УДК 519.652:519.254 (045)

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕБІНАРНИХ SUBDIVISION-ПРОЦЕДУР НА ОСНОВІ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ В-СПЛАЙНІВ ПІД ЧАС ОБРОБКИ ДВОВИМІРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

П. О. Приставка, д-р техн. наук, проф.; ***Є. П. Нічіков***
Національний авіаційний університет
chindakor@mail.ru

Запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарних subdivision двовимірних послідовностей на основі лінійних комбінацій B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Проведено дослідження швидкодії обчислень при комп'ютерній обробці.

Ключові слова: небінарний subdivision; локальний сплайн; апроксимація.

A general statement of the problem of conducting non-binary subdivision of two-dimensional sequences based on linear combinations of the B-splines that are related to the interpolar on average, is proposed. This article shows the research of computer processing performance of described methods.

Keywords: non-binary subdivision; local spline; approximation.

Постановка проблеми

Серед інформації, котра зберігається в електронному вигляді, є певна категорія даних, які під час обробки потребують математичних процедур, що побудовані на основі методів інтерполяції: цифрові зображення та відео, комп'ютерні анімаційні та інші просторові моделі тощо.

Зокрема, при вирішенні завдання масштабування (цифрових зображень, моделей на екрані комп'ютера, тощо) розробники відповідного програмного забезпечення, які працюють з відповідними даними, давно використовують швидкодіючі процедури, засновані на локальній апроксимації (зазвичай — *B*-сплайни), проте, є необхідність враховувати потребу у зменшенні кількості обчислювальних операцій при побудові обчислювальних схем.

Такі дані в електронному вигляді подано як послідовність відліків, задані у вузлових точках.

Зміна кількості відліків у послідовностях у довільну кількість раз (необов'язково у цілочислову) можна забезпечити на основі неперервних наближень. Але, якщо зміна масштабу послідовності здійснюється на певний, наперед відомий коефіцієнт, то в цьому разі для апроксимацій, що мають явний вигляд, можна отримати обчислювальні процедури з меншою обчислювальною складністю, як часткові випадки.

Наприклад, subdivision-процедури, для котрих отримання нових та вдосконалення алгоритмізації існуючих є актуальним завданням.

Аналіз досліджень та постановка задачі

Застосування апроксимацій гладких функцій є спрощенням під час вибору методу неперервної апроксимації, придатного для зміни кількості членів цифрових послідовностей.

Таке спрощення не є грубим на разі використання методів на основі фінітних функцій, зокрема *B*-сплайнів. Вагомий внесок у фундаментальну розробку апарату апроксимацій на основі *B*-сплайнів внесли І. Шоенберг, К. Де Бор, М. П. Корнійчук, А. О. Лигун [1–3] та ін.

Теоретичні та практичні дослідження сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, подано, наприклад, у працях [3; 4].

Стосовно останнього типу сплайнів можна відмітити, що вибір апарата апроксимації операторів, близького до інтерполяційного у середньому обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань та можуть бути використані як моделі аналогового сигналу [5].

Нехай задано розбиття Δ_{h_t}, Δ_{h_q} осей T і Q точками $t_i = ih_t$, $i \in \mathbb{Z}$, $h_t > 0$, $q_j = jh_q$, $j \in \mathbb{Z}$, $h_q > 0$, відповідно до яких задається розбиття Δ_{h_t,h_q} дійсної площини на однакові прямокутні області, кожна з яких визначається координатами лівого нижнього та правого верхнього кута:

$$\Delta_{h_t,h_q} : \left\{ \left(ih_t, jh_q \right), \left(\left(i+1 \right) h_t, \left(j+1 \right) h_q \right); i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Зазвичай є потреба кожну (i, j)-у прямокутну область розбиття Δ_{h_t,h_q} асоціювати з центральною точкою такого прямокутника. У цьому разі доцільно поряд з Δ_{h_t,h_q} розглядати сітку вузлів $\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$, визначену точками

$$t_i = \left(i + 0,5 \right) h_t,\ i \in \mathbb{Z},\ h_t > 0,$$
$$q_j = \left(j + 0,5 \right) h_q,\ j \in \mathbb{Z},\ h_q > 0.$$

© Приставка П. 0., Нічіков Є. П., 2014

Нехай у вузлах розбиття Δ_{h_t,h_q} ($\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$) задано значення деякої функції $p(t,q)\in C^{r,r}$: $p_{i,j}$, $i,j\in\mathbb{Z}$, $r=2,3,\ldots$ Вважаємо, що виконується

$$p_{i,j}=\overline{p}_{i,j}+\varepsilon_{i,j},$$

де

$$\overline{p}_{i,j}=\frac{1}{h_t h_q}\int\limits_{(i-0,5)h_t}^{(i+0,5)h_t}\int\limits_{(j-0,5)h_q}^{(j+0,5)h_q}p(t,q)\,dtdq;$$

$\varepsilon_{i,j}$ — деяка похибка.

Якщо задано системи базисних функцій у вигляді B-сплайнів, двовимірний сплайн, що є наближенням функції $p(t,q)$, такий:

$$S_{r,0}(p,t,q)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}p_{i,j}B_{r,h_t}(t-ih_t)B_{r,h_q}(q-jh_q),$$

де з точністю до аргументу

$$B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2}B_{r-1,h}(\tau)d\tau;\quad r\geq 1,$$

$$B_{0,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-h/2;h/2],\\ 1, & t\in[-h/2;h/2];\end{cases}\quad h=h_t,h_q.$$

Наприклад, розгорнуте подання сплайну $S_{2,0}(p,t,q)$ буде таке:

$$S_{2,0}(p,t,q)=\frac{1}{64}\Big((1-x)^2(1-y)^2p_{i-1,j-1}+(1-x)^2(6-2y^2)p_{i-1,j}+(1-x)^2(1+y)^2p_{i-1,j+1}+(6-2x^2)(1-y)^2p_{i,j-1}+(6-2x^2)(6-2y^2)p_{i,j}+(6-2x^2)(1+y)^2p_{i,j+1}+(1+x)^2(1-y)^2p_{i+1,j-1}+(1+x)^2(6-2y^2)p_{i+1,j}+(1+x)^2(1+y)^2p_{i+1,j+1}\Big),$$

де

$$x=\frac{2}{h_t}(t-ih_t),\ |x|\leq 1;\ y=\frac{2}{h_q}(q-jh_q),\ |y|\leq 1.$$

За необхідності наближень, близьких до інтерполяційних, у праці [4] можна використовувати обчислювальні схеми на основі розкриття функціоналів, наприклад:

$$S_{2,1}(p,t,q)=$$
$$=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}\left(p_{i,j}-\frac{1}{6}\Delta_i^2p_{i,j}-\frac{1}{6}\Delta_j^2p_{i,j}+\frac{1}{36}\Delta_{ij}^2p_{i,j}\right)\times B_{2,h_t}(t-ih_t)B_{2,h_q}(q-jh_q),$$

де

$$\Delta_i^2p_{i,j}=p_{i-1,j}-2p_{i,j}+p_{i+1,j};$$
$$\Delta_j^2p_{i,j}=p_{i,j-1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1};$$
$$\Delta_{ij}^2p_{i,j}=\Delta_i^2p_{i,j-1}-2\Delta_i^2p_{i,j}+\Delta_i^2p_{i,j+1}=$$
$$=\Delta_j^2p_{i-1,j}-2\Delta_j^2p_{i,j}+\Delta_j^2p_{i+1,j}.$$

Перехід від неперервних наближень на основі лінійних комбінацій B-сплайнів до процедур subdivision викликає практичний інтерес вже майже протягом останніх тридцяти років. Наприклад, у монографії [6] є чимало подібних процедур, при цьому бібліографія становить 180 робіт. Автори роботи [7] започаткували цілу низку публікацій, що пропонують підходи до побудови subdivision, які базуються на локальних сплайнів на основі B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, наприклад [8].

У працях [9; 10] отримані лінійні оператори небінарного масштабування одно- та двовимірних послідовностей відліків гладких функцій, які дозволяють здійснювати вказану операцію як з вимогою згладжування, так і асимптотично точно. Проте загальної постановки задачі для процедур небінарного subdivision зроблено не було. Зумовлено це тим, що вибір конкретних часткових випадків локальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, потребує автоматизованого визначення вузлів інтерполювання. Тож, це питання потребує узагальнення та дослідження, що й визначає ***мету*** даної статті.

Викладення основного матеріалу

Нехай у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_M h_N}: t_m=mh_M;\ q_n=nh_N,\ h_M,h_N>0$$

задано $P=\{p_{m,n,\kappa}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, $\kappa=1,2,\ldots$ — послідовність відліків гладкої функції $p(t,q)$. Під κ будемо розуміти ітераційний крок небінарного масштабування проектування послідовності P. Тоді, якщо $\{p_{u,v,\kappa-1}\}_{u,v\in\mathbb{Z}}$ — початкова послідовність, визначена у вузлах розбиття

$$\Delta_{h_U h_V}: t_u=uh_U;\ q_v=vh_V,\ h_U,h_V>0,$$

а $\{p_{m,n,\kappa}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ - утворена, шляхом «проектування» будь-яких $U\times V$ точок в $N\times M$, то маємо визначення для $p_{m,n,\kappa}$, наведене нижче.

Для довільної двійки індексів m,n зафіксуємо $U\times V$ вузлів $\{t_{u,\kappa-1},q_{v,k-1}\}_{u,v\in\mathbb{Z}}$, в яких визначено значення $\{p_{u,v,\kappa-1}\}_{u,v\in\mathbb{Z}}$. Суть проектування $U\times V$ точок у $N\times M$ полягає в тому, що на кожній ітерації в межах прямокутних областей, визначених координатами верхнього лівого та правого нижнього кутів

$$\left[-h_U/2+uh_U,\ uh_U+(U-1)h_U+h_U/2\right],$$
$$\left[-h_V/2+vh_V,\ vh_V+(V-1)h_V+h_V/2\right];$$

отримують нові вузли з рівномірним кроком $h_M,h_N>0$.

У межах прямокутних областей, визначених координатами верхнього лівого та правого нижнього кутів, а саме:

$$\left[-h_M/2+mh_M,\, mh_M+(M-1)h_M+h_M/2\right];$$

$$\left[-h_N/2+nh_N,\, nh_N+(N-1)h_N+h_N/2\right];$$

де

$$-h_U/2+uh_U=-h_M/2+mh_M;$$

$$-h_V/2+\nu h_V=-h_N/2+nh_N;$$

$$h_M=\frac{U}{M}h_U,\; h_N=\frac{V}{N}h_V,$$

будемо визначати члени послідовності $P=\left\{p_{m,n,\kappa}\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ на основі лінійних операторів, що ґрунтуються на даних попереднього кроку рекурсії:

$$p_{m,n,\kappa}=A_{m,n}\left(p_{u,v,\kappa-1}\right),\; m=\overline{0,M-1},\; n=\overline{0,N-1}$$

де $A_{m,n}\left(p_{u,v,\kappa-1}\right)$ неважко отримати як часткові випадки сплайнів.

У загальному випадку для конкретних m та n знаходимо величини

$$u^*=\frac{U(2m+1)}{2M},\; \nu^*=\frac{V(2n+1)}{2N}$$

$$u=\left[u^*\right],\; \nu=\left[\nu^*\right],\text{ де } [\bullet] \text{ — ціла частина,}$$

$$x_m=2\left(u^*-u\right)-1,\; y_n=2\left(\nu^*-\nu\right)-1$$

та підставляємо в явну формулу для сплайну, визначеного на розбитті $\Delta_{h_M h_N}$.

Наприклад, для $S_{2,1}$ отримаємо:

$$
\begin{aligned}
p_{m,n,\kappa}=\frac{1}{2304}\Big(\Big(&\big(p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)-2\big(p_{u-2,v-1}+p_{u+2,v+1}\big)-46\big(p_{u-2,v}+p_{u+2,v}\big)-2\big(p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\big)+\\
&+\big(p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\big)-2\big(p_{u-1,v-2}+p_{u+1,v+2}\big)+4\big(p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)+92\big(p_{u-1,v}+p_{u+1,v}\big)+\\
&+4\big(p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\big)-2\big(p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\big)-46\big(p_{u,v-2}+p_{u,v+2}\big)+92\big(p_{u,v-1}+p_{u,v+1}\big)+2116p_{u,v}\Big)+\\
&+\Big(2\big(-p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)+4\big(p_{u-2,v-1}-p_{u+2,v+1}\big)+92\big(p_{u-2,v}-p_{u+2,v}\big)+4\big(p_{u-2,v+1}-p_{u+2,v-1}\big)+\\
&+2\big(-p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\big)+16\big(p_{u-1,v-2}-p_{u+1,v+2}\big)+32\big(-p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)+\\
&+736\big(-p_{u-1,v}+p_{u+1,v}\big)+32\big(-p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\big)+16\big(p_{u-1,v+2}-p_{u+1,v-2}\big)\Big)x_m+\\
&+\Big(2\big(-p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)+16\big(p_{u-2,v-1}-p_{u+2,v+1}\big)+16\big(-p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\big)+2\big(p_{u-2,v+2}-p_{u+2,v-2}\big)+\\
&+4\big(p_{u-1,v-2}-p_{u+1,v+2}\big)+32\big(-p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)+32\big(p_{u-1,v+1}-p_{u+1,v-1}\big)+4\big(-p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\big)+\\
&+92\big(p_{u,v-2}-p_{u,v+2}\big)+736\big(-p_{u,v-1}+p_{u,v+1}\big)\Big)y_n+\\
&+\Big(4\big(p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)-32\big(p_{u-2,v-1}+p_{u+2,v+1}\big)+32\big(p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\big)-4\big(p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\big)-\\
&-32\big(p_{u-1,v-2}+p_{u+1,v+2}\big)+256\big(p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)-256\big(p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\big)+32\big(p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\big)\Big)x_my_n\\
&+\Big(\big(p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)-2\big(p_{u-2,v-1}+p_{u+2,v+1}\big)-46\big(p_{u-2,v}+p_{u+2,v}\big)-2\big(p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\big)+\\
&+\big(p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\big)-10\big(p_{u-1,v-2}+p_{u+1,v+2}\big)+20\big(p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)+460\big(p_{u-1,v}+p_{u+1,v}\big)+\\
&+20\big(p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\big)-10\big(p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\big)+18\big(p_{u,v-2}+p_{u,v+2}\big)-36\big(p_{u,v-1}+p_{u,v+1}\big)-828p_{u,v}\Big)x_m^2+\\
&+\Big(\big(p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)-10\big(p_{u-2,v-1}+p_{u+2,v+1}\big)+18\big(p_{u-2,v}+p_{u+2,v}\big)-10\big(p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\big)+\\
&+\big(p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\big)-2\big(p_{u-1,v-2}+p_{u+1,v+2}\big)+20\big(p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)-36\big(p_{u-1,v}+p_{u+1,v}\big)+\\
&+20\big(p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\big)-2\big(p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\big)-46\big(p_{u,v-2}+p_{u,v+2}\big)+460\big(p_{u,v-1}+p_{u,v+1}\big)-828p_{u,v}\Big)y_n^2+\\
&+\Big(2\big(-p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\big)+16\big(p_{u-2,v-1}-p_{u+2,v+1}\big)+16\big(-p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\big)+2\big(p_{u-2,v+2}-p_{u+2,v-2}\big)+\\
&+20\big(p_{u-1,v-2}-p_{u+1,v+2}\big)+160\big(-p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\big)+160\big(p_{u-1,v+1}-p_{u+1,v-1}\big)+\\
&+20\big(-p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\big)+36\big(-p_{u,v-2}+p_{u,v+2}\big)+288\big(p_{u,v-1}-p_{u,v+1}\big)\Big)x_m^2y_n+
\end{aligned}
$$

$$+\left(2\left(-p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\right)+20\left(p_{u-2,v-1}-p_{u+2,v+1}\right)+36\left(-p_{u-2,v}+p_{u+2,v}\right)+20\left(p_{u-2,v+1}-p_{u+2,v-1}\right)+\right.$$
$$+2\left(-p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\right)+16\left(p_{u-1,v-2}-p_{u+1,v+2}\right)+160\left(-p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\right)+288\left(p_{u-1,v}-p_{u+1,v}\right)+$$
$$+160\left(-p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\right)+16\left(p_{u-1,v+2}-p_{u+1,v-2}\right)\Big)x_m y_n^2+\Big(\left(p_{u-2,v-2}+p_{u+2,v+2}\right)-$$
$$-10\left(p_{u-2,v-1}+p_{u+2,v+1}\right)+18\left(p_{u-2,v}+p_{u+2,v}\right)-10\left(p_{u-2,v+1}+p_{u+2,v-1}\right)+\left(p_{u-2,v+2}+p_{u+2,v-2}\right)-$$
$$-10\left(p_{u-1,v-2}+p_{u+1,v+2}\right)+100\left(p_{u-1,v-1}+p_{u+1,v+1}\right)-180\left(p_{u-1,v}+p_{u+1,v}\right)+100\left(p_{u-1,v+1}+p_{u+1,v-1}\right)+$$
$$\left.-10\left(p_{u-1,v+2}+p_{u+1,v-2}\right)+18\left(p_{u,v-2}+p_{u,v+2}\right)-180\left(p_{u,v-1}+p_{u,v+1}\right)+324p_{u,v}\Big)x_m^2 y_n^2\right).$$

Для зменшення обчислювальної складності пропонується замість формул на зразок наведеної вище використовувати наперед визначені часткові випадки сплайнів при конкретних значеннях аргументів x та y. Наприклад, при $x_m=-\frac{2}{3}$, $y_n=-\frac{2}{3}$ вираз можна буде представити у вигляді дискретної згортки:

$$p_{m,n,\kappa}=\sum_{ii=u-2}^{u+2}\sum_{jj=\nu-2}^{\nu+2}\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)ii-u,jj-\nu}\cdot p_{ii,jj,\kappa-1},$$

де

$$\gamma^{(2,1)}_{\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}=\begin{pmatrix}0{,}00335 & -0{,}02063 & -0{,}04581 & 0{,}00509 & 0{,}00013\\ -0{,}02063 & 0{,}12708 & 0{,}28221 & -0{,}03136 & -0{,}00825\\ -0{,}04581 & 0{,}28221 & 0{,}62673 & -0{,}06964 & -0{,}00183\\ 0{,}00509 & -0{,}03136 & -0{,}06964 & 0{,}00774 & 2{,}06e-04\\ 0{,}00013 & -0{,}00083 & -0{,}00183 & 2{,}03e-04 & 5{,}36e-06\end{pmatrix}.$$

Загалом, у випадку двовимірної послідовності для часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів парних ступенів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому [4; 5], має місце загальна формула для визначення лінійних операторів небінарного subdivision:

$$p_{m,n,\kappa}=\sum_{ii=u-w}^{u+w}\sum_{jj=\nu-w}^{\nu+w}\gamma^{(r,l)}_{(x_m,y_n)ii-u,jj-\nu}\cdot p_{ii,jj,\kappa-1},$$

де $\gamma^{(r,l)}_{(x_m,y_n)}$ — маска оператора дискретної згортки; $2\cdot w+1$ — ширина маски; r — порядок сплайну; l — порядок уточнення сплайну; x_m та y_n — часткові значення аргументу в явному поданні сплайну.

Експериментальне дослідження швидкодії

Для оцінки збільшення швидкодії наведених процедур за рахунок використання методів небінарного subdivision було проведено експеримент.

Цифрові растрові зображення було збільшено втричі за шириною та висотою.

Були використані методи неперервної апроксимації за допомогою сплайну $S_{2,1}(p,t,q)$ та часткові випадки цього сплайну.

При цьому $(x_m;y_n)$ набуває значення із множини:

$$\left\{\begin{matrix}\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3};0\right),\\ \left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right),\left(0;-\frac{2}{3}\right),(0;0),\\ \left(0;\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3};0\right),\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Тестування проводилося на ноутбуці Dell Latitude E5530 із процесором Intel® Core™ i5-3320M CPU @ 2.60 GHz та 8 гб. ОЗП.

Результати наведено на графіках (рис. 1, 2).

Як видно з графіків, використання часткових випадків неперервної апроксимації за допомогою локальних поліноміальних сплайнів може дати суттєвий приріст швидкодії масштабування зображення на наперед заданий коефіцієнт.

Висновки

У роботі запропоновано загальну постановку задачі на проведення небінарного subdivision на основі лінійних комбінацій B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. Викладено загальний спосіб визначення місцезнаходження відліків для проектування числових послідовностей. Наведено часткові випадки сплайн-операторів у вигляді дискретної згортки послідовності відліків та відповідних масок. Експериментально показано збільшення швидкодії при масштабуванні зображень.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на узагальнення поданих процедур небінарного subdivision на випадок багатовимірних послідовностей.

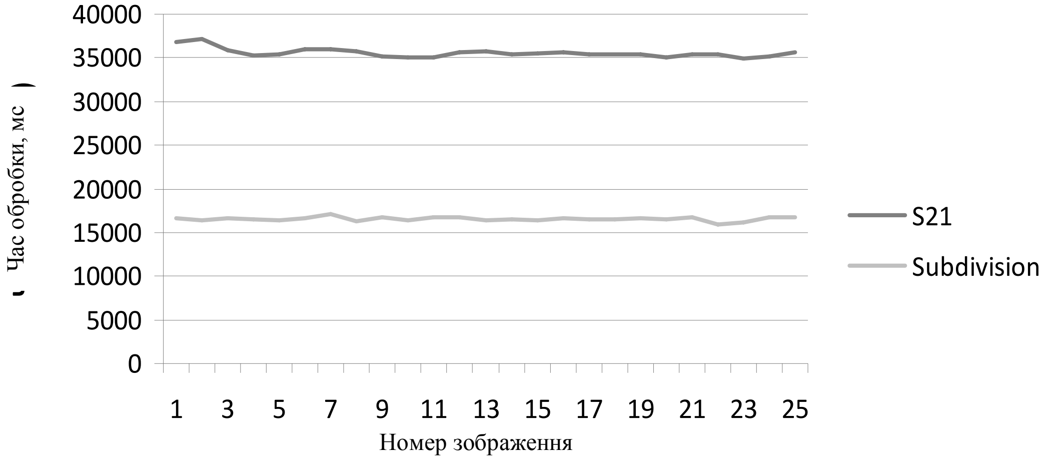

Рис. 1. Час масштабування зображень із розміром 100×750 пікселів

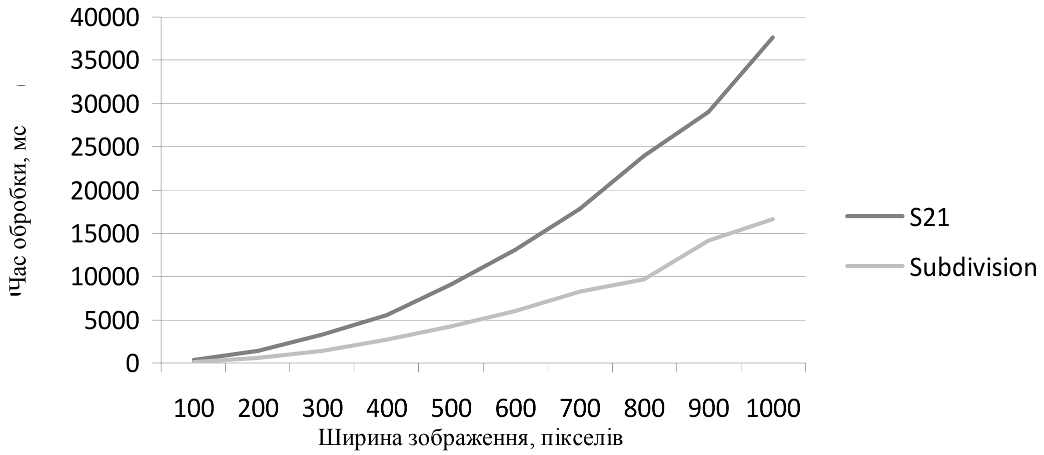

Рис. 2. Час масштабування зображень залежно від розміру

ЛІТЕРАТУРА

1. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам/ К. де Бор М. // Радио и связь, 1985. — 303 с.
2. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты: пер. с англ. / Ч. Чуи. — М. : Мир, 2001. — 412 с.
3. *Лигун А. А.* Асимптотические методы восстановления кривых / А. А. Лигун, А. А. Шумейко. — К. : ІМ НАН України, 1996. — 358 с.
4. *Приставка П. О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних / П. О. Приставка. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. — 236 с.
5. *Приставка П. О.* Лінійні комбінації В-сплайнів, близькі до інтерполяційних у серед-ньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / П. О. Приставка. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. праць. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2011. —Т. 15. — С. 4–17.
6. *Andersson L.-E.* Introduction to the mathematics of subdivision surfaces / L.-E., Andersson N. Stewart. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. — 356 p.
7. *Лигун А. А.* Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных / А.А Лигун, А. А. Шумейко // Математичне моделювання, Дніпродзержинськ, ДГТУ, 2 (5), 2000. — С. 11–19.
8. *Приставка П. О.* Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій / П. О. Приставка. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2003. — Т. 7. — С. 39–53.
9. *Приставка П. О.* Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів / П. О. Приставка. Вісн. НАУ. — К. : НАУ. — 2008. — № 3. — С. 85–89.
10. Приставка П. О. Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій двох змінних лінійними операторами / П. О. Приставка. Вісн. НАУ. — К. : НАУ. — 2009. — № 2. — С. 173–177.

Стаття надійшла до редакції 26.11.2014.