования	a, b	выражения, b ≠ 0
	$\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right)$ = a·1 = a	сочетательный закон умножения; определение обратного выражения, свойство умножения на 1
	$a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a$	транзитивный закон равенства
	$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$	определение отношения
Доказательство единственности	a, b	выражения, b ≠ 0
	x = a : b	предположение
	x b = a	
	$x = a \cdot \frac{1}{b}$	определение частного как решение уравнения x b = a

В данном доказательстве выделяются следующие фазы: 1) конструирование: если a и b данные выражения и b ≠ 0, то $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ (входит в формулировку теоремы); 2) доказательство равенства $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ и 3) доказательство его единственности.

Обратим внимание на одно важное обстоятельство, которое заключается в том, что алгебраические доказательства являются гораздо более конструктивными, чем геометрические. Действительно доказанное равенство a – b = a + (–b) является не только доказательством существования разности, но и единственности (поскольку сумма a + (–b) единственна). Фактически в данной ситуации еще раз обращаться к доказательству единственности нет никакой необходимости.

Анализ математических доказательств показывает, что доказательство методом конструирования начинается с конструирования объекта и заканчивается доказательством, т. е. обоснованием того, что полученный объект действительно принадлежит данному, определенному условием теоремы (задачи), классу объектов. При этом обычным для школьного курса математики способом доказательства этого факта является «подведение под понятие» (проверка выполнимости свойств, характеризующих данное понятие, проводимая синтетическим методом).

Исходя из сказанного, можно отметить, что: метод конструирования = [конструирование объекта] + [синтетический метод].

«Элементы методов, входящих в любую совокупность в процессе доказательств (решений) теорем (задач), выступают как элементы целой системы. Тем более в конкретных ситуациях, т.е. при доказательствах конкретных теорем или при решениях конкретных задач учащимися в основном не воспринимается, не осознается применение отдельных (особенно, вспомогательных) методов. Даже в методической литературе некоторые авторы путают метод исключения с методом «от противного». И поэтому вся совокупность методов и общий набор их элементов воспринимаются как некая совокупность знаний и умений, образующих одно целое, т.е. комплекс доказательных знаний и умений» [3, с. 585].

Из сказанного следует, что в обязательные результаты обучения методам доказательств, кроме синтетического метода, должно быть включено усвоение учащимися следующей конструкции рассмотренного комплекса – конструирование объекта (отношения). При этом учащиеся должны понимать способ соединения этой конструкции с синтетическим методом или с конструированием объекта в проводимом доказательстве.

Под конструированием объектов, как было сказано, мы понимаем в первую очередь доказательства теорем существования, хотя многие исследователи считают конструирование обязательной частью прямого доказательства, понимая под ним создание чертежа в качестве вспомогательного средства. В научно-методической литературе вопрос о необходимости чертежа к задаче или теореме для их успешного решения является спорным и неразрешенным до сих пор. Одни математики (например, Ж. Дьедонне) считают, что чертеж только приносит вред геометрии [4], а другие (А.Д. Александров и др.) наоборот, считают, что «геометрический метод и состоит в том, что само логическое доказательство или решение задач направляется наглядным представлением: лучше всего, когда доказательство или решение, можно сказать, видно из наглядной картины. (В старинных индийских сочинениях бывало так, что доказательство сводилось к чертежу, подписанному одним словом «Смотри!») ... К тому же подходу должен быть приучен и ученик – начинать с рисунка, с наброска, наглядного описания» [1, с. 58].

Однако, в этом плане вопрос о чертеже сводится к проблеме наглядности и не является предметом нашего исследования.

Список источников:

1. Александров, А.Д. О геометрии [Текст] / А.Д. Александров // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 56-63.
2. Айвазян, Э.И. Планирование обязательного уровня усвоения методов доказательств геометрических утверждений: дис. ... канд. пед. наук: [спец.] 13.00.02 [Текст] / Э.И. Айвазян; НИИ СиМО АПН СССР. – М., 1986, – 153 с.
3. Большая советская энциклопедия [Текст] – М.: Советская энциклопедия, 1973. – Т. 12. – 623 с.
4. Дьедонне, Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия [Текст] / Ж. Дьдонне. [пер. с франц. Г.В. Дорофеева]. Под ред. И.М. Яглома. – М.: Наука, 1972, – 335 с.
5. Макарычев, Ю.Н. Алгебра 6, 7, 8 (в трех книгах) / Ю.Н. Макарычев [и др.]. – Ереван: Луйс, 1983.
6. Микаелян, Г.С. Алгебра-6 / Г.С. Микаелян. – Ереван: Гай Эдит, 1999. – 287 с.
7. Погорелов, А.В. Элементарная геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1977. – 279 с.