

УДК 519.254:519.6:519.674

## ПРОСТОРОВЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ ВМІСТУ КОНЦЕНТРАЦІЇ ГІДРОХІМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ПИТНОЇ ВОДИ

*Ю. М. Архангельська*, канд. техн. наук, доц.

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,

*П. О. Приставка*, д-р техн. наук, проф., *О. Г. Чолишкіна*, канд. техн. наук, доц.

Національний авіаційний університет

og16@mail.ru

*Запропоновано опис побудови тематичних цифрових карт з використанням методу головних компонент, процедури регуляризації даних та використання лінійних комбінацій B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому двох змінних.*

**Ключові слова:** B-сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому, територіальний гідрохімічний моніторинг, питна вода.

*A description of the method construction of thematic digital maps using the method of principal component analysis, the procedure of regularization of data and the use of linear combinations of B-splines interpolation close to the average of two variables.*

Keywords: territorial hydrochemical monitoring, geoinformation system, drinking-water.

### Постановка проблеми

Під час проведення аналізу даних територіального гідрохімічного моніторингу (ТГХМ) візуальне відображення інформації у вигляді тематичних цифрових карт підвищує оперативність прийняття рішень для оцінювання стану питної води (ПВ) порівняно з витратою часу аналізу даних у числовому вигляді.

Картографічне відображення в більшості випадків дає інформацію лише в конкретній точці, наприклад у точці водозабору, але не дає загальної оцінки зміни концентрації речовин на території, що аналізується. В результаті цього постає завдання побудови математичних моделей поверхонь для представлення тематичних карт.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій, у яких розпочато вирішення даної проблеми

Сьогодні в геоінформації для представлення різних поверхонь, зокрема рельєфу, застосовуються дві основні моделі. По-перше, це регулярна сітка точок (GRID) або матричне представлення рельєфу. По-друге, триангуляційна модель (TIN) побудована за нерегулярною сіткою вузлів. Обидві моделі мають свої переваги та недоліки, тому вибір моделі, що застосовується, залежить від конкретної ситуації. Триангуляційна модель являє собою систему трикутників (що не перетинаються), які опираються своїми вершинами на нерегулярно розташовані на земній поверхні точки [13]. Площини трикутників апроксимують рельєф місцевості. Відмінною особливістю та перевагою триангуляційної моделі є те, що в ній відсутні перетворення початкових даних, що не дає використовувати такі моделі для докладного

аналізу. Істотний недолік методу полігонального моделювання полягає в тому, що для одержання досить гладкої поверхні необхідно створити величезну кількість багатокутників.

Під час побудови поверхонь за даними, заданими на регулярній сітці вузлів, сучасні ІС використовують методи, побудовані на параметричному представленні поверхні, а саме методи, що ґрунтуються на використанні сплайн-операторів [4, 5]. B-сплайни є найбільш уживаними в обчислювальних методах порівняно з іншими математичними конструкціями, використовуваними для опису складних геометричних форм, сплайни володіють трьома важливими перевагами [6]: по-перше, кращими апроксимативними властивостями, що при рівних інформаційних витратах дає більшу точність або рівну точність при менш інформативних вихідних даних; по-друге, простотою реалізації отриманих на їхній основі алгоритмів на ЕОМ і по-третє — універсальністю, що дозволяє використати ті самі апроксимуючі конструкції для різних геометричних об'єктів.

Слід зазначити, що з-поміж усіх представлених поверхонь, поверхні на основі B-сплайнів мають таку корисну властивість: ці поверхні можуть містити пласкі області та лінії різкого порушення гладкості, що дає більш гнучкі можливості при конструюванні. Однак використання B-сплайнів, інтерполяційних у середньому для побудови поверхонь має недолік, а саме: побудова багатовимірних моделей здійснюється лише на регулярній рівномірній сітці, що містить усі вказані вище дані. Але на цій прямокутній області існують частини, в яких немає точок спостережень і ці області не слід враховувати при відтворенні поверхонь.

У зв'язку з цим, було поставлене завдання усунути зазначений недолік для побудови більш точних моделей. Вирішення вказаного завдання наведено в праці [9].

### Постановка завдання

У зв'язку з тим, що візуальне відображення інформації у вигляді тематичних карт підвищує оперативність прийняття рішень для оцінювання стану питної води порівняно з витратою часу аналізу даних у числовому вигляді та дозволяє оцінити санітарно-гігієнічну обстановку довкілля з можливістю контролю і локалізації забрудненої території, в даній статті запропоновано опис методу побудови тематичних карт за даними ТГХМ ПВ на основі методу побудови поверхонь за непараметричною оцінкою двовимірної функції регресії.

### Основний матеріал

Для підвищення адекватності непараметричної оцінки двовимірної функції регресії розроблено метод побудови поверхонь на основі методу

- Етап 1.** Відтворення площини двовимірної лінійної регресії за рядом реалізації об'єкта спостережень (1).
- Етап 2.** Лінійне (координатне) перетворення реалізації об'єкта відносно площини двовимірної лінійної регресії.
- Етап 3.** Формування тривимірного ряду за рівномірним розбиттям та новою реалізацією об'єкта (регуляризація даних).
- Етап 4.** Непараметрична оцінка двовимірної функції регресії за допомогою поліноміальних сплайнів на основі  $B$ -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому.
- Етап 5.** Повернення до початкової реалізації об'єкта.

Як математичний апарат непараметричної оцінки двовимірної функції регресії було обрано локальні поліноміальні сплайни на основі  $B$ -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому від двох змінних другого порядку нульового та першого ступеня уточнення. Нехай задано два розбиття  $\Delta_{h_x}, \Delta_{h_y}$  осей  $X, Y$  точками  $x_i = ih_x, i \in Z, h_x > 0, y_j = jh_y, j \in Z, h_y > 0$ , відповідно до яких задається розбиття  $\Delta_{h_x, h_y}$  дійсної площини  $R_2$ , визначеної сіткою вузлів  $x_i = (i + 0,5)h_x, y_j = (j + 0,5)h_y, i, j \in Z, h_x, h_y > 0$ .

Також у вузлах розбиття  $\Delta_{h_x, h_y}$  задано значення деякої гладкої функції  $g(x, y) \in C^{r, r}$  від двох змінних. Тоді сплайн  $S_{2,0}(g, x, y)$ , близький до інтерполяційних у середньому, можна подати в загальному вигляді:

головних компонент (МГК), процедури регуляризації даних та використанні лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Цей метод є основою для побудови тематичних карт за даними територіального гідрохімічного моніторингу питної води.

Опис методу побудови поверхонь наведено нижче.

Нехай задано об'єкт спостереження, який характеризується трьома ознаками  $X, Y, G$ , а реалізації об'єкта — трійки дійсних чисел

$$\Omega_{3,N} = \{(x_l, y_l, g_l), l = \overline{1, N}\}, \quad (1)$$

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}], y \in [y_{\min}, y_{\max}], g \in [g_{\min}, g_{\max}],$$

де  $x, y$  — координати точок водозабору ПВ;  $g$  — концентрація гідрохімічного показника питної води (ГХП ПВ);  $l$  — кількість водозаборів ПВ.

Необхідно знайти оцінку  $\hat{g}(x, y)$  залежності  $\bar{g}(x, y) \in C^{r/2}, r_1, r_2 = 2, 3, \dots$

Побудова поверхонь складається з таких етапів.

$$S_{2,0}(g, x, y) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} g_{i,j} B_{2,h_x}(x - ih_x) B_{2,h_y}(y - ih_y), \quad (2)$$

де  $B_{2,h}(\bullet)$  —  $B$ -сплайн на розбитті  $\Delta_h$ .

Варто зауважити, що у зв'язку з потребою проведення регресійної оцінки, бажаним є використання сплайн-апроксимації зі згладжувальними властивостями, як таких, що надають близьку до регресійної оцінку усередненого значення функції спостереження. На сьогодні серед локальних комбінацій  $B$ -сплайнів найбільші властивості до згладжування мають лінійні поліноміальні сплайни на основі  $B$ -сплайнів п'ятого порядку [7]:

$$S_{5,0}(p, t, q) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} B_{5,h_t}(t - ih_t) B_{5,h_q}(q - jh_q) p_{i,j}, \quad (3)$$

де (з точністю до аргументу)  $B_{5,h}(t)$  має вигляд:

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h; 3h], \\ \frac{1}{120} \left(3 + \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h; -2h], \\ -\frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [-2h; -h], \\ \frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h; 0], \\ -\frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0; h], \\ \frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [h; 2h], \\ \frac{1}{120} \left(3 - \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h; 3h]. \end{cases}$$

Оцінка якості апроксимації в даному випадку визначається співвідношенням:

$$\|p(t, q) - S_{5,0}(p, t)\| \leq \frac{7h_t^2}{24} \|p''_t(t, q)\| + \frac{7h_q^2}{24} \|p''_q(t, q)\| + \frac{49h_t^2 h_q^2}{576} \|p''_{t^2 q^2}(t, q)\| + \varepsilon \|p\| + O(h^4).$$

Як лінійне (координатне) перетворення реалізації об'єкта (1) запропоновано процедуру перетворення за допомогою МГК.

Ефективність застосування запропонованого методу побудови по-верхонь доведено обчислювальними експериментами на основі імітаційного моделювання, а також обробкою реальних даних ТГХМ ПВ у праці [9].

Процес побудови тематичних карт за даними територіального гідрохімічного моніторингу питної води за використанням запропонованого методу складається з таких етапів:

1. Побудова цифрової моделі рельєфу місцевості, що досліджується.

2. Побудова поверхні концентрації ГХП ПВ з прив'язкою до місцевості.

3. Накладання поверхні концентрації ГХП ПВ на поверхню моделі рельєфу місцевості.

Побудова цифрової моделі рельєфу місцевості Дніпропетровського району була здійснена за допомогою системи «RastToDTM» [1], використовуючи растрове зображення рельєфу місцевості Дніпропетровського району в масштабі 1:400 000 (рис. 1, 2).

Отримана тривимірна цифрова модель рельєфу місцевості Дніпропетровського району була використана локальною ГІС «AquaGIS» для візуалізації:

- тривимірної моделі (поверхні) рельєфу місцевості Дніпропетровського району (рис. 3);
- карти місцевості в ізолініях (рис. 4);
- комбінації перших двох виглядів, тобто тривимірної моделі з нанесеними на неї ізолініями (рис. 5).



Рис. 1. Растрове зображення рельєфу Дніпропетровського району



Рис. 2. Підготовлене растрове зображення для отримання тривимірної моделі рельєфу Дніпропетровського району

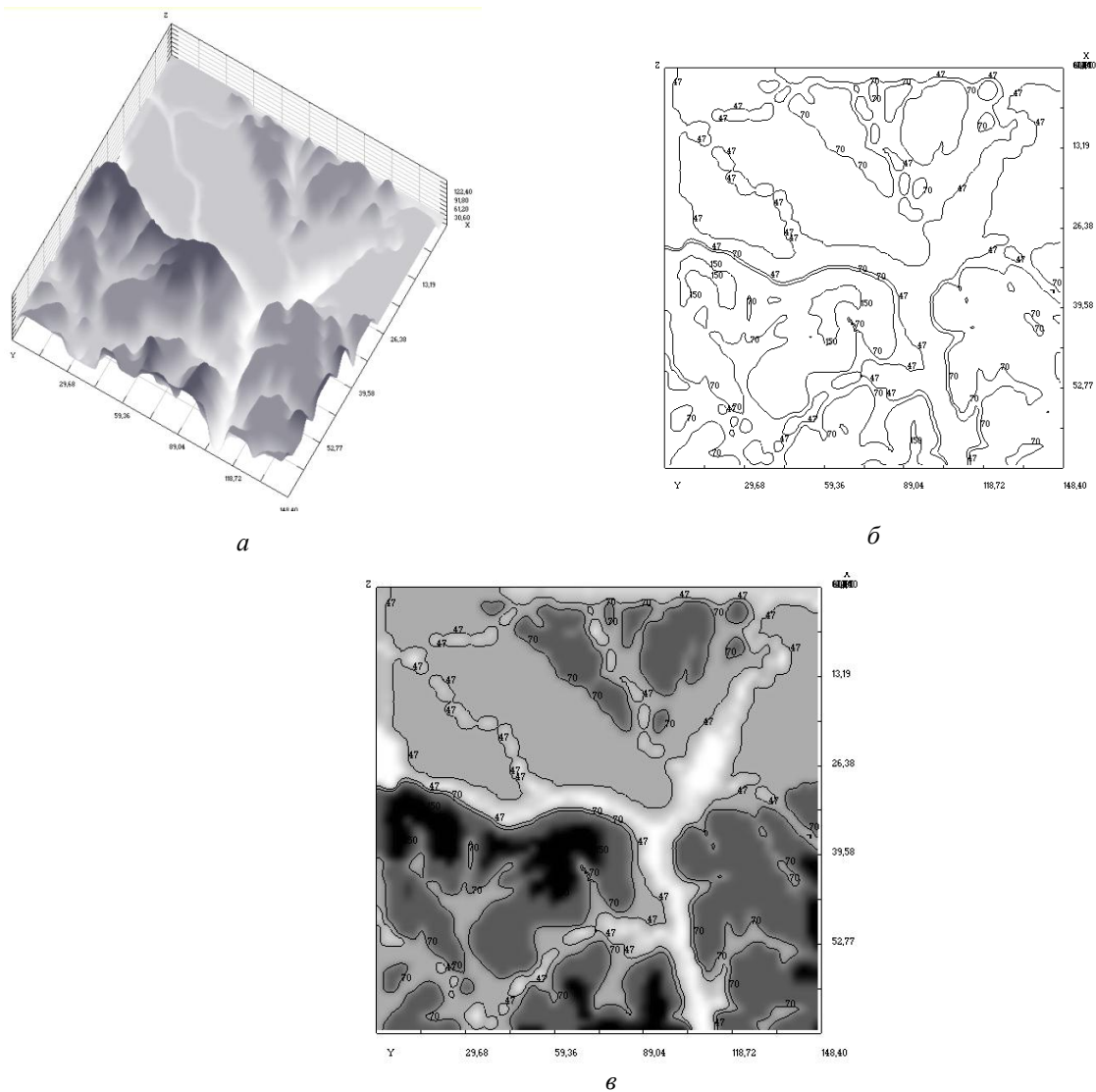


Рис. 3. Дніпропетровський район:  
*a* — модель місцевості; *б* — ізолії рівня;  
*в* — модель місцевості з нанесеними на неї ізоліями

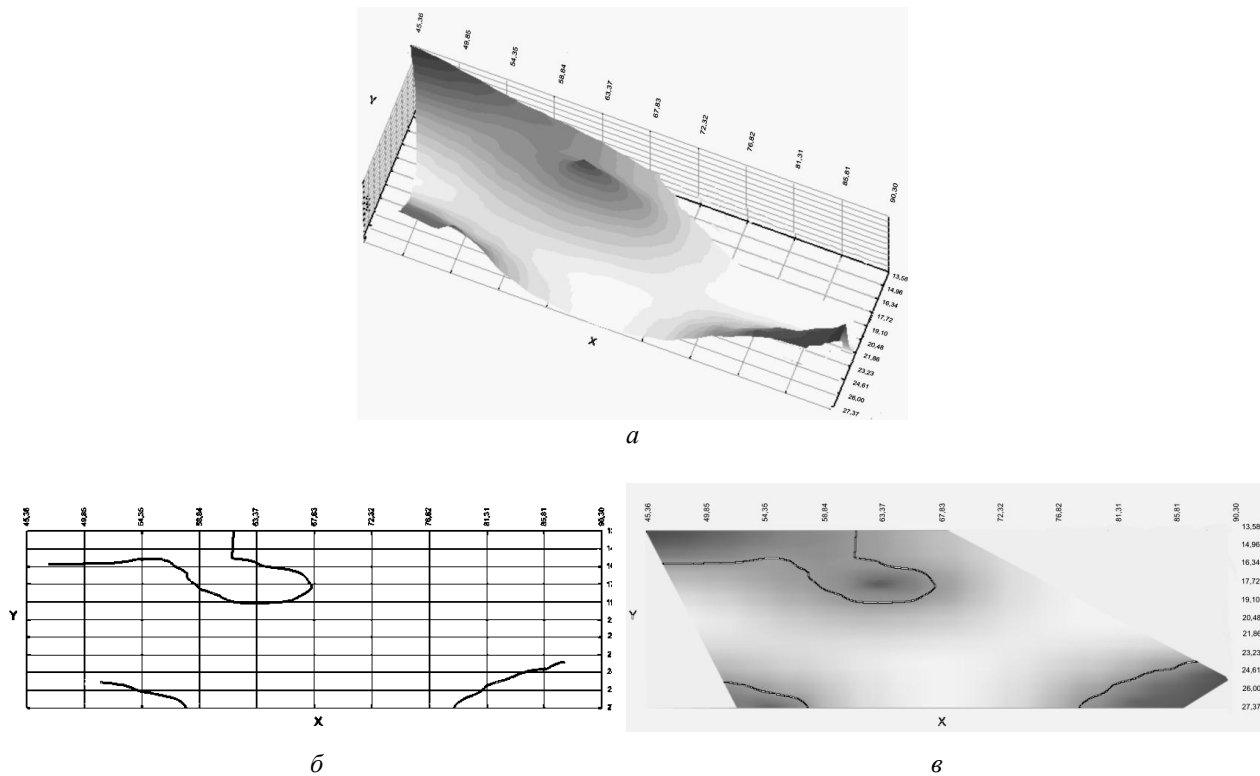


Рис. 4. Спостереження накопичення ГХП ПВ загальної жорсткості у Дніпропетровському районі на червень 2009 року:  
 а — відтворена поверхня концентрації; б — ізолінії рівня ГДК;  
 в — відтворена поверхня концентрації з нанесеною на неї ізолінією ГДК

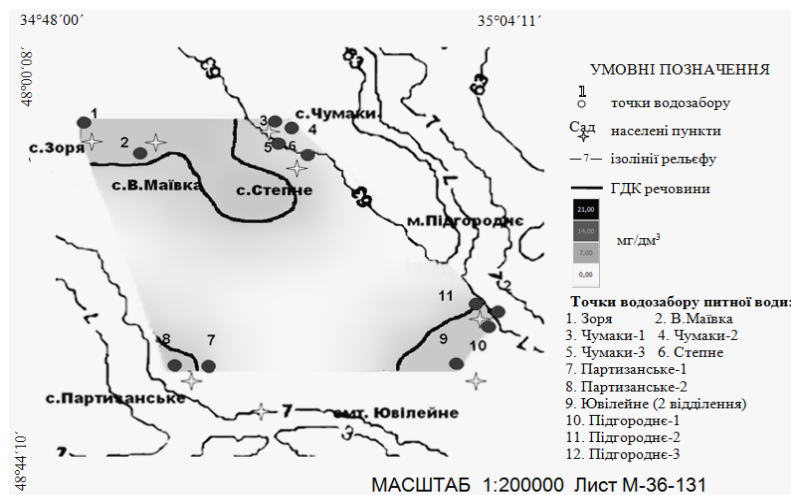


Рис. 5. Мапа вмісту загальної жорсткості на червень 2009 р. : початкові дані

Побудова поверхні концентрації ГХП ПВ з прив'язкою до місцевості була представлена трьома аналогічними вихідними формами на прикладі ГХП ПВ загальної жорсткості (див. рис. 4).

Для забезпечення підтримки прийняття рішень про стан ПВ на території Дніпропетровського району, накладанням поверхні концентрації ГХП ПВ на поверхню моделі рельєфу місцевості, було побудовано тематичні мапи такого типу:

1. Мапи вмісту хімічних сполук у ПВ.
2. Прогнозні мапи вмісту хімічних сполук у ПВ.

Тематичні мапи були побудовані за даними ТГХМ ПВ Дніпропетровського району та результатами прогнозування.

За рахунок істотного обсягу даних результати побудови мап у підрозділі будуть подано частково. Мапи побудовано за допомогою сплайну  $S_{21}$ , коефіцієнт згладжування дорівнював 128 та кратність сплайну — 256. Крім наданого сплайна система може реалізувати побудову тематичних мап за допомогою таких видів:  $S_{20}$ ,  $S_{22}$ , різних коефіцієнтів згладжування (16, 32, 256) та кратності сплайна (16, 32, 64, 128).

У системі існує можливість після попереднього аналізу визначити набір водозаборів для обробки. Так, були побудовані мапи концентрації ГХП ПВ на території лівобережної частини Дніпропетровського району на червень 2009 р.

У роботі представлено мапи концентрації ГХП ПВ за даними ТГХМ ПВ для оцінки техногенно навантажених регіонів (рис. 5), за прогнозними даними, отриманими в результаті проведення часового аналізу для забезпечення підтримки прийняття рішень під час прогнозування техногенного навантаження (рис. 6).

Центр забруднення визначається за допомогою лінії граничнодопустимої концентрації (в нашому випадку площа території), де немає перевищення ГДК у 2009 р. — це населені пункти лівобережної частини: с. Чумаки, с. Степне.

На іншій території Дніпропетровського району є перевищення концентрації за ГХП ПВ загальної жорсткості згідно з нормами ГДК речовин у ПВ.

Крім того є можливість побудови мап концентрації речовини із зазначенням рівня концентрації (рис. 7).

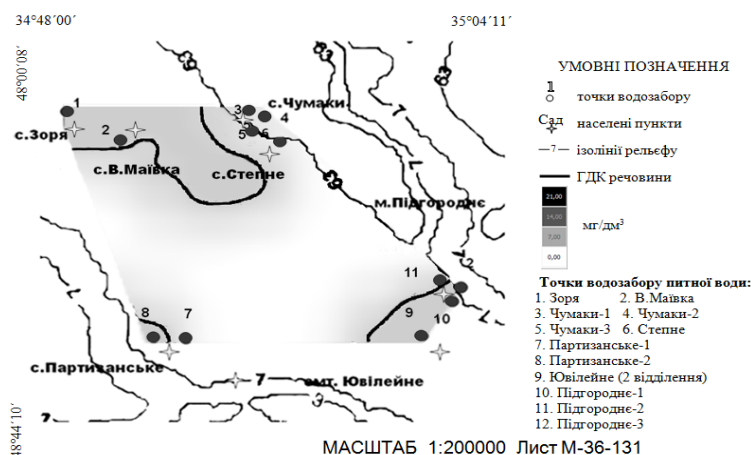


Рис. 6. Мапа вмісту загальної жорсткості на червень 2009 р.: прогнозні дані

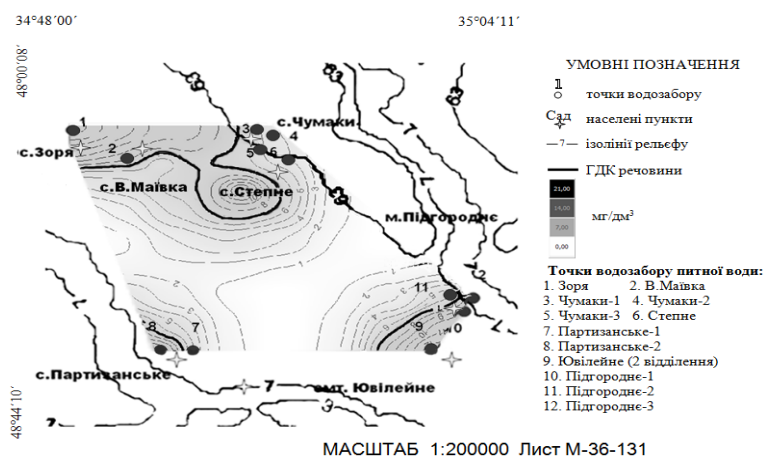


Рис. 7. Мапа вмісту загальної жорсткості на червень 2008 р. з зазначенням рівня концентрації

## Висновки

У даній роботі наведено опис розробленого методу побудови поверхонь на основі МГК, процедури регуляризації даних та використанні лінійних комбінацій *B*-сплайнів, близьких до інтеполяційних у середньому. Мапи, отримані за допомогою методу побудови поверхонь, дають можливість візуально оцінити екологічний стан території, що досліджується, та проводити комплексний просторово-часовий аналіз даних екологічного моніторингу.

Запропонований метод побудови поверхонь за даними гідрохімічного моніторингу може мати застосування в інших прикладних задачах, коли виникає потреба відтворення двовимірних регресійних залежностей.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Архангельська Ю. М. Просторове моделювання рельєфу місцевості системою RastToDTM / Ю. М. Архангельська, Ю. В. Самарец // Вісник Академії митної служби України. — 2008. — № 3 (39). — С. 98–104.

2. *Васюхин М. И.* Алгоритм визуализации картографической информации / М. И. Васюхин. — Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та. — 1999. — № 1(5). — С. 44–45

3. *Новаковский Б. А.* Исследование компьютерных технологий в экологическом картографировании / Б. А. Новаковский, М. В. Сироватская, Н. И. Тульская // Геоинформатика. — № 1, 1997. — С. 36–43.

4. *Sabin M. A.* An Existing System in the Aircraft Industry. The british Aircraft Corporation Numerical Master Geometry System / М. А. Sabin. Proc. Roy. Soc. (London), 1971. — Vol. A321. — P. 197–205.

5. *Приставка П. О.* Поліноміальні сплайни при обробці даних: монографія / П. О. Приставка. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. — 236 с.

6. *Приставка П. О.* Інформаційна технологія непараметричної оцінки двовимірної регресії за використанням сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць / П. О. Приставка, Ю. М. Архангельська. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2009. — Т.13. — С. 29–38.

7. *Приставка П. О.* Дослідження двовимірного поліноміального сплайну на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць / П. О. Приставка, О. Г. Чолишкіна. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2008. — Т. 12. — С. 14–27.

Стаття надійшла до редакції 27.11.2014.