УДК 681.5.08

МОДЕРНІЗОВАНА ОПТИМАЛЬНА РОБАСТНА БАГАТОВИМІРНА ФІЛЬТРАЦІЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ КОРИСНИХ СИГНАЛІВ

[1]***С. І. Осадчий***, д-р. техн. наук, проф.; [2]***О. Я. Кузнєцова***, д-р. пед. наук, доц.;
[1]***В. О. Зубенко***, канд. техн. наук., доц.; [1]***О. П. Голик***, канд. техн. наук., доц.

e-mail:elena2055@ukr.net

[1]Кіровоградський національний технічний університет
[2]Національний авіаційний університет

Розглянуто проблему виділення стаціонарних випадкових корисних сигналів на тлі контрольованих багатовимірних стаціонарних випадкових перешкод, в умовах варіації динамічних характеристик вимірювачів з високою точністю. Розроблено новий метод синтезу оптимального багатовимірного модернізованого вінерівського фільтра з корекцією по шуму в частотній області, який відрізняється спрощенням процедури факторизації матриці.

Ключові слова: матриця; фільтр; факторизація; сепарація; синтез; передавальна функція.

The problem of stationary random signal allocation at a background of controlled multidimensional stationary random noise, in a variation of the dynamic characteristics of meters, with high accuracy was solved. . A new synthesis method of optimal multivariate modernized Wiener filter with correction for noise in the frequency domain, which is characterized by the simplification of matrix factorization procedure.

Keywords: matrix; filter; factorization; separation; synthesis; transfer function.

Постановка проблеми

Керування рухомим об'єктом обумовлює необхідність вимірювання параметрів його руху. На сьогодні відбувається використання цієї проблеми для приладів і датчиків, побудованих з використанням нано- і мікротехнологій. Характерною особливістю таких пристроїв є наявність інструментальних і методичних похибок, що утворюють випадковий широкосмуговий шум.

Одним з найбільш ефективних методів зниження впливу шуму на результати вимірювання параметрів руху є оптимальна фільтрація. Незважаючи на велику кількість методів синтезу таких оптимальних фільтрів [1; 2; 3] залишається актуальною проблема забезпечити високу точність виділення стаціонарних випадкових корисних сигналів на тлі контрольованих багатовимірних стаціонарних випадкових перешкод в умовах варіації динамічних характеристик вимірювачів.

Викладення основного матеріалу

Для вирішення цього завдання скористаємося ідеєю модернізованої вінерівської фільтрації, викладеної в статті [4]. Відповідно з цією ідеєю розроблена структурна схема системи вимірювання (рис. 1), яка складається з декількох частин. Насамперед це багатовимірний датчик з матрицею передавальних функцій K.

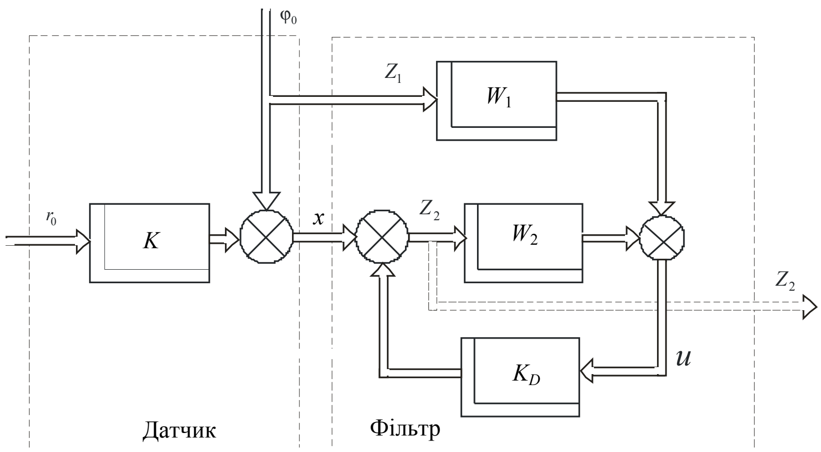

Рис. 1. Структурна схема системи вимірювання

На вхід датчика подається n-вимірний вектор корисних сигналів r_0, який необхідно виміряти. На виході датчика діє вектор результатів вимірювань x відповідної розмірності, спотворений перешкодою φ_0, яка може бути виміряна. Вектори φ_0 і x подаються на входи фільтра, який складається з моделі датчиків з матрицею передавальних функцій K, і двох обчислювачів з матрицями передавальних функцій W_1 і W_2.

На виході фільтра повинен бути сформований вектор оцінок Z_2 бажаного перетворення вектора корисних сигналів r_0

$$Z_0 = I \cdot r_0, \qquad (1)$$

де I — матриця бажаного перетворення корисного сигналу [5]; Z_0 — вектор бажаного перетворення корисного сигналу.

Припустимо, що корисний сигнал і перешкода являють собою n-вимірні центровані стаціонарні випадкові процеси з відомими дробово-раціональними матрицями спектральних і взаємних спектральних густин $S_{r_0r_0}$, $S_{\varphi_0\varphi_0}$, $S_{r_0\varphi_0}$, $S_{\varphi_0r_0}$. Будемо також вважати, що матриці K і I задані.

Тоді завдання синтезу оптимального фільтра зводиться до пошуку таких структури і параметрів матриць передавальних функцій W_1 і W_2, які забезпечили б мінімум наступному критерію якості

$$I = \langle \varepsilon' R \varepsilon \rangle + \langle u' C u \rangle + \langle Z_2' \text{ґ}\, \varphi_0 \rangle + \langle \varphi_0' \text{ґ©} Z_2 \rangle, \qquad (2)$$

де ε — n-вимірний вектор помилок вимірювання

$$\varepsilon = Z_2 - Z_0, \qquad (3)$$

де R, C, Λ — позитивно визначені вагові матриці; $\langle\ \rangle$ — знак математичного очікування; $'$ — знак транспонування.

Для вирішення поставленого завдання представимо матрицю передавальних функцій датчиків у вигляді наступного з монографії [3].

$$K = P_0^{-1} M_0, \qquad (4)$$

де P_0, M_0 — поліноміальні матриці комплексного аргументу s розмірності $n \times n$.

З урахуванням рівняння (4) і структурної схеми (рис. 1) зв'язок між сигналами, діючими в трактах системи вимірювання представляється так

$$\begin{cases} Z_1 = \varphi_0 + O_n u; \\ P_0 Z_2 = M_0 r_0 + \varphi_0 + M_0 u; \\ u = W_1 Z_1 + W_2 Z_2, \end{cases} \qquad (5)$$

де O_n — нульова матриця розмірності $n \times n$.

Система рівнянь (5) легко подається у векторно-матричній формі

$$\begin{cases} PZ = Mu + \psi; \\ u = WZ, \end{cases} \qquad (6)$$

в якій P, M, W блокові матриці [6] вигляду

$$P = \begin{bmatrix} E_n & O_n \\ O_n & P_0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} O_n \\ M_0 \end{bmatrix}; \; W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

де Z, ψ — вектори отримані за правилами

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}; \quad \psi = \begin{bmatrix} E_n & O_n \\ O_n & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ r_0 \end{bmatrix}; \qquad (8)$$

де E_n — одинична матриця розмірності $n \times n$.

Ураховуючи позначення (6)–(8) і використовуючи методику зі статті [7], необхідно представити критерій (2) в частотній області, тоді

$$I = \frac{1}{j} \int_{\infty}^{\infty} tr(S'_{\varepsilon\varepsilon} R + S'_{nn} C + S'_{Z_2Z_1} \Lambda + \Lambda S'_{Z_1Z_2}) dS, \qquad (9)$$

де j — комплексна одиниця; $tr(\ )$ — знак знаходження сліду матриці [6]; $S_{\varepsilon\varepsilon}$, S_{nn} — матриці спектральних щільностей векторів помилки оцінювання і сигналу управління; $S_{Z_1Z_2}$, $S_{Z_2Z_1}$ — матриці взаємних спектральних щільностей векторів Z_1 і Z_2.

Як випливає з розгляду структурної схеми (рис. 1). Значення функціоналу (9) залежить від двох матриць передавальних функцій: F_u^{ψ} і F_Z^{ψ}.

F_u^{ψ} характеризує вплив зміни вектора ψ на зміною вектору u на вході моделі датчиків.

F_Z^{ψ} характеризує вплив вектору ψ зі зміною вектора Z.

Оскільки ці матриці пов'язані між собою відомим рівнянням зв'язку, то для мінімізації функціоналу (9) за аналогією з [8] введена єдина матриця варійованих передавальних функцій G, яка визначає матрицю F_u^{ψ}

$$F_u^{\psi} = (B + AP^{-1}M)^{-1}(G - AP^{-1}), \qquad (10)$$

де поліноміальні матриці A, B, знайдені як і в праці [9] в результаті подання допоміжної матриці H

$$H = \begin{bmatrix} O_{2n} & P & -M \\ E_{2n} & -R_1 & O_{2n\times n} \\ -M_* & O_{2n\times n} & -C \end{bmatrix} \qquad (11)$$

у вигляді

$$H = V \sum V_*, \qquad (12)$$

де $O_{2n\times n}$ — нульова матриця розмірності $2n \times n$; R_1 — службова матриця, знайдена за формулою

$$R_1 = \begin{bmatrix} O_n & \Lambda \\ \Lambda & R \end{bmatrix}; \tag{13}$$

$$V = \begin{bmatrix} E_{2n} & -S & N \\ O_{2n} & P & -M \\ O_{n\times 2n} & A & B \end{bmatrix};$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} O_{2n} & E_{2n} & O_{2n\times n} \\ E_{2n} & O_{2n} & O_{2n\times n} \\ O_{n\times 2n} & O_{n\times 2n} & -E_n \end{bmatrix}, \tag{14}$$

* — знак ермітового спряження матриць, а визначник матриці V — Гурвіца поліном.

Мінімізація функціоналу (9) на класі стійких і фізично реалізованих матриць варійованих передавальних функцій G, дозволила знайти таку матрицю передавальних функцій W

$$W = (B + GM)^{-1}(-A + GP), \tag{15}$$

де оптимальна стійка разом з оберненою матриця G дорівнює

$$G = -(T_0 + T_+ + K_0 + K_+)D^{-1},$$

$T_0 + T_+$ — результат вінерівської сепарації зі стійкими полюсами наступного добутку матриць

$$\begin{gathered} T_0 + T_+ + T_- = \\ = (B_* + M_* P_*^{-1} A_*)^{-1}(M_* P_*^{-1} S_* - N_*)D; \end{gathered} \tag{16}$$

$K_0 + K_+$ — стійкий результат вінерівської сепарації такого виразу

$$\begin{gathered} K_0 + K_+ + K_- = \\ = -(B_* + M_* P_*^{-1} A_*)^{-1} M_* P_*^{-1} \begin{bmatrix} O_n \\ E_n \end{bmatrix} \times \\ \times R\Phi\left[S'_{\varphi_0 r_0}, S'_{\varphi_0 r_0} + S'_{r_0 r_0} M_{0*}\right] D_*^{-1}, \end{gathered} \tag{17}$$

де D — результат факторизації [3] транспонованої матриці спектральних густин розширеного вектора вхідних сигналів фільтра з виразу (8).

Приклад.

Припустимо, що на вхід датчика з передавальною функцією $K = 1$ подається сигнал r_0, спектральна густина якого дорівнює

$$S_{r_0 r_{0-}} = \frac{293{,}5^2}{-s^2\pi}. \tag{18}$$

На виході датчика діє перешкода φ_0 типу «білий шум» з нульовим математичним очікуванням і спектральною густиною

$$S_{\varphi_0\varphi_0} = \frac{44{,}79^2}{\pi}, \tag{19}$$

яка не корельована з корисним сигналом.

Необхідно знайти матрицю передавальних функцій фільтра W, яка мінімізує критерій якості (9) за умови, що службові матриці рівні $R = 1$; $\Phi = 1$; $C = 0{,}1$; $\Lambda = 1$.

Однобічне видалення полюсів з функції K [3] дозволило визначити, що

$$M_0 = 1,\ P_0 = 1. \tag{20}$$

Застосування теореми Вінера–Хинчина до вектора ψ з урахуванням формул (18), (19) дозволило визначити транспоновану матрицю спектральних густин розширеного вектора ψ

$$S'_{\psi\psi} = \begin{bmatrix} 639 & 639 \\ 639 & \dfrac{639(-s^2 + 6{,}55^2)}{s^2} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Результат її факторизації має вигляд

$$D = \begin{bmatrix} 25{,}3 & 0 \\ 25{,}3 & \dfrac{165{,}6}{s} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Підстановка вихідних даних у вираз (11) і виконання перетворення (12) за допомогою алгоритму з монографії [9] дало змогу визначити, що матриці A, B, S і N дорівнюють

$$A = \begin{bmatrix} 7{,}326 & 7{,}326 \end{bmatrix};$$

$$B = 0{,}3162;\ S = \begin{bmatrix} 0{,}268 & -0{,}232 \\ -0{,}232 & -0{,}232 \end{bmatrix};$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Застосування алгоритмів (16), (17) до отриманих результатів (20)–(23) показало, що

$$T_0 + T_1 = \begin{bmatrix} -1{,}53 & \dfrac{-5{,}02}{s} \end{bmatrix}; \tag{24}$$

$$K_0 + K_+ = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{21{,}67}{s} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Враховуючи отримані результати, матриця варійованих передавальних функцій G має вигляд

$$G = \begin{bmatrix} -0{,}161 & 0{,}1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

У такому випадку, матриця передавальних функцій оптимального фільтра відповідно з виразом (15) може бути знайдена як

$$W = \begin{bmatrix} -17{,}96 & -17{,}34 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Висновки

Розроблено метод синтезу оптимального багатовимірного модернізованого вінерівського фільтра з корекцією по шуму в частотній області.

Відмінною особливістю розробленого методу є спеціальний вибір матриці варіювання.

Застосований прийом значно спрощує процедуру синтезу за рахунок приведення до тривіальної однієї з процедур факторизації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Kalman R. E.* New results in Linear Filtering and Prediction Theory / R. E. Kalman, R. Bucy // I. Basic. Bag. Trans. ASME, Ser. D., 1961, 83D. — P. 95–108.

2. *Волгин Л. Н.* Оптимальное дискретное управление динамическими системами / Л. Н. Волгин; под ред. П. Д. Крутько. — М. :Наука, 1986. — 240 с.

3. *Азарсков В. Н.* Методология конструирования оптимальных систем стохастической стабилизации / В. Н. Азарсков, Л. Н. Блохин / Монография. — К. : Кн. изд. НАУ, 2006. — 440 с.

4. *Блохин Л. Н.* Модернизированная многомерная винеровская фильтрация / Л. Н. Блохин // Кибернетика и вычислительная техника, 2002. — Вып. 136. — С. 77–88.

5. *Ньютон Дж. К.* Теория линейных следящих систем /Дж. К. Ньютон, Л. А. Гулд, Дж. Ф. Кайзер; пер. с анг. — М. : Наука, 1961. — 407 с.

6. *Гантмахер Ф. Ф.* Теория матриц // Ф. Ф. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 575 с.

7. Kučera V. Transfer-function Solution of the Kalman-Bucy Filtering Problem / V. Kučera // Kybernetika. — Vol. 14 (1978). — № 2. — P. 110–122.

8. *Осадчий С. И.* Комбинированный метод синтеза оптимальных систем стабилизации многомерных подвижных объектов при стационарных случайных воздействиях / С. И.Осадчий, В. А. Зозуля // Проблемы управления и информатики. — № 3, 2013. — С. 40–49.

9. *Науменко К. И.* Наблюдение и управление движением динамических систем / К. И. Науменко. — К. : Наук. думка, 1984. —208 с.

Стаття надійшла до редакції 20.08.2015