DOI: 10.18372/2310-5461.40.13265

УДК 621.396:51-74 (045)

О. Г. Голубничий, канд. техн. наук
Національний авіаційний університет
orcid.org/0000-0001-5101-3862
e-mail: a.holubnychyi@nau.edu.ua

СИНТЕЗ СИСТЕМ КОРЕЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ДОПОВНЕНОЇ ПРОЦЕДУРИ ГРАМА-ШМІДТА

Вступ

Процедура ортогоналізації Грама-Шмідта є добре відомим методом лінійної алгебри [1], який використовується для отримання ортогональних систем дискретних сигналів та відліків некорельованих між собою процесів при обробці сигналів та математичному моделюванні систем та процесів [2], автоматичному керуванні [3] тощо.

Постановка проблеми

Окремим питанням у галузі синтезу та обробки сигнальних конструкцій та моделювання систем та процесів є синтез систем корельованих складових та керування їх кореляційними зв'язками, зокрема у системах NOMA 5G.

Такий синтез та керування можуть бути виконані шляхом модифікації класичної процедури ортогоналізації Грама-Шмідта шляхом її доповнення процедурою керування кореляційними зв'язками у базисі, чому і присвячена ця стаття.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У сучасних інформаційно-телекомунікаційних та радіотехнічних системах процедура Грама-Шмідта знайшла застосування для коригування спотворень у багатоканальних системах зв'язку з кодовим розділенням каналів DS/CDMA, які виникають через порушення ортогональності сигнально-кодових конструкцій та внесення до них певних кореляційних зв'язків [4], у задачах синтезу алгоритмів з низькою обчислювальною складністю для децентралізованого оцінювання параметрів у безпроводових сенсорних мережах [5], для забезпечення оптимальної продуктивності просторово-часової адаптивної обробки сигналів у бортових MIMO (*multiple-input multiple-output*) радарах, які використовують ортогональні сигнально-кодові конструкції у складі зондувальних сигналів [6] тощо.

У всіх вищенаведених прикладах процедура Грама-Шмідта використовується безпосередньо або у доповненому (модифікованому) вигляді для керування кореляційними зв'язками у сигнально-кодових конструкціях при обробці сигналів.

Відзначимо, що синтез сигнально-кодових конструкцій з необхідними кореляційними властивостями також можливий з використанням інших підходів та обчислювальних процедур, а саме напрямленого перебору, синтезу на основі різницевих множин, синтезу шляхом гомоморфного відображення мультиплікативних груп простого та розширеного полів Галуа та ін. [7].

Прикладом реалізації таких підходів є обґрунтування правил кодування для синтезу систем бінарних послідовностей, які в результаті подальшої мультиплікативної обробки результатів їх узгодженої фільтрації дозволяють здійснювати режекцію бічних пелюсток результуючого сигналу для зменшення ймовірності помилок 1-го роду при його виявленні [8].

Постановка завдання

Метою статті є обґрунтування та формалізований опис доповнення (модифікації) відомої процедури ортогоналізації Грама-Шмідта, яке дозволяє керувати кореляційними зв'язками у системі сигналів, яка синтезується, за умов встановлення однакових кореляційних зв'язків між сигнальними складовими у ній. Зазначене доповнення (модифікація) при цьому повинно мати прийнятну алгоритмічну та обчислювальну складність [9; 10], що є важливим при практичній реалізації у системах обробки сигналів, яка здійснюється у реальному масштабі часу.

Виклад основного матеріалу дослідження

Представлений у статті матеріал дослідження викладено у трьох частинах:

1) формування початкових базисів довільним чином корельованих між собою відліків дискретизованих у часі сигналів;

2) ортогоналізація початкових базисів та формування ортогональних систем сигналів з використанням процедури Грама-Шмідта;

3) доповнення (модифікація) відомої процедури ортогоналізації Грама-Шмідта, яке саме і є новим запропонованим у статті рішенням задачі синтезу систем корельованих сигналів.

Формування початкових базисів

Першою складовою процедури синтезу систем корельованих сигналів, яка розглядається у статті, є формування M псевдовипадкових послідовностей дійсних чисел $v_{j,k}$, $j=\overline{1,M}$, $k=\overline{1,N}$, $M \le N$, довжиною N з математичним очікуванням, що дорівнює нулю, наприклад $v_{j,k} : N\left(0,\sigma^2\right)$.

Ця процедура може бути виконана за допомогою одного з відомих методів формування псевдовипадкових чисел. В результаті одержуємо M послідовностей псевдовипадкових чисел довжиною N. Сформовані послідовності є відліками сигнальних складових базису сигналів, який формується.

Відліки сигнальних складових можуть бути представлені векторами $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $\mathbf{v}_j=\left\{v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,k}, \dots, v_{j,N}\right\}$. При цьому значення відліків послідовності будуть проекціями вектора на відповідні осі координат ортогонального базису у $\mathbb{R}^N$.

Ортогоналізация $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, з використанням процедури Грама-Шмідта

Другою складовою процедури є ортогоналізація базису лінійного векторного простору $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, з використанням процедури ортогоналізації Грама-Шмідта.

Відомо, що умовою ортогональності нормованого базису лінійного векторного простору $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, є

$$(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)=\begin{cases}0, & i \ne j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

Прикладом такого ортонормованого базису у лінійному векторному просторі $\mathbb{R}^N$ може служити система $M \le N$ координатних ортів.

У будь-якому лінійному векторному просторі існує ортонормований базис. Якщо $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, − довільний базис лінійного векторного простору, то в цьому просторі існує ортогональний базис $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, координати векторів якого відповідно до процедури Грама-Шмідта визначаються послідовно з системи рівнянь (1).

$$u_{j,k}=\begin{cases}v_{j,k}, & j=1,\\ v_{j,k}-\sum\limits_{i=1}^{j-1}\lambda_{ji}u_{i,k}, & j=\overline{2,M},\end{cases} \tag{1}$$

де коефіцієнти λ_{ji} знаходяться з умови $(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)=0$ і визначаються виразом (2).

$$\lambda_{ji}=\frac{(\mathbf{v}_j,\mathbf{u}_i)}{\left\|\mathbf{u}_i\right\|^2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}v_{j,k}u_{i,k}}{\sum\limits_{k=1}^{N}u_{i,k}^2}, \tag{2}$$

де $\left\|\mathbf{u}_i\right\|=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}u_{i,k}^2}$ – норма вектора $\mathbf{u}_i$.

Від ортогонального базису $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$ можна перейти до ортонормованого базису $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$ шляхом заміни

$$\mathbf{e}_j=\frac{\mathbf{u}_j}{\left\|\mathbf{u}_j\right\|}; \quad e_{j,k}=\frac{u_{j,k}}{\left\|\mathbf{u}_j\right\|}.$$

Результатом виконання другої складової процедури є формування випадковим чином орієнтованого ортонормованого базису $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$. Процедура Грама-Шмідта для випадку $M=N=3$ проілюстрована на рис. 1.

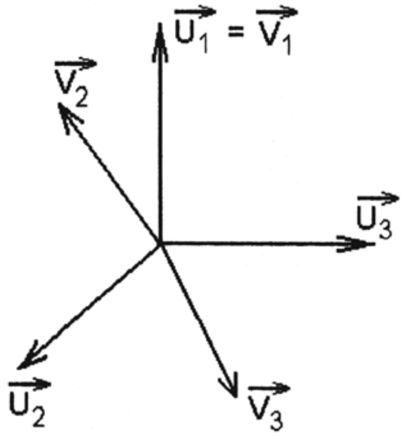

Рис. 1. Ілюстрація процедури Грама-Шмідта для випадку $M=N=3$.

Доповнення процедури Грама-Шмідта для синтезу системи корельованих сигналів

У третій складовій процедури, яка є новим запропонованим у цій статті доповненням до відомої процедури ортогоналізації Грама-Шмідта, з ортонормованого базису $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, необхідно сформувати базис $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, для якого

$$\frac{(\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j)}{\left\|\mathbf{f}_i\right\|\left\|\mathbf{f}_j\right\|}=\begin{cases}r, & i \ne j,\\ 1, & i=j,\end{cases}$$

де r – коефіцієнт кореляції між сигнальними складовими, який необхідно отримати у системі корельованих сигналів, що синтезується.

Для перетворення базису $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1,M}$, $M \le N$, у базис $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1,M}$, $M \le N$, виконаємо операцію (3).

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_j + \gamma\boldsymbol{\eta}, \; j = \overline{1,M}, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{\eta} = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{e}_j$, γ — параметр, який залежить від коефіцієнта кореляції між сигнальними складовими r та від їх кількості M.

Визначимо значення параметра γ. Для цього запишемо вираз для коефіцієнта кореляції $r = r_{ij}$ між двома сигнальними складовими

$$\mathbf{f}_i = \left\{ f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,k}, \dots, f_{i,N} \right\} \text{ та}$$
$$\mathbf{f}_j = \left\{ f_{j,1}, f_{j,2}, \dots, f_{j,k}, \dots, f_{j,N} \right\},$$

векторним представленням яких в $\mathbb{R}^N$ є вектори $\mathbf{f}_i$ та $\mathbf{f}_j$. При цьому $r = \cos\angle(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j)$, що визначатиме співвідношення (4).

$$r = r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_{i,k} f_{j,k}}{N\sigma_i\sigma_j}, \tag{4}$$

де σ_i та σ_j — середньоквадратичні відхилення сигнальних складових $\mathbf{f}_i$ та $\mathbf{f}_j$.

Ураховуючи те, що норми векторів і середньоквадратичні відхилення значень сигнальних складових, які відповідають ним, рівні між собою (внаслідок того, що $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1,M}$, $M \le N$, — ортонормований базис) маємо $\sigma = \sigma_j$, $j = \overline{1,M}$, а також

$$r\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_{i,k} f_{j,k}}{N}. \tag{5}$$

Враховуючи (3), запишемо:

$$\begin{aligned} f_{j,k} &= e_{j,k} + \gamma\eta_k = \\ &= e_{j,k} + \gamma\left(\sum_{n=1}^{j-1} e_{n,k} + e_{j,k} + \sum_{n=j+1}^{M} e_{n,k} \right) = \\ &= (1+\gamma)e_{j,k} + \gamma\sum_{n=1}^{j-1} e_{n,k} + \gamma\sum_{n=j+1}^{M} e_{n,k}. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки складові базису $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1,M}$, $M \le N$, є ортогональними, то

$$\sigma^2 = (1+\gamma)^2\sigma_e^2 + \gamma^2(M-1)\sigma_e^2, \tag{7}$$

$$\sigma_\eta^2 = M\sigma_e^2. \tag{8}$$

Перетворюючи далі вираз (5), одержуємо

$$\begin{aligned} & r\left[(1+\gamma)^2\sigma_e^2 + \gamma^2(M-1)\sigma_e^2 \right] = \\ & = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(e_{i,k} + \gamma\eta_k \right)\left(e_{j,k} + \gamma\eta_k \right)}{N} = \\ & = \frac{\sum_{k=1}^{N} e_{i,k}e_{j,k} + \gamma\sum_{k=1}^{N} e_{i,k}\eta_k + \gamma\sum_{k=1}^{N} e_{j,k}\eta_k + \gamma^2\sum_{k=1}^{N} \eta_k^2}{N} = \\ & = 2\gamma\sigma_e^2 + \gamma^2\sigma_\eta^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Скорочуючи ліву і праву частини (9) на σ_e^2, одержуємо квадратне рівняння відносно γ:

$$(1+\gamma)^2 r + (M-1)\gamma^2 r = 2\gamma + \gamma^2 M;$$

$$(1 + 2\gamma + \gamma^2)r + \gamma^2 Mr - \gamma^2 r = 2\gamma + \gamma^2 M;$$

$$r + 2\gamma r + \gamma^2 r + \gamma^2 Mr - \gamma^2 r = 2\gamma + \gamma^2 M;$$

$$\gamma^2 Mr - \gamma^2 M + 2\gamma r - 2\gamma + r = 0;$$

$$\gamma^2 M(r-1) + 2\gamma(r-1) + r = 0. \tag{10}$$

Розв'язком рівняння (10) відносно γ є:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-2(r-1) \pm \sqrt{4(r-1)^2 - 4Mr(r-1)}}{2M(r-1)} = \\ &= \frac{-(r-1) \pm \sqrt{(r-1)^2 - Mr(r-1)}}{M(r-1)} = \\ &= \frac{1}{M}\left[\frac{-2(r-1)}{2(r-1)} \pm \frac{\sqrt{4\left((r-1)^2 - Mr(r-1) \right)}}{2(r-1)} \right] = \\ &= \frac{1}{M}\left[-1 \pm \sqrt{\frac{4\left((r-1)^2 - Mr(r-1) \right)}{4(r-1)^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{M}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{Mr}{(r-1)}} \right] = \frac{1}{M}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{Mr}{(1-r)}} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, значення параметра γ є функцією, яка залежить від кількості сигнальних складових та кореляційних зв'язків між ними:

$$\gamma(r, M) = \frac{1}{M}\left[\sqrt{1 + \frac{Mr}{(1-r)}} - 1 \right]. \tag{11}$$

У результаті виконання третьої складової процедури одержуємо систему векторів $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1,M}$, $M \le N$, яка задовольняє умові (4) і відповідну їй систему корельованих сигналів з коефіцієнтом взаємної кореляції r для будь-якої пари обраних сигнальних складових.

Функція $\gamma(r,M)$ у (11), за допомогою якої встановлюються певні кореляційні зв'язки між сигнальними складовими і відповідна взаємна орієнтація векторів $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, показана на рис. 2.

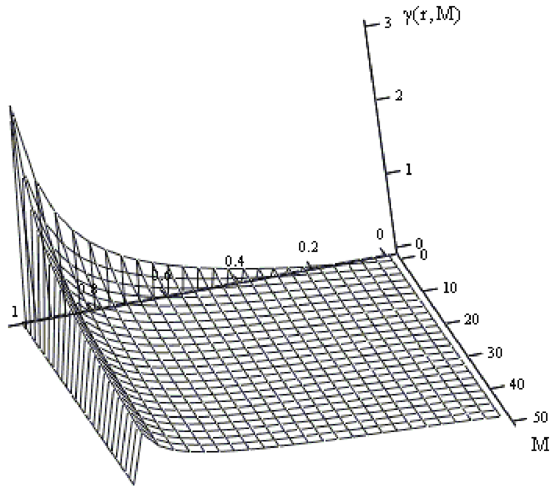

Рис. 2. Графічне зображення функції γ(*r*,*M*).

Перетворення базису векторів $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, у базис $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$, $j=\overline{1,M}$, $M \le N$, нагадує операцію складання парасольки, спиці якої спочатку створюють ортогональний базис $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^N$ (для тривимірного простору $M_{\max} = N = 3$), а потім, при складанні, — базис $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$ з деякими рівними кутами між будь-якими двома векторами (рис. 3).

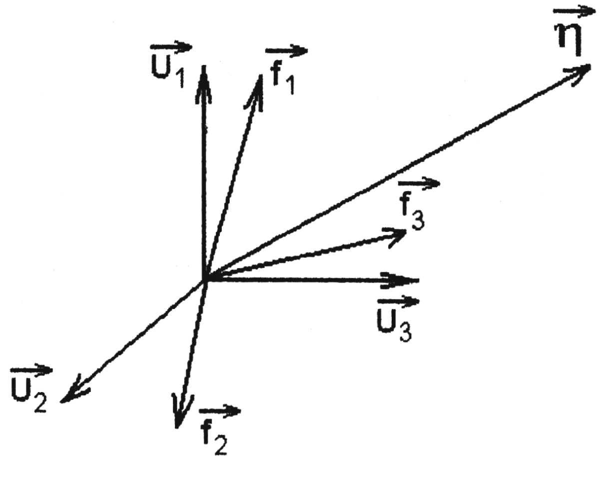

Рис. 3. Формування базису $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^N$, $M = N = 3$.

Висновки

У статті запропоновано розв'язання задачі керування кореляційними зв'язками у базисі сигнальних складових, яке може бути використано у системах обробки сигналів. Обґрунтоване та формалізоване рішення полягає у доповненні (модифікації) відомої процедури ортогоналізації Грама-Шмідта таким чином, що дозволяє встановлювати однакові кореляційні зв'язки між сигнальними складовими у системі сигналів, що синтезується. Представлене рішення при цьому має прийнятну алгоритмічну та обчислювальну складність, що є важливим при практичній реалізації у системах обробки сигналів, яка здійснюється у реальному часі.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Стренг Г.** Линейная алгебра и её применения. Москва, 1980. 456 с.

2. **Ганеев Р. М.** Математические модели в задачах обработки сигналов. М., 2004. 80 с.

3. **Карелин А. Е.,** Светлаков А. А. Использование ортогонализации Грама-Шмидта для повышения экономичности многоточечных алгоритмов рекуррентного оценивания параметров моделей объектов управления. *Известия Томского политехнического университета*. 2006. Т. 309. № 8. С. 15–19. (rus)

4. **Nagase Ryudo,** Oishi Kunio, Furukawa Toshihiro. Synchronous DS/CDMA of recursive oblique projectors using the Gram-Schmidt process. *IEEE 6th Global Conference on Consumer Electronics (GCCE)*. (Nagoya, Japan, 24-27 October 2017). IEEE, 2017. P. 1–5. DOI:10.1109/GCCE.2017.8229252. (eng)

5. **Khobahi Shahin,** Soltanalian Mojtaba. Optimized transmission for consensus in wireless sensor networks. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. (Calgary, Alberta, Canada, 15-20 April 2018). IEEE, 2018. P. 3419–3423.
DOI: 10.1109/ICASSP.2018.8461401. (eng)

6. **Zhao Xiang,** He Zishu, Wang Yikai, Zhang Xuejing, Zhang Wei, Li Jichuan Modified generalized sidelobe canceller for MIMO space-time adaptive processing. *2018 IEEE Radar Conference (RadarConf18)*. (Oklahoma City, OK, USA, 23-28 April 2018). IEEE, 2018. P. 0719–0714. DOI: 10.1109/RADAR.2018.8378646. (eng)

7. **Гантмахер В. Е.,** ***Быстров Н. Е., Чеботарев Д. В.*** Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка. СПб. : Наука и техника, 2005. 400 с.

8. **Holubnychyi A. G.** Barker-like systems of sequences and their processing. *Технология и конструирование в электронной аппаратуре*. 2013. № 6. С. 19–24. DOI: 10.15222/tkea2013.6.19. (eng)

9. **Кузьмин В. М.,** Заліський М. Ю. Статистичний аналіз даних з використанням двосегментної параболічної регресії. *Наукоємні технології*. 2018. Т. 38. № 2. С. 173–177. DOI: 10.18372/2310-5461.38.12834.

10. **Шевченко А. К.** Вибір програмно-апаратних засобів для реалізації операції згортки з підвищеною швидкістю. *Наукоємні технології*. 2018. Т. 37. № 1. С. 49-54. DOI: 10.18372/2310-5461.37.12369.

Голубничий О. Г.

СИНТЕЗ СИСТЕМ КОРЕЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ДОПОВНЕНОЇ ПРОЦЕДУРИ ГРАМА-ШМІДТА

У статті розглянуто задачу синтезу систем корельованих сигналів, які можуть використовуватися при обробці сигналів та даних у інформаційно-телекомунікаційних системах. Для розв'язання задачі керування кореляційними зв'язками обґрунтовано та формалізовано доповнення (модифікація) процедури ортогоналізації Грама-Шмідта, яке дозволяє керувати кореляційними зв'язками у системі сигналів, яка синтезується, за умов встановлення однакових кореляційних зв'язків між сигнальними складовими у ній. Представлене у статті рішення реалізоване з використанням методів лінійної алгебри. Запропоноване рішення має прийнятну алгоритмічну та обчислювальну складність. Отримані результати можуть бути корисними для розв'язання задач аналізу, синтезу та моделювання систем неортогонального множинного доступу (NOMA) у телекомунікаційних системах 5G.

Ключові слова: обробка сигналів; синтез сигналів; кореляційні властивості; ортогоналізація; неортогональний множинний доступ; NOMA 5G.

Holubnychyi A. G.

SYNTHESIS OF SYSTEMS OF CORRELATED SIGNALS USING A SUPPLEMENTATION FOR THE GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALIZATION PROCEDURE

The synthesis of systems of correlated signals, which can be used in signal and data processing techniques for information and communication systems, is considered in the paper. The Gram–Schmidt procedure is a well-known method for orthogonalization of a basis of a vector space, which can represent signal constructions in different signal processing applications. A supplementation for the Gram-Schmidt orthogonalization procedure, which allows controlling the correlations between signal components in a system of signals in condition of equality of these correlations, is justified and formalized in the paper. The presented solution is performed by methods of linear algebra using transformations of signals when representing them in vector spaces. The formation of a new system of non-orthogonal vectors, which corresponds to a system of correlated signals, is implemented through additive transformations in a system of orthogonal vectors, which corresponds to a system of non-correlated signals, after the Gram–Schmidt procedure. The proposed calculation procedure contains an additional interior parameter, which depends both on the number of signal components and on correlations between them. An evaluation procedure for the value of this parameter is formalized and analyzed in the paper. The calculation procedure is adapted for stochastic signals and their processing, which takes into account standard deviations for evaluation of norms of vectors when representing signals in vector spaces. The solution for the synthesis of systems of correlated signals is characterized by a suitable algorithmic and computational complexity, which is important for its practical implementation in real-time signal processing applications. The results obtained in the paper can be used for solving the problems of analysis, synthesis and simulations of non-orthogonal multiple access (NOMA) schemes for the fifth generation (5G) mobile communications.

Keywords: signal processing; signal synthesis; correlation properties; orthogonalization; non-orthogonal multiple access; NOMA 5G.

Голубничий А. Г.

СИНТЕЗ СИСТЕМ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОПОЛНЕННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ГРАМА-ШМИДТА

В статье рассматривается задача синтеза систем коррелированных сигналов, которые могут использоваться при обработке сигналов и данных в информационно-телекоммуникационных системах. Для решения задачи управления корреляционными связями обосновано и формализовано дополнение (модификация) процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, которое позволяет управлять корреляционными связями в синтезируемой системе сигналов при условии формирования одинаковых корреляционных связей между сигнальными составляющими в ней. Представленное в статье решение реализовано с использованием методов линейной алгебры. Предложенное решение имеет приемлемую алгоритмическую и вычислительную сложность. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач анализа, синтеза и моделирования систем неортогонального множественного доступа (NOMA) в телекоммуникационных системах 5G.

Ключевые слова: обработка сигналов; синтез сигналов; корреляционные свойства; ортогонализация; неортогональный множественный доступ; NOMA 5G.

Стаття надійшла до редакції 02.10.2018 р.
Прийнято до друку 05.11.2018 р.