УДК 536.242

Миляев Ю.П. к.т.н., доцент,
Сегай А.М. к.т.н., доцент,
Бахшалієв А.Ш. к.т.н., доцент
Академії муніципального
управління, м. Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМІННОГО ПРИСТРОЮ

У статті досліджується динамічні характеристики теплообмінного пристрою. Проводиться аналіз загального рівняння теплового балансу при різних початкових і граничних умовах. Отримано математичну модель розглянутого об'єкта у вигляді систем диференціального рівняння в приватних похідних. Отримані результати можуть бути використані в різних галузях промисловості.

В статьи исследуется динамические характеристики теплообменного устройства. Проводится анализ общего уравнения теплового баланса при различных начальных и граничных условиях. Получена математическая модель рассматриваемого объекта в виде систем дифференциального уравнения в частных производных. Полученные результаты могут быть использованных в различных отраслях промышленности.

The paper investigates the dynamic characteristics of heat exchangers. The analysis of the general equation of heat balance for different initial and boundary conditions. The mathematical model of the object as a system of differential equations in partial derivatives. The results can be used in various industries

Для стабільної і точної роботи первинних вимірювальних перетворювачів у системах екологічного контролю аналізовані проби, які подаються на вхід приладів, повинні мати певну температуру, відповідну режиму роботи приладів. Це завдання полягає, з одного боку, у дослідженні перехідних процесів, (для швидкодіючих систем), а з іншого боку, у виборі таких параметрів і характеристик осушувача проби, які б забезпечували необхідну вихідну функцію.

Як відомо, існують різні способи осушення. Найбільш поширеними з них є:

1) абсорбційна осушка;
2) адсорбційна осушка;
3) осушка шляхом теплообміну;
4) осушення, заснована на ефекті адіабатичне розширення стисненого повітря.

Абсорбційна осушка заснована на використанні властивості ряду речовин, здатних поглинати воду, вступаючи з нею в хімічну реакцію. Абсорбційна осушка не забезпечує достатньою мірою видалення вологи, незручна в обслуговуванні і дорого обходиться. Тому вона застосовується дуже рідко.

Адсорбційна осушка заснована на здатності ряду речовин (адсорбентів) поглинати вологу. В якості адсорбентів використовуються такі речовини, як силікагель, алюмогель, активована окис алюмінію, активний глинозем, хлористий кальцій, цеоліти.

Однак цей метод не ефективний при осушенні газів, що відходять, так як застосування силікагелю і цеолітів для осушування проби призводить до поглинання газаCO_2, хоча п'яти окис фосфору дає осушку високого ступеня, але при цьому спосіб регенерації скрутний, а інші види адсорбентів не дають високої осушки, незручні в експлуатації і дороги у виготовленні.

При ефекті адіабатичне розширення стисненого повітря відбувається зниження температури. Величина цього ефекту оцінюється величиною виміру внутрішньої енергії, що витрачається на роботу адіабатичне процесу. Для реалізації зазначеного методу потрібен великий витрата газу (близько 30-50м3/час) і великий тиск (порядку 5-8 атм.). через що спосіб осушки менш ефективний. Осушка шляхом теплообміну виробляється в теплообмінниках шляхом пониження температури до точки роси. Глибокої осушки цим методом можна досягти при низьких температурах (для точки роси-60оС, абсолютна вологість дорівнює 0,0095 г/м3).

Однак при негативних температурах в теплообміннику може статися льодоутворення, що призведе до закупорки газової лінії. У зв'язку з цим виникає необхідність обмежитися величиною вихідної температури 1 +2 про при залишковій вологості 3 +5 г/м3. Для первинних вимірювальних перетворювачів (газоаналізаторів), що застосовуються газоаналітичних системах (система економічного контролю), цей вплив не призводить до великих погрішностей, тому даний спосіб осушки є найбільш прийнятним для газоаналітичних систем.

Найбільш характерним і ефективним апаратом з теплообміном через стінку є теплообмінник типу «труба в трубі». Теплообмінники такого типу являють собою дві концентричні труби радіусами r і R. Такі апарати широко застосовуються в хімічній, нафтовій та газовій промисловості та їх дослідженню присвячені численні роботи. Найбільш фундаментальною роботою, на нашу думку, є монографія Дев'ятова Б.Н. [1], яка присвячена питанням теоретичного дослідження динамічних характеристик процесів тепло-і масообміну, здійснюваних за принципом протитечії або прямотока в рухомих середовищах, де наводяться загальні методи аналізу динаміки процесів і враховуються лише основні характерні особливості динамічних характеристик.

Для математичного подання осушувача проби приймаємо наступні припущення:

а) втрати тепла в навколишній простір відсутні;

б) периметр поперечного перерізу поверхні розділу середовищ постійний по всій довжині осушувача проби;

в) теплова ємність стінки осушувача проби мала в порівнянні з тепловою ємністю рухомих середовищ.

За таких припущеннях з рівняння теплового балансу може бути отримано диференціальне рівняння, що описує перехідний процес осушувача проби, яка має наступний вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} &= \chi_1(\Theta_2 - \Theta_1) \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - V_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} &= \chi_2(\Theta_1 - \Theta_2) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Де Θ_1 і Θ_2 відповідно температура першої та другої середовища $V_1 = V_1; V_2 = -V_2$ напрям швидкості другого середовища протилежно швидкості першої середовища (розглядаємо принципи протитоку)

$\chi_1 = \dfrac{K \cdot P}{\omega_1 c_1 \gamma_1}$

Де P- Периметр поперечного перерізу поверхні розділу середовищ;
K - Коефіцієнт теплопередачі

ω_1 - Площа поперечного перерізу першої середовища:

c_1 - теплоємність першого середовища;

γ_1 - його питома вага;

$\chi_2 = \dfrac{K \cdot P}{\omega_2 c_2 \gamma_2}$ - Відповідний коефіцієнт для другого середовища;

ω_2 - площа поперечного перерізу другого середовища.

c_2 - Теплоємність другий середовища;

γ_2 - питома вага;

Система рівнянь являє собою лінійне диференціальне рівняння в приватних похідних першого порядку, яке характеризує роз подільність проти точного процесу осушувача проби.

З метою більш повного виявлення і вивчення перехідного процесу по каналах виміру температури інші умова були упущені.

Наприклад, якщо врахувати одночасні зміна концентрації і зміна температури газів, замість двох рівнянь можна отримати систему з чотирьох рівнянь, які в найбільш загальному вигляді можна представити:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial C_1}{\partial x} V_1 = \phi_1\left(C_1, C_2, \Theta_1, \Theta_2\right) + \lambda_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \\
&\frac{\partial C_2}{\partial t} - \frac{\partial C_2}{\partial x} V_2 = \phi_2\left(C_1, C_2, \Theta_1, \Theta_2\right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} \\
&\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} V_1 = \phi_3\left(C_1, C_2, \Theta_1, \Theta_2\right) + \lambda_3 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} \\
&\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} V_2 = \phi_4\left(C_1, C_2, \Theta_1, \Theta_2\right) + \lambda_4 \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2}
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ - коефіцієнти турбулентного тепло переносу або масообміну.

Тобто виходять нелінійні системи рівнянь, значно відрізняються від систем рівнянь (1).

Дослідження системи рівнянь представляє теоретичний і практичний інтерес і може бути вивчено як самостійний питання. Особливо, якщо ми до вирішення питання підходимо з інформаційної точки зору. При цьому рішення нелінійних систем рівнянь дасть можливість бачити такі особливості процесу як втрати інформації в осушувачі проби, вплив зміни температури на концентрацію, вибір параметрів осушувача проби та дії, що обурює (вхідна температура), при якому втрати інформації мінімальні і т.д. Крім того, швидкість руху середовища по осушувача проби брали постійної, рівної її середнього значення. Насправді з-за зміни температури газу змінюється його обсяг, і, отже, спостерігається зміна його швидкості по довжині апарату і за часом $V(x,t)$ Зміна обсягу газу тягне за собою такі зміни коефіцієнта æ за рахунок зміни щільності. Вираз для $V(x,t)$ та æ(x,t) можуть бути записані у вигляді:

$$V_1(x,t) = V_1(0) \cdot \frac{\Theta_{10}^* + \Theta_{10} \cdot \Theta_1(x,t)}{\Theta_{10}^* + \Theta_{10}} \qquad (3)$$

$$\chi(x,t) = \chi(0) \cdot \frac{\Theta_{10}^* + \Theta_{10} \cdot \Theta_1(x,t)}{\Theta_{10}^* + \Theta_{10}} \qquad (4)$$

Де Θ_{10} - Величини стрибка температури на вході осушувача проби, виражена в градусах Цельсія;

Θ_{10}^{*} - Значення температури на вході до впливу стрибка, виражена в градусах Кельвіна;

$\Theta_1(x,t)$ Змінюється за довжиною і за часом температури середовища;

$V_1(0)$ - Значення швидкості на вході осушувача для нового режиму;

$\chi_1(0)=\chi_1$ при $\rho_1=\rho_1(0)$; $\chi_2(0)=\chi_2$ при $\rho_2=\rho_2(0)$

Аналогічним чином можна записати для $V_2(x,t)$ та $\chi_2(x,t)$.

Якщо врахувати ці зміни, загальні рівняння будуть мати наступний вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}V_1(0)\cdot\frac{\Theta_{10}^{*}+\Theta_{10}\cdot\Theta_1(x,t)}{\Theta_{10}^{*}+\Theta_{10}}=(\Theta_2-\Theta_1)\chi_1(0)\cdot\frac{\Theta_{10}^{*}+\Theta_{10}\cdot\Theta_1(x,t)}{\Theta_{10}^{*}+\Theta_{10}}\\
&\frac{\partial\Theta_2}{\partial t}-\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}V_2(0)\cdot\frac{\Theta_{20}^{*}+\Theta_{20}\cdot\Theta_2(x,t)}{\Theta_{20}^{*}+\Theta_{20}}=(\Theta_1-\Theta_2)\chi_2(0)\cdot\frac{\Theta_{20}^{*}+\Theta_{20}\cdot\Theta_{20}(x,t)}{\Theta_{20}^{*}+\Theta_{20}}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Рівняння являє собою складну нелінійну систему в приватних похідних.

Систему рівнянь вирішимо методом операційного числення, при цьому приймемо початкові рівняння:

$$\Theta_1(x,0)=0;\ \Theta_2(x,0)=0;$$

Тобто застосовуємо нульові початкові умови. Граничні умови приймемо наступні:

$$\Theta_1(0,t)=\Theta_0(t)$$

$$0\le x\le l$$

Де l - загальна довжина осушувача проби.

Системи рівнянь запишемо в наступному вигляді:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{V_1}\cdot\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}=\frac{\chi_1}{V_1}(\Theta_2-\Theta_1)\\
&\frac{1}{V_2}\cdot\frac{\partial\Theta_2}{\partial t}-\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}=\frac{\chi_2}{V_1}(\Theta_1-\Theta_2)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Застосуємо до системи рівнянь перетворення Лапласа по змінному t, а змінну x будемо вважати при виконанні перетворення незмінною.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{V_1}\cdot S\Theta_1(x,s)+\frac{d\Theta_1(x,s)}{dx}-\frac{\chi_1}{V_1}\Theta_2(x,s)+\frac{\chi_1}{V_1}\Theta_1(x,s)=0\\&\frac{1}{V_2}\cdot S\Theta_2(x,s)-\frac{d\Theta_2(x,s)}{dx}-\frac{\chi_2}{V_2}\Theta_1(x,s)+\frac{\chi_2}{V_2}\Theta_2(x,s)=0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Звідси:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\Theta_1(x,s)}{dx}-\left(\frac{S+\chi_1}{V_1}\right)\Theta_1(x,s)-\frac{\chi_1}{V_1}\Theta_2(x,s)=0\\&\frac{d\Theta_2(x,s)}{dx}-\left(\frac{S+\chi_2}{V_2}\right)\Theta_2(x,s)+\frac{\chi_2}{V_2}\Theta_2(x,s)=0\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Де S - перетворення Лапласа

Застосувавши тепер до системи рівнянь перетворення Лапласа по x, ми отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}&Y\Theta_1(Y,S)-\Theta_1(0,S)+\xi_1\Theta_1(Y,S)-\lambda_1\Theta_2(Y,S)=0\\&Y\Theta_2(Y,S)-\Theta_2(0,S)-\xi_2\Theta_2(Y,S)+\lambda_2\Theta_1(Y,S)=0\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Де

$\xi_1=\frac{\chi_1+S}{V_1}$; $\quad\quad \xi_2=\frac{\chi_2+S}{V_2}$

$\lambda_1=\frac{\chi_1}{V_1}$; $\quad\quad \lambda_2=\frac{\chi}{V_2}$

Із системи рівнянь (9) визначимо:

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_1(Y,S)=\frac{\Theta_1(0,S)+\lambda_1\Theta_2(Y,S)}{Y+\xi_1}\\&\Theta_2(Y,S)=\frac{\Theta_2(0,S)-\lambda_2\Theta_1(Y,S)}{Y-\xi_2}\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Підставляючи значення в рівняння, $\Theta_2(Y,S)$ (9) можемо отримати:

$$(Y+\xi_1)(Y-\xi_2)\cdot\Theta_1(Y,S)=(Y-\xi_2)\cdot\Theta_1(Y,S)+\lambda_1\Theta_2(0,S)-\lambda_1\lambda_2\Theta_1(Y,S) \quad (11)$$

Звідси:

$$\Theta_1(Y,S)=\frac{(Y-\xi_2)\cdot\Theta_1(0,S)+\lambda_1\Theta_2(0,S)}{[(Y+\xi_1)\cdot(Y-\xi_2)]+\lambda_1\lambda_2} \quad (12$$

Аналогічним чином для другого середовища

$$\Theta_2(Y,S)=\frac{(Y+\xi_1)\cdot\Theta_2(0,S)-\lambda_2\Theta_1(0,S)}{\left[(Y+\xi_1)\cdot(Y-\xi_2)\right]+\lambda_1\lambda_2} \qquad (13)$$

Перейдемо від зображення Y до оригіналу змінним x. З цією метою рівняння запишемо в наступному вигляді:

$$\Theta_1(Y,S)=\frac{(Y-\xi_2)\cdot\Theta_1(0,S)+\lambda_1\Theta_2(0,S)}{\left[(Y-Y_1)\cdot(Y-Y_2)\right]} \qquad (14)$$

Де Y_1 та Y_2 коріння квадратного рівняння.

$$Y^2+(\xi_1-\xi_2)Y+\lambda_1\lambda_2-\xi_1\xi_2=0$$

Які дорівнюють:

$$Y_1=\frac{(\xi_2-\xi_1)+\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2-4\lambda_1\lambda_2+4\xi_1\xi_2}}{2}=\frac{(\xi_2-\xi_1)+\sqrt{(\xi_1+\xi_2)^2-4\lambda_1\lambda_2}}{2}$$

$$Y_2=\frac{(\xi_2-\xi_1)-\sqrt{(\xi_1+\xi_2)^2-4\lambda_1\lambda_2}}{2}$$

Таким же чином:

$$\Theta_2(Y,S)=\frac{(Y+\xi_1)\cdot\Theta_2(0,S)-\lambda_2\Theta_1(0,S)}{\left[(Y-Y_1)\cdot(Y-Y_2)\right]} \qquad (15)$$

Оскільки для нас представляє інтерес зміна температури першої середовища (контролює газ), то надалі будемо розглядати рівняння (14) тоді:

$$\Theta_1(Y,S)=\frac{Y\Theta_1(0,S)}{(Y-Y_1)(Y-Y_2)}-\frac{\xi_2\Theta_1(0,S)}{(Y-Y_1)(Y-Y_2)}+\frac{\lambda_1\Theta_2(0,S)}{(Y-Y_1)(Y-Y_2)} \qquad (16)$$

Оригінал окремих доданків рівнянь по змінному має вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
&L^{-1}\left[\frac{Y\Theta_1(0,S)}{(Y-Y_1)(Y-Y_2)}\right]=\frac{Y_1}{Y_1-Y_2}\cdot\Theta_1(0,S)\cdot e^{Y_1X}-\frac{Y_2}{Y_1-Y_2}\Theta_1(0,S)e^{Y_2X}\\
&L^{-1}\left[-\frac{\xi_2\Theta_1(0,S)}{(Y-Y_1)(Y-Y_2)}\right]=-\xi_2\frac{1}{Y_1-Y_2}\Theta_1(0,S)e^{Y_1X}+\xi_2\frac{1}{Y_1-Y_2}\Theta_1(0,S)e^{Y_2X}\\
&L^{-1}\left[\frac{\lambda_1\Theta_2(0,S)}{(Y-Y_1)(Y-Y_2)}\right]=\lambda_1\frac{1}{Y_1-Y_2}\Theta_2(0,S)\cdot e^{Y_1X}-\lambda_1\frac{1}{Y_1-Y_2}\Theta_2(0,S)e^{Y_2X}
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Де L^{-1} - зворотне перетворення Лапласа.

Для синтезу отриманих трансцендентних функцій за допомогою ЕОМ може бути використаний один з способів, запропонованих у роботах. Таким чином на основі отриманої моделі можна досліджувати динаміку процесу для даного об'єкта при різних початкових і граничних умовах.

Використані джерела інформації:

1. Девятов Б.Н. Теория переходных процессов технологических аппаратов с точки зрения задач управления. Новосибирск, издательство СО АН СССР,1964.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.. «Наука», 1965
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложение. М., Физматчиз. 1958

Рецензент: д.т.н. Нестеров В.С.