

Кузьмичов А.І., к.т.н., доцент  
Академії муніципального  
управління, м. Київ

## ОПТИМАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ОДНОРІДНИХ СТРУКТУРНИХ ОДИНИЦЬ ЗА МЕТОДОЛОГІЄЮ DEA

---

*Математична модель задачі оптимального оцінювання – це нелінійна задача дробово-лінійного програмування. Результатом методології DEA є лінеаризація цієї нелінійної задачі та її розв'язок ефективним симплекс-методом. Таким чином, аналітична методологія DEA дозволяє: визначити загальні показники однорідних одиниць по початковим даним «входи-виходи», оцінити ці одиниці шляхом порівняння їх узагальнених показників, а по отриманим оцінкам побудувати їх рейтинг; усю сукупність однотипних одиниць розділити на дві групи умовною граничною лінією фронту ефективності.*

*Математическая модель задачи оптимального оценивания – это нелинейная задача дробно-линейного программирования. Результатом методологии DEA является линейаризация этой нелинейной задачи и ее решение эффективным симплекс-методом. Таким образом, аналитическая методология DEA позволяет: определить общие показатели однородных единиц по начальным данным «входы-выходы», оценить эти единицы путем сравнения их обобщенных показателей, а по полученным оценкам построить их рейтинг; всю совокупность однотипных единиц разделить на две группы условной граничной линией фронта эффективности.*

*Mathematical model of the optimal estimation is a nonlinear problem of fractional-linear programming. Result of methodology DEA is linearization this nonlinear problem and its decision by effective simplex method. Thus, the DEA analytical methodology allows you to define common indicators of homogeneous units on initial data input-output, assess these units by comparing their aggregated, and the estimated build their rating; the totality of similar units divided into two groups of conventional frontline of efficiency.*

Будь-яка галузь, служба, організація чи їх підрозділи зі сфери виробництва, надання послуг чи безприбуткової діяльності<sup>4</sup> мають

---

<sup>4</sup> це: сільське господарство, банківський та страховий бізнес, наукові дослідження, проектування та конструювання, освіта, екологія, економіка, державна та гуманітарна політика, охорона здоров'я,

організаційну структуру, яка є поєднанням певної кількості однорідних складових одиниць, на найнижчому рівні організаційної структури – це окремі працівники, вищих – їх колективи. Кожна структурна одиниця характеризується фіксованим набором показників, цей набір складається з двох частин: входів та виходів у відповідному вимірі, де входи – це певні показники щодо наданих можливостей однакового типу для здійснення однакової діяльності (витрати ресурсів), а виходи – відповідні показники результатів такої діяльності (прибуток від випуску готової продукції, віддача, якість, ефективність).

Функція кожної такої одиниці – виконання типових операцій з перетворення входів на виходи, коли, скажімо, надані ресурси витрачаються для випуску кінцевої продукції (товарів чи послуг) чи здійснення певних організаційних заходів. З позицій операційного менеджменту кожна таку уніфіковану одиницю називають операційною системою [1], її ефективність оцінюється відношенням виходів до входів. За умови одного входу та одного виходу оцінкою ефективності окремої одиниці є відношення значення виходу до значення входу, у техніці це коефіцієнт корисної дії, яким керуються для порівняльного аналізу типових одиниць.

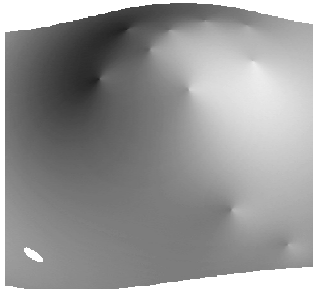
На підприємстві такими однорідними виконавчими одиницями є окремі працівники чи їх групи (ланки, бригади), що виконують однакову роботу, аналогічно, це: регіональні відділення в лікарнях чи банках, відділки у міліції, військові підрозділи в армії, відділи, класи, групи, факультети, філії у наукових чи навчальних закладах, команди чи окремі спортсмени у певному виді спортивних змагань, колективи та виконавці у мистецтві тощо.

Отже, для керування діяльністю будь-якої організації із розгалуженою й розподіленою у просторі структурою, складеної з однорідних одиниць, треба у першу чергу уміти об'єктивно оцінювати ефективність окремої виробничої одиниці, щоб мати змогу однозначно порівнювати їх між собою, визначаючи відповідний рейтинг і надалі ставити завдання аутсайдерам й обґрунтовано відзначати лідерів.

Задача такого оцінювання є надзвичайно актуальною й, одночасно, далеко не простою, коли кожна організаційна одиниця характеризується комбінацією кількох входів та кількох виходів різної природи. Загальний розмір такої задачі оцінювання  $n$  однорідних одиниць позначається трійкою  $(n, m, s)$ , де  $n$  – кількість одиниць,  $m$  – кількість входів,  $s$  – кількість виходів, відповідно, початковими даними задачі оцінювання є дві прямокутні матриці входів та виходів розміром  $n \times m$  та  $n \times s$  відповідно.

Майже 50 років тому для розв'язання задач оцінювання  $n$  об'єктів з  $m$  входами та  $s$  виходами ( $m, s > 1$ ) виникла на рівні ідеї [2], поступово сформувалася [3-4], а тепер активно розвивається й застосовується [5-6] сучасна аналітична методологія оцінювання DEA (Data Envelopment Analysis<sup>5</sup>). Інтуїтивно вона визначає оригінальну техніку порівняльного аналізу однорідних організаційних одиниць<sup>6</sup>, яка базується на формуванні за заданими даними (входи-виходи або витрати-випуск) своєрідної границі – уявної лінії чи поверхні, на площині чи, найчастіше, в абстрактному багатовимірному просторі – що наче *огортає* дані з певного боку.

За своєю суттю ця границя розділяє множину одиниць навпіл, де одна частина множини (лідери) розміщується безпосередньо на границі, утворюючи її, інша частина (аутсайтери) – поза неї: в задачі на максимум під нею, на мінімум – над нею. На відміну такої границі відомі інші границі: в економічних дослідженнях це фронт ефективності (efficiency frontier), на війні це лінія фронту, між сусідніми державами – лінія державного кордону тощо, у цих прикладах класична границя перетинає множину, *розмежовуючи* одну її частину від іншої (аналог – лінія тренду, що проходить проміж точок спостережень).



Визначення такої огортуючої границі у багатовимірному просторі та одиниць, що їй належать, її дослідження та застосування – предмет методології DEA, яку вважають непараметричною, бо вона орієнтується на аналіз і вплив на кінцевий результат не окремого параметру, а на порівняльний аналіз усієї сукупності даних «входи-виходи» різної природи і виміру й вибір кращих серед багатьох претендентів.

Ясно, що це процес оптимізації, де здійснюється вибір таких невідомих, за якими досягається екстремум визначеної цільової функції за умов обмежень на шукані невідомі. Тож як і завжди в оптимізації, можливі два підходи-критерії до організації оцінювання, де кращою одиницею вважається та, для якої: а) входи (витрати) мінімальні, б) виходи (випуск) максимальні.

Так, якщо виходи кожної окремої одиниці уявити зваженою точкою на тривимірному графіку, тоді в задачі максимізації (скажімо, доходів,

<sup>5</sup> envelopment – охоплення (рос. – охват), його суть – формування і аналіз граничної функції-фронту, що наче «охоплює» дані. За відсутністю усталеного перекладу DEA українською чи російською мовами, що зробити непросто за багатозначністю цього словосполучення, автори публікацій це поняття представляють у досить вільному перекладі й тлумаченні як от (рос.): анализ среды функционирования, анализ вложенности данных, оболочечный анализ данных, анализ огибающей массив данных кривой, комплексный анализ данных, метод свёртки, метод сравнительного оценивания; (укр.): аналіз кривої, що відображає масив даних, аналіз оболонки даних, метод побудови граничної кривої на основі показників підприємств

<sup>6</sup> їх точна назва DMU (decision making unit) – одиниця, яку оцінюють для прийняття щодо її рішення

ефективності чи корисності) граничний фронт огортає усю сукупність цих точок зверху, наче пеленою (рис.), де уявна угнута поверхня натягнута на кілки «високих» точок, що вважаються лідерами, під якою знаходяться усі інші точки-аутсайтери.

У задачі мінімізації входів (скажімо, витрат коштів чи матеріальних витрат) шуканий граничний фронт огортає задані точки знизу, наче підставляючи під ці уявні точки долоні, формуючись на найнижчих, найбільш економних точках у вигляді опуклої поверхні.

Отже, в залежності від вибраного критерію оцінювання й відповідної цільової функції дані (входи-виходи) мають верхню чи нижню границі ефективності, які є основою порівняльного аналізу й прийняття рішень за методологією DEA. Цю огортуючу границю (envelopment) утворюють успішні одиниці-лідери, що за об'єктивним оцінюванням співвідношень між їх виходами і входами є кращими у порівнянні з усіма іншими. На цій границі знаходиться порівняно невелика за кількістю верхівка (топ) рейтингу будь-яких однорідних одиниць (можливо, одна), це: моделі автомобілів чи ПК, фірми з надання медичних чи туристичних послуг, компанії-виробники певної продукції, програмні продукти, наукові методи для розв'язання конкретних задач, держави за певними показниками, особистості, цінні папери, будь-які організації чи їх структурні підрозділи у певній сфері діяльності тощо, цей рейтинг складається за певними критеріями у певних сферах чи формах діяльності за певний період, тож усі, хто поза цієї границі, – аутсайтери.

Оскільки організація і здійснення такого вибору має бути оптимальними, ця методологія оцінювання стала можливою лише з появою сучасних методів і технології математичної оптимізації. Тож аналітична методологія DEA почала формуватися з середини 50-их років ХХ ст. у початковий період бурхливого застосування методів лінійного програмування (ЛП) з використанням перших вкрай недосконалих серійних комп'ютерів і скоро виокремилась визначенням специфічного класу задач, альтернативного до класичних задач математичної оптимізації.

Адже, за усталеною традицією й навіть у відповідності слову «програмування» («планування»), класичний апарат математичного програмування (ЛП у тому числі) фактично застосовується для визначення оптимального плану на майбутнє, формуючи відповідь на запитання «що буде, якщо...», де щойно отриманий результат оптимізаційного моделювання є лише прогнозом для наступних подій: «так буде, якщо...».

Аналітика DEA, навпаки, маючи таблицю «входи-виходи», застосовує апарат ЛП для оптимального оцінювання подій, фактів і результатів реальної діяльності об'єктів дослідження, що вже здійснені й

відтворені у цій таблиці, відповідно, нею визначено новий тип задач оптимізації, постановка і розв'язання яких представлені у цій роботі.

З економічної теорії відомий принцип, за яким усі комбінації кількох входів ( $X$ ) та одного виходу ( $y$ ) для окремої управлінської одиниці (або операційної системи) представлені виробничою функцією  $y = f(X)$ , за допомогою якої можна знайти максимальне значення виходу ( $y$ ), яке досягається при певній комбінації входів  $X = (x_1, \dots, x_m)$ . Тож змінюючи значення певних входів як параметрів, можна сформулювати модель параметричного ЛП й побудувати відповідний фронт ефективності – граничну лінію економічного, виробничого чи організаційного процесу, яка розмежовує ефективні й неефективні комбінації входів-виходу (характерний приклад – фронт ефективності в портфельному аналізі інвестиційної діяльності).

З-за обмеженості одним виходом (інтегральним показником ефективності) й виникла проблема реалізації цього принципу і побудови такого фронту для оцінювання ефективності кількох однорідних одиниць з кількома виходами  $Y = (y_1, \dots, y_s)$ , де практично неможливо зафіксувати й проаналізувати усі комбінації «входи-виходи».

Тож сучасна методологія DEA стала складовою узагальненої технології побудови фронтів ефективності, які розділяють усю сукупність об'єктів дослідження на дві частини – ефективні й неефективні.

Оскільки порівняльною оцінкою ефективності окремої одиниці є відношення її зважених виходів (лінійна форма Виходи) до її зважених входів (лінійна форма Входи), кожна у вигляді лінійних функцій, тобто, це дріб  $e = \frac{\text{Виходи}}{\text{Входи}}$ , де шукані невідомі – вагові коефіцієнти – входять у чисельник і знаменник. Постає задача оптимізації – якими мають бути ці вагові коефіцієнти для конкретно заданої одиниці, щоб її ефективність ( $e$ ) була максимальною за обмеження, що ефективність усіх одиниць не перевищує 1 (100%).

Якщо надалі цю ж задачу повторити для усіх інших одиниць, утворюються об'єктивні умови порівняння цих одиниць між собою, бо кожна з них тепер має оптимальні вагові коефіцієнти власних входів та виходів.

Математична модель визначеної таким чином задачі оптимізації з дробово-лінійними цільовою функцією й функціями обмежень, є явно нелінійною, тож у складі математичного програмування [7] визначено клас моделей дробово-лінійного програмування (ДЛП, linear fractional programming, LFP), відповідно, «родзинкою» досліджень засновників DEA, які є піонерами лінійного програмування [8-9], став серйозний математичний результат, за яким спеціальними засобами лінеаризації нелінійна задача ДЛП зводиться до задачі ЛП з наступним її розв'язанням ефективним симплекс-методом. Це дає змогу одночасно суттєво спростити

й пришвидшити процедуру пошуку оптимуму й підсилити її за рахунок отримання двоїстих оцінок і здійснення аналізу чутливості отриманого оптимального плану.

Таким чином, аналітична (Analysis) методологія DEA дозволяє:

- визначити узагальнені показники однорідних одиниць за початковими даними «входи-виходи» (Data), оцінити ці одиниці шляхом порівняння їх узагальнених показників, а за отриманими оцінками побудувати їх рейтинг
- усю сукупність однорідних одиниць розмежувати на дві групи умовною граничною лінією фронту ефективності (Envelopment), де лінію фронту визначають один чи можливо кілька ефективних лідерів (з однаковими оцінками), а поза неї – усі інші,

із застосуванням засобів оптимізаційного моделювання.

### Задача оптимального оцінювання однорідних одиниць

#### Постановка задачі

Організаційна структура складена з  $n$  однорідних одиниць

$$O = (o_1, \dots, o_j, \dots, o_n),$$

кожна має  $m$  входів та  $s$  виходів,  $j = 1, \dots, n$ , де окрема  $j$ -та одиниця це: підрозділ будь-якої організації чи просто рядовий виконавець, необхідно оцінити ефективність кожної з них, щоб порівняти їх між собою.

Кожна  $j$ -та одиниця  $o_j$  представлена парою «входи-виходи»  $(x_j, y_j)$ , де:

$j$ -ий вхід – це вектор  $x_j = (x_{j1}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jm})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$j$ -ий вихід – це вектор  $y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jr}, \dots, y_{js})$ ,  $r = 1, \dots, s$ .

Таким чином, початкові дані (складова Data у методології DEA) задані двома матрицями:

- входів  $X = \{x_{ji}\}$  розміром  $n \times m$  та
- виходів  $Y = \{y_{jr}\}$  розміром  $n \times s$ :

	m входів					s виходів				
$O_1$	$x_{1,1}$	...	$x_{1,i}$	...	$x_{1,m}$	$y_{1,1}$	...	$y_{1,r}$	...	$y_{1,s}$
...										
$O_j$	$x_{j,1}$	...	$x_{j,i}$	...	$x_{j,m}$	$y_{j,1}$	...	$y_{j,r}$	...	$y_{j,s}$
...										
$O_n$	$x_{n,1}$	...	$x_{n,i}$	...	$x_{n,m}$	$y_{n,1}$	...	$y_{n,r}$	...	$y_{n,s}$

Ставиться задача пошуку таких вагових коефіцієнтів певної ( $p$ ) одиниці,  $p = 1, \dots, n$ :

- для входів  $V = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$ , де  $v_i$  – «вага»  $i$ -го входу,  $i = 1, \dots, m$  та
- для виходів  $U = (u_1, \dots, u_r, \dots, u_s)$ , де  $u_r$  – «вага»  $r$ -го виходу,  $r = 1, \dots, s$ , щоб визначити:
- максимальну ефективність цієї  $p$ -ої одиниці:

$$e_p = \frac{UY_p}{VX_p} = \frac{u_1 y_{p,1} + \dots + u_r y_{p,r} + \dots + u_s y_{p,s}}{v_1 x_{p,1} + \dots + v_i x_{p,i} + \dots + v_m x_{p,m}}$$

за умови, що оцінки ефективності усіх одиниць не перевищують 1 (100%)

$$\frac{UY_j}{VX_j} \leq 1, j = 1, \dots, n.$$

### Математична модель задачі оцінювання у формі ДЛП

I. Знайти вектори  $V = \{v_i\}$ ,  $U = \{u_r\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, s$ , щоб

II. ЦФ  $\frac{UY_p}{VX_p} \rightarrow \max, p \in \{1, \dots, n\}$

III. при  $\frac{UY_j}{VX_j} \leq 1, j = 1, \dots, n$

$$v_i \geq 0$$

$$u_r \geq 0.$$

### Математична модель задачі оцінювання у формі ЛП

I. Знайти вектори  $V = \{v_i\}$ ,  $U = \{u_r\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $r = 1, \dots, s$ , щоб

II. ЦФ  $UY_p \rightarrow \max, p \in \{1, \dots, n\}$

III. при  $UY_j - VX_j \leq 0, j = 1, \dots, n$

$$VX_p = 1$$

$$v_i \geq 0$$

$$u_r \geq 0.$$

### Варіанти задачі та їх розв'язання

Щоб краще зрозуміти сутність методології DEA, на початку розглянемо спрощені постановки поставленої задачі, які б дозволили представити результати у наочній формі. Для цього скористаємось графічними методами розв'язання таких задач, де розв'язок задачі супроводжується побудовою відповідних геометричних конструкцій.

#### Задача (5, 1, 1): 1-вхід (x), 1-вихід (y)

Оцінюються п'ять однорідних команд виконавців, що випускають однакову продукцію (Y), витрачаючи певний ресурс (X), для цього обчислюється їх продуктивність (Y/X) та ефективність (у відношенні до продуктивності кращої команди):

Одиниця	Витрати (X)	Випуск (Y)	P (Y/X)	E (P/max P)
K-1	15	60	4,0	0,80
K-2	10	48	4,8	0,96
K-3	20	70	3,5	0,70
K-4	12	60	5,0	1,00
K-5	16	72	4,5	0,90

Найвищу продуктивність  $P$  ( $Y/X$ ) має команда K-4 (5,0), відносно її визначається ефективність ( $E$ ) усіх інших команд-аутсайдерів. Кожна з них, орієнтуючись на лідера, може тепер визначити для себе наступні дії, щоб отримати відповідні показники. Скажімо, якщо б команда K-1, користуючись якістю ресурсів, досвідом і технологією, що має лідер, досягла такої ж продуктивності (5), вона б: а) випустила  $60/0,8 = 75$  од. продукції (25% росту) або ж б) витратила для наявного результату (60)  $15*0,8=12$  од. ресурсу замість 15.

Сказане означає, що визначення ефективного лідера (інакше, границі ефективності для багатьох учасників) є підставою для кожного з них визначити шляхи до покращення власних показників й оцінити відповідні показники.

Отже, огортуючою масив даних границею ефективності є пряма лінія, на якій розміщується ефективний лідер K-4 ( $e_4 = 1$ ), усі інші виконавці – поза цієї лінії (аутсайдери), рис. 1.

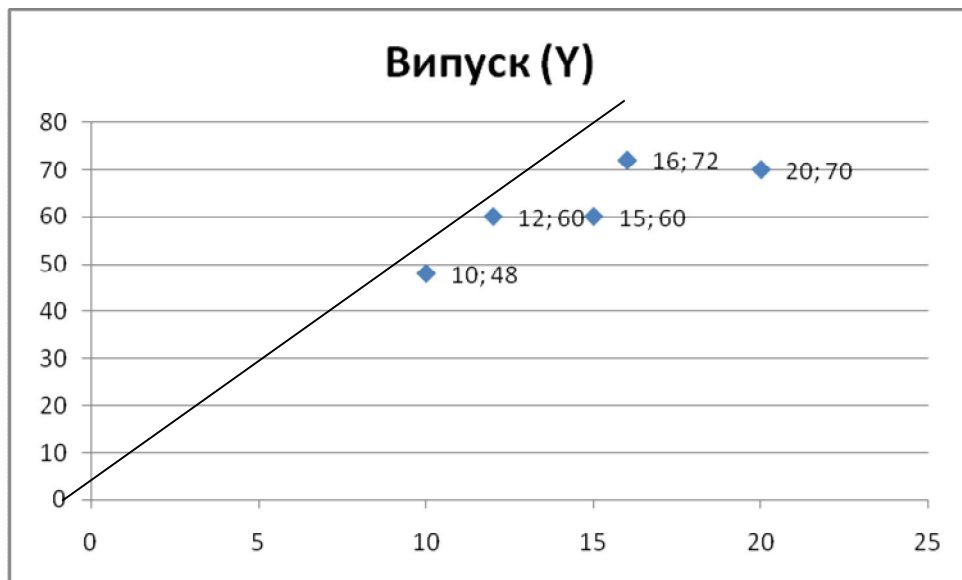


Рис. 1

### Задача (5, 1, 2): 1-вхід (x), 2-виходи ( $y_1, y_2$ )

Аналізується діяльність п'яти стандартних відділень банку з метою об'єктивного оцінювання їх діяльності та ранжування за показниками



ефективності. Відділення надають однакові послуги і мають однакове ресурсне забезпечення (персонал, приміщення, капітал) у вартісному вимірі величиною 100 од., це означає, що витрати на надання послуг у них однакові, зате показники щодо кредитів та депозитів різні.

Ця штучна постановка задачі (з однаковими входами) утворена з метою побудови графіка ефективності цих відділень, визначення на ньому границі ефективності й, відповідно, лідерів та аутсайдерів.

Відомості про діяльність відділень за квартал представлені таблицею:

<i>Відд ілення</i>	<i>Ви трати</i>	<i>Кр едити</i>	<i>Деп озити</i>
В-1	<b>100</b>	10	31
В-2	100	15	25
В-3	100	20	30
В-4	100	23	23
В-5	100	30	20

Вхі

д

Виходи

де стовпець Витрати представляє вхід (наприклад, в тис. гр. од.), а осереднені дані у двох стовпцях Кредити та Депозити – це виходи (надані послуги в сотнях тис. гр. од.). Оскільки витрати відділень однакові, є можливість оцінити їх ефективність зображенням лише виходів у графічній формі, де у 2-вимірній системі координат Кредити ( $y_1$ ), Депозити ( $y_2$ ) виходи кожного відділення представлені точкою з відповідними координатами ( $y_1, y_2$ ):

В-1 (10,31), В2 (15,25), В3 (20, 30), В4 (23, 23), В5 (30, 20), рис. 2.

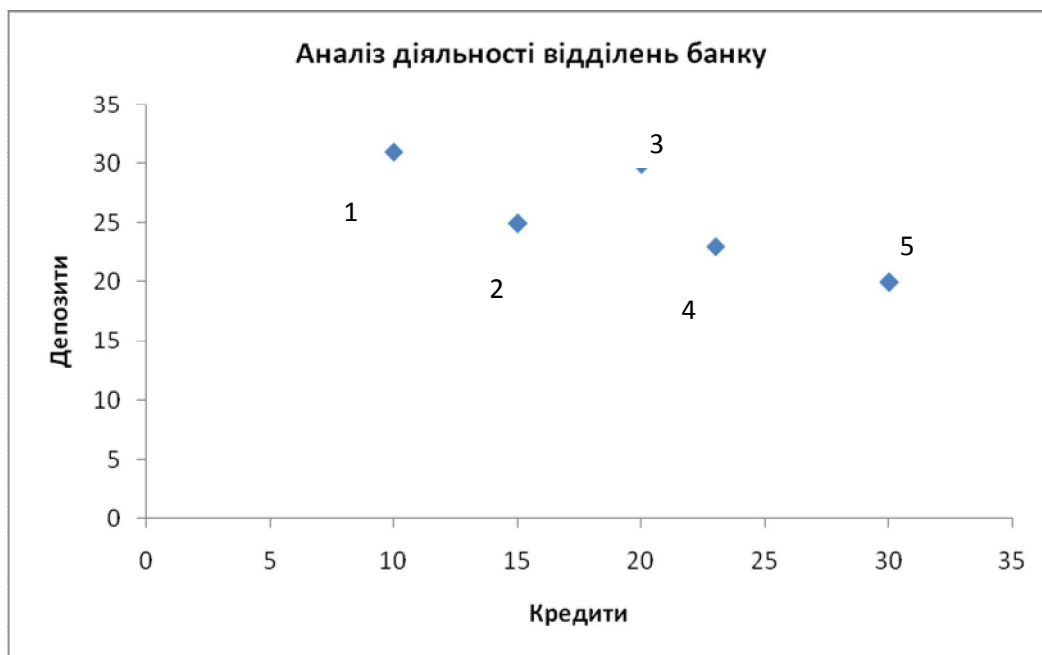


Рис. 2

Завдяки однаковим входам з таблиці початкових даних можна визначити показник ефективності кожного відділення і побудувати рейтинг ефективностей, для цього треба мати вагові коефіцієнти виходів (критерій оцінювання), бо кожне відділення працює у різних умовах (в центрі міста чи на околицях) й комусь оформити, скажімо, депозитів на певну суму набагато важче, ніж іншим, тому кожен вихідний показник має певну «вагу» – ваговий коефіцієнт й для кожного відділення вони можуть відрізнятися.

Але поки що для порівняння ефективності відділень задамо довільні вагові коефіцієнти обох виходів ( $u_1, u_2$ ), єдині для усіх відділень, що визначають певну «цінність» вихідних показників (кредити та депозити), щоб обчислити величину продуктивності  $p_i = u_1 u_i + u_2 u_i$  відділень,  $i = 1, \dots, 5$ . Якщо, скажімо,  $u_1=3$  (кредити),  $u_2=33$  (депозити), отримаємо таблицю:

Відділення	Витрати	Вагові коефіцієнти		P	E
		3	33		
		Кредити	Депозити		
В-1	100	10	31	1053	1,000
В-2	100	15	25	870	0,826
В-3	100	20	30	1050	0,997
В-4	100	23	23	828	0,786
В-5	100	30	20	750	0,712
	Вхід	Виходи			

де стовпець P містить зважені значення продуктивностей  $p_i$ , стовпець E містить відносні (щодо максимальної продуктивності 1053 для В-1) рівні

ефективності відділень, де найкращим є 1-ше (з найбільшим числом «цінних» депозитів), близькими до нього 3-тє та 2-ге відділення, рейтинг: 1, 3, 2, 4, 5.

Таким чином, максимальне значення показника ефективності В-1 утворює границю ефективності (рис. 3), на якій знаходиться точка 1, усі інші точки за цими коефіцієнтами – аутсайдери:

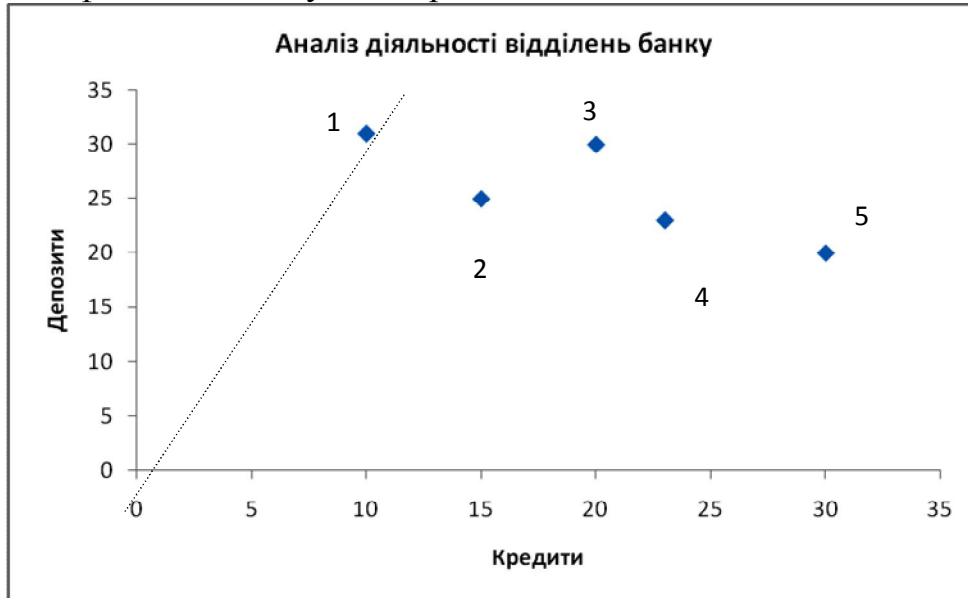


Рис. 3

Навпаки, при  $u_1=33$ ,  $u_2=3$  будемо мати інший результат:

Відділення	Витрати	Вагові коефіцієнти		P	E
		33	3		
		Кредити	Депозити		
В-1	100	10	31	423	0,403
В-2	100	15	25	570	0,543
В-3	100	20	30	750	0,714
В-4	100	23	23	828	0,789
В-5	100	30	20	1050	1,000
	Вхід	Виходи			

і тепер відділення В-5 стало лідером завдяки своїм «цінним» кредитам, визначивши інший рейтинг: 5, 4, 3, 2, 1, рис. 4.

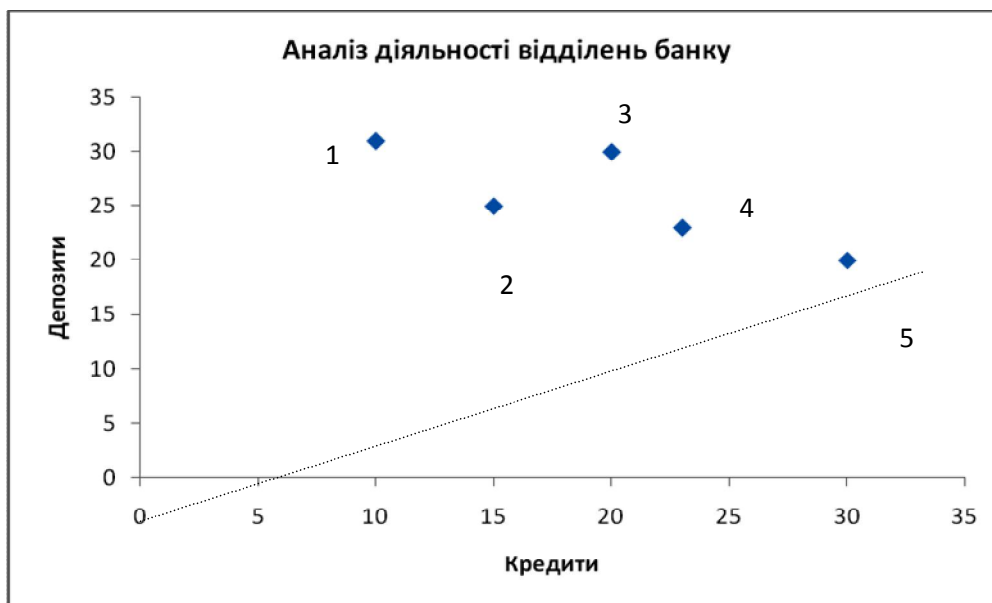


Рис. 4

Ясно, що при інших вагових коефіцієнтах виходів буде інший результат. Зокрема, для відділень, які знаходяться у різних місцях й працюють у різних умовах, «цінність» виходів у вигляді вагових коефіцієнтів буде різною, тож, якщо задати їх різні значення, відповідно, буде й інший результат, зокрема, рейтинг: 3, 1, 4, 5, 2 для таблиці:

Відділення	Витрати	Кредити	Депозити	u1	u2	P	E
В-1	100	10	31	3	33	1053	0,849
В-2	100	15	25	23	17	770	0,621
В-3	100	20	30	17	30	1240	1,000
В-4	100	23	23	18	24	966	0,779
В-5	100	30	20	21	10	830	0,669
	Вхід	Виходи				1240 max	

Отже, за методологією DEA задача оцінювання набору однорідних одиниць зводиться до пошуку оптимальних значень вагових коефіцієнтів входів та виходів для кожної конкретної одиниці, за якими ефективність цієї одиниці максимізується за умови обмеження ефективності усіх одиниць.

Для наведеного прикладу треба 5 раз повторити процедуру пошуку оптимальних значень вагових коефіцієнтів входу ( $v_1$ ) та виходів ( $u_1, u_2$ ) для 5 відділень, після чого можна визначити відповідну границю ефективності, побудувавши таблицю ефективності усіх одиниць.

Детально розглянемо процес розв'язання цієї задачі для відділення В-1, для цього сформуємо математичну модель ЛП з її подальшою реалізацією у вигляді електронно-табличної моделі в Excel. Надалі цей процес повторюється для усіх інших відділень.

## Математична модель задачі оцінювання (відділення В-1)

I. Знайти вектори  $V = \{v_1\}$ ,  $U = \{u_1, u_2\}$ , щоб

II. ЦФ  $10u_1 + 31u_2 \rightarrow \max$  (ефективність виходів для В-1)

III. при

$$-100v_1 + 10u_1 + 31u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 15u_1 + 25u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 20u_1 + 30u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 23u_1 + 23u_2 \leq 0$$

$$-100v_1 + 30u_1 + 20u_2 \leq 0$$

$$100v_1 = 1$$

$$v_1 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0.$$

## Електронно-таблична модель

На рис. 5 наведена типова форма електронно-табличної (ЕТ) моделі задачі оптимізації для пошуку вагових коефіцієнтів та цільової функції для В-1 та вікно програми Поиск решения. На рис. 6 показано формули ЕТ-моделі. Для усіх наступних моделей ці формули треба змінити, зберігаючи їх структуру.

1	Аналіз 1-го відділення банку				Обмеження			
3	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити				
4	В-1	100	10	31	-0.2	<=	0	
5	В-2	100	15	25	0.0	<=	0	
6	В-3	100	20	30	-0.2	<=	0	
7	В-4	100	23	23	-0.3	<=	0	
8	В-5	100	30	20	-1.0	<=	0	
9		Вхід	Виходи					
11	План	0,01	0,00	0,033	1,0			ЦФ
12		$v_1$	$u_1$	$u_2$				

Рис. 5

1	Аналіз 1-го відділення банку				Обмеження			
3	Відділення	Витрати	Кредити	Депозити				
4	В-1	100	10	31	=C4*\$C\$11	=	1	
5	В-2	100	15	25	=C4*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D4:E4)	<=	0	
6	В-3	100	20	30	=C5*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D5:E5)	<=	0	
7	В-4	100	23	23	=C6*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D6:E6)	<=	0	
8	В-5	100	30	20	=C7*\$C\$11+СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D7:E7)	<=	0	
9		Вхід	Виходи					
11	План	0,01	0	0,032258064	=СУММПРОИЗВ(\$D\$11:\$E\$11;D4:E4)			ЦФ
12		$v_1$	$u_1$	$u_2$				

Рис. 6

Результат: ефективність В-1 максимальна (1 або 100%), при  $v_1 = 0,01$ ;  $u_1 = 0$ ,  $u_2 \cong 0,33$ .

Тепер цю електронно-табличну модель можна використати як шаблон для розв'язання задачі оптимізації для відділень В-2, В-3, В-4 та В-5 копіюванням та внесенням певних змін.

На рис. 7 та 8 наведені результати для відділень В-2, В-3, В-4 та В-5, а також наведена узагальнена таблиця «Усі відділення», де визначені оптимальні вагові коефіцієнти кожного з 5 відділень. Саме ця остання таблиця дозволяє отримати кінцевий результат – визначити трьох лідерів (це В-1, В-3 та В-5 з однаковою максимальною ефективністю, що дорівнює 1), які, у свою чергу, визначили фронт ефективності, рис. 9, та двох аутсайдерів – В-4 та В-2. Для цих двох відділень не існує таких вагових коефіцієнтів, за якими б вони стали лідерами, тобто, вони явні аутсайдерами.

Є можливість об'єктивно порівняти усі відділення за значеннями їх цільових функцій й побудувати рейтинг: (В-1, В-2, В-3), В-4, В-2.

На графіку явно визначена огортаюча лінія ефективності, яка утворена трьома успішними відділеннями В-1, В-3 та В-5, яка «огортає» зверху усі 5 точок, під нею розміщені точки для 4-го та 2-го відділень-аутсайдерів, для яких пунктиром вказані їх гіпотетичні цільові позиції на границі: точка  $4^+$  (координати 25; 25) та  $2^+$  (18,1; 30,2). Наприклад, щоб В-4 став лідером, йому треба при витратах у 100 од. мати 25 од. кредиту та 25 од. депозитів (проти 23/23).

Геометричний (графічний) підхід для ілюстрації процедури оцінювання однорідних одиниць став можливим за умови, що усі відділення мають однакові витрати й два виходи, у всіх інших випадках користуються алгебраїчним (формульним) підходом.

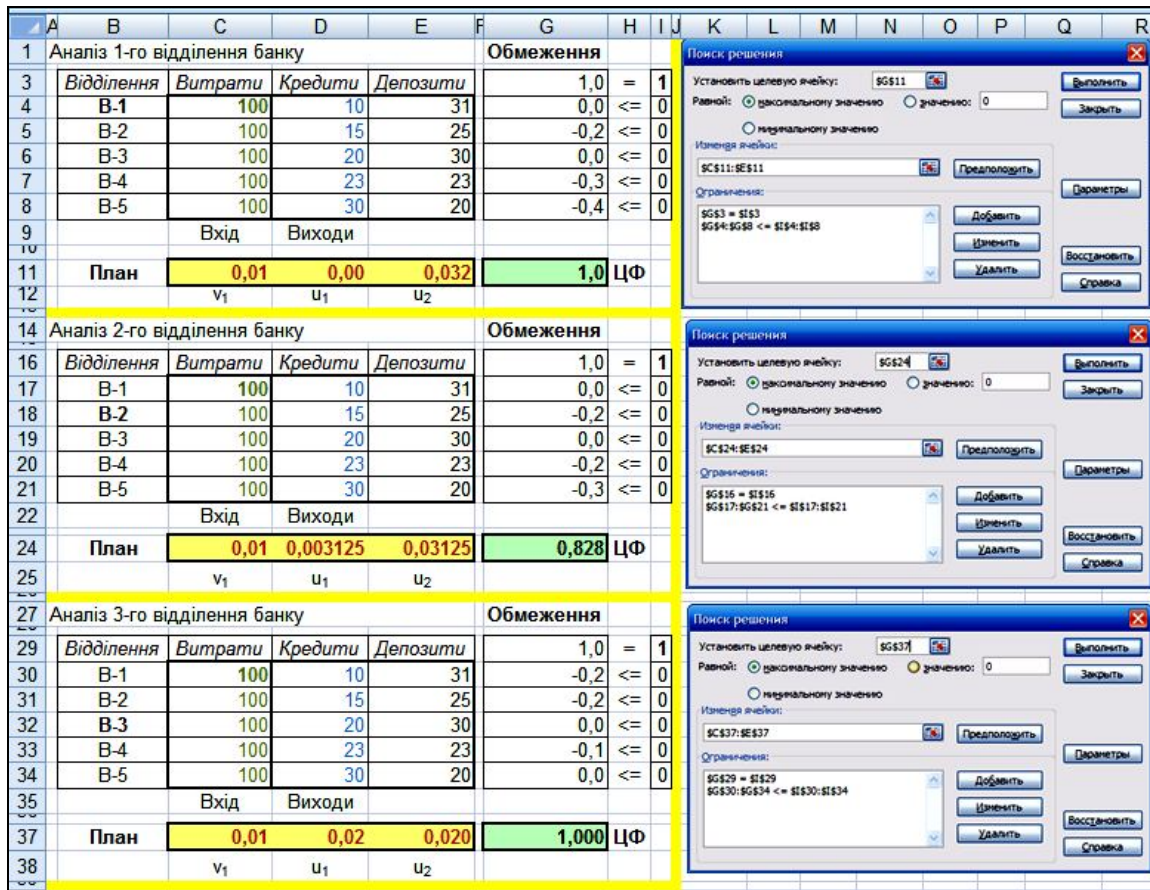


Рис. 7

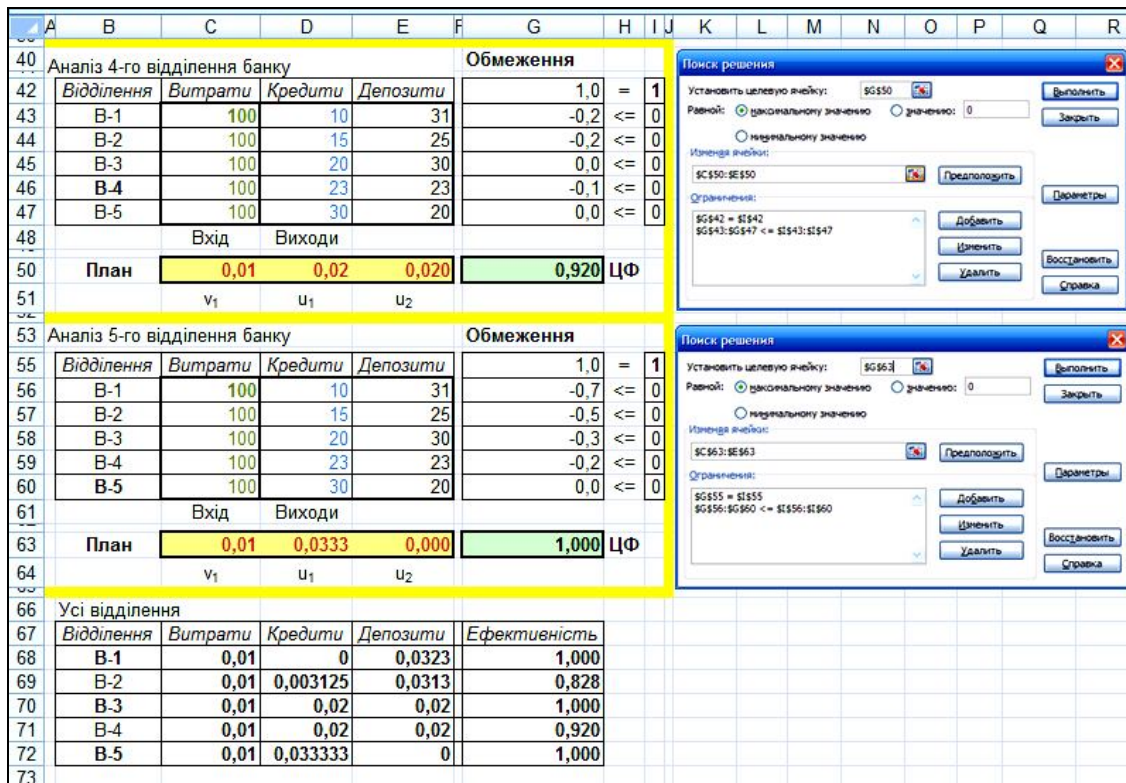


Рис. 8

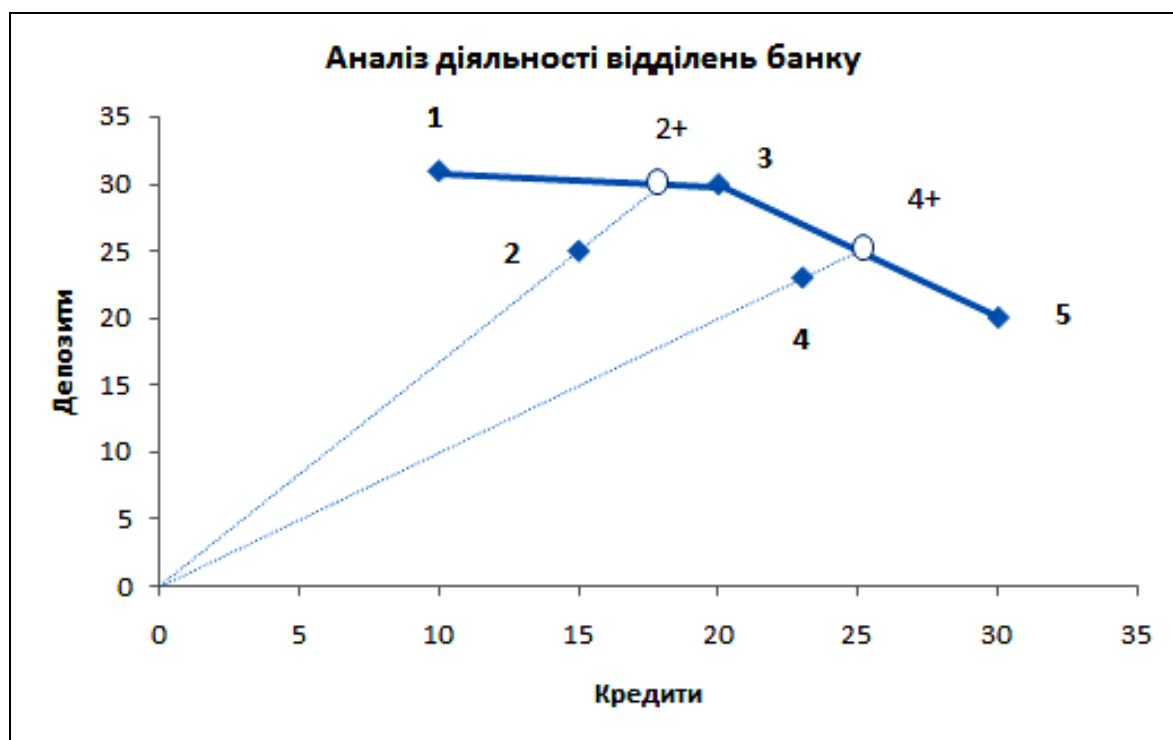


Рис. 9

**Задача (6, 2, 2): 2-входи ( $x_1, x_2$ ), 2-виходи ( $y_1, y_2$ )**

Аналізується діяльність 6 стандартних відділень сервісної організації з метою об'єктивного оцінювання їх діяльності. Відділення надають основні та додаткові послуги (виходи) і мають базове ресурсне забезпечення двох видів: штатний персонал та спеціальне обладнання (входи), усі показники надані у відповідному матеріальному чи вартісному вимірі. Відомості про діяльність цих відділень у певний часовий період представлені таблицею:

	Входи		Виходи	
	Штат	Обладнання	Осн. послуги	Дод. послуги
1	150	0,2	14	3,5
2	400	0,7	14	21
3	320	1,2	42	10,5
4	520	2,0	28	42
5	350	1,2	19	25
6	320	0,7	14	15

Це типова задача оцінювання, яка розв'язується суто алгебраїчними (не геометричними) методами шляхом розв'язання прямої та двоїстої задач ЛП.



Результатом прямої задачі є значення максимальної ефективності кожного відділення (цільова функція) та оптимальні значення вагових коефіцієнтів: входів ( $v_1, v_2$ ) та виходів ( $u_1, u_2$ ), за якими досягається така ефективність. На цьому етапі точно визначені лідери та аутсайдери й, відповідно, визначено рейтинг відділень.

Результатом двоїстої задачі є «тіньові ціни» правих частин обмежень, за їх допомогою обчислюються гіпотетичні значення входів та виходів неефективних відділень-аутсайдерів, ці значення застосовуються ними як орієнтири на шляху до покращення своєї діяльності, це відповідь на запитання – якими мають бути значення їх входів та виходів, щоб досягти рівня ефективності лідерів.

### Математична модель задачі оцінювання (відділення В-1)

I. Знайти вектори  $V = \{v_1, v_2\}$ ,  $U = \{u_1, u_2\}$ , щоб

II. ЦФ  $14u_1 + 3,5u_2 \rightarrow \max$  (ефективність виходів для В-1)

III. за обмежень:

$$-(150v_1 + 0,2v_2) + 14u_1 + 3,5u_2 \leq 0$$

$$-(400v_1 + 0,7v_2) + 14u_1 + 21u_2 \leq 0$$

$$-(320v_1 + 1,2v_2) + 42u_1 + 10,5u_2 \leq 0$$

$$-(520v_1 + 2,0v_2) + 28u_1 + 42u_2 \leq 0$$

$$-(350v_1 + 1,2v_2) + 19u_1 + 25u_2 \leq 0$$

$$-(320v_1 + 0,7v_2) + 14u_1 + 15u_2 \leq 0$$

$$150v_1 + 0,2v_2 = 1 \text{ (знаменник)}$$

$$v_1, v_2 \geq 0, u_1, u_2 \geq 0.$$

Аналогічна модель формується для усіх інших відділень.

### Електронно-таблична модель

На рис. 10, 11 наведені електронно-табличні (ЕТ) моделі задачі оптимізації для пошуку вагових коефіцієнтів та цільової функції для усіх 6 відділень з відповідними вікнами програми Поиск решения. Кожна з цих моделей має певну стандартизовану форму, що дозволяє суттєво спростити процес оптимізації – кожна модель є модифікацією базової моделі, де треба внести зміни (для В-1) у ліву частину системи обмежень (діапазон F3:F9) та вираз ЦФ (F11) й відтворити ці зміни у вікні Поиск решения.

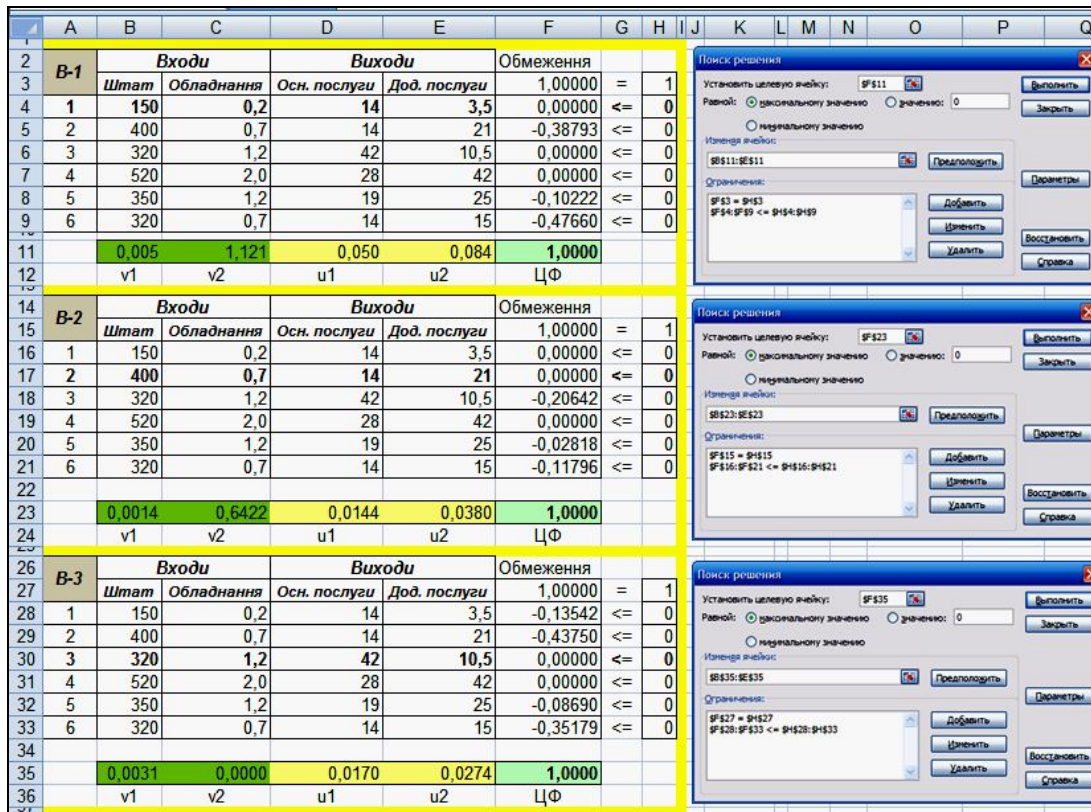


Рис. 10

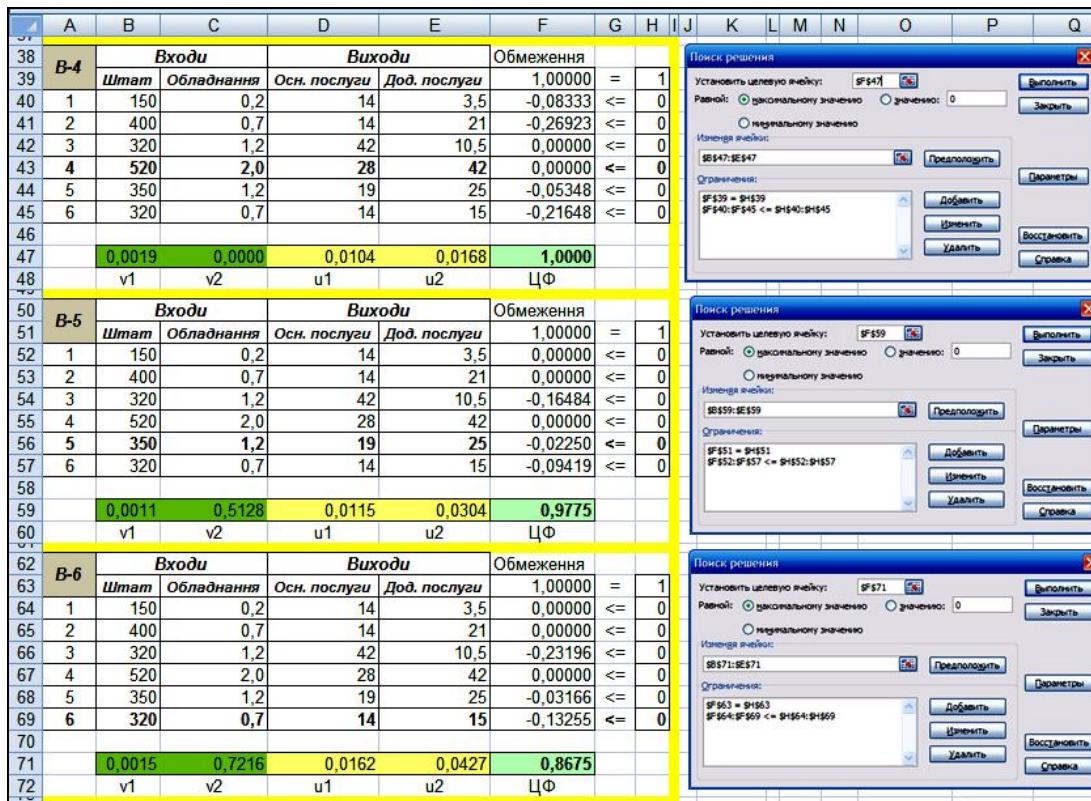


Рис. 11

На рис. 12 представлені результати прямої задачі для усіх відділень (вагові коефіцієнти й максимальна ефективність), за якими можна провести порівняння й визначити рейтинг відділень: (1, 2, 3, 4), 5, 6.

	A	B	C	D	E	F
75	B	Входи		Виходи		
76		Штат	Обладнання	Осн. послуги	Дод. послуги	Ефективність
77	1	0,005	1,121	0,050	0,084	1,0000
78	2	0,001	0,642	0,014	0,038	1,0000
79	3	0,003	0,000	0,017	0,027	1,0000
80	4	0,002	0,000	0,010	0,017	1,0000
81	5	0,001	0,513	0,012	0,030	0,9775
82	6	0,002	0,722	0,016	0,043	0,8675

Рис. 12

Для відділень-аутсайдерів В-5 та В-6 розв'язується двоїста задача ЛП для отримання гіпотетичних значень їх входів та виходів, для цього програма Поиск решения формує звіт зі стійкості (Устойчивость) оптимального плану щодо змін початкових даних.

### Програмні продукти DEA-методології

Достоїнством розглянутих ЕТ-моделей, розрахованих на застосування стандартної версії надбудови Excel Solver (Поиск решения), є можливість власноруч побудувати й реалізувати математичну модель задачі оптимального оцінювання однорідних одиниць без будь-яких допоміжних програмних засобів, тому їх найкраще застосовувати у навчальному й дослідницькому процесу, де можна найкраще зрозуміти DEA-методологію оцінювання й враховувати специфічні властивості однорідних одиниць уведенням додаткових обмежень. Їх недолік – необхідність багатократно будувати й реалізовувати таку модель для кожної одиниці (DMU), що досить незручно для крупних задач та розрахунків промислового значення.

Популярність аналітичної DEA-методології стимулює розробку спеціалізованих програм автономного користування чи у вигляді програм-надбудов [9]. Для тих, хто користується середовищем Excel, досить зручною й потужною є надбудова DEAFrontier, розроблена проф. Дж. Жу [10-11], її free-версія розрахована на 20 однорідних одиниць, базова версія зорієнтована на можливості Excel Solver (200 одиниць для стандартної версії Solver). Після отримання результатів прямої та двоїстої задач, користувачу залишається виконати допоміжні операції, це: компоновка звітнього документа, побудова рейтингу та додаткові розрахунки одиниць тощо, головне – оптимізація для усіх одиниць здійснюється за один крок й не вимагає побудови ЕТ-моделі.

На рис. 14 наведені результати для розглянутої задачі оцінювання 6 одиниць, на рис. 15 – тестовий приклад для 20 одиниць, отримані за допомогою надбудови Excel DEAFrontier.

Оцінки ефективності (т-ціни)						
DMU No.	DMU Name	Efficiency	вх-1	вх-2	вих-1	вих-2
1	1	1,00000	150,00	0,20	14	3,5
2	2	1,00000	400,00	0,70	14	21
3	3	1,00000	320,00	1,20	42	10,5
4	4	1,00000	520,00	2,00	28	42
5	5	0,97750	342,12	1,17	19	25
6	6	0,86745	277,58	0,61	14	15

Рис. 14

Оцінки ефективності														
№	Одиниця	Вх-1	Вх-2	Вх-3	Вих-1	Вих-2	Ефективність	Вх-1	Вх-2	Вх-3	Вих-1	Вих-2	Рейтинг	
1	Firm1	171,0	82,0	62,0	105,0	24,0	1,00	171,0	82,0	62,0	105,0	24,0	Firm1	1
2	Firm2	150,9	9,8	30,4	64,0	45,6	0,87	174,0	44,0	35,0	64,0	17,0	Firm8	1
3	Firm3	331,2	51,0	97,1	167,0	98,4	0,49	682,0	105,0	200,0	167,0	52,0	Firm9	1
4	Firm4	404,0	78,1	188,0	230,0	130,0	0,51	791,0	153,0	412,0	230,0	38,0	Firm13	1
5	Firm5	1027,6	110,2	297,3	487,0	318,6	0,50	2051,0	220,0	673,0	487,0	244,0	Firm15	1
6	Firm6	709,3	87,7	228,9	349,0	221,5	0,55	1286,0	159,0	612,0	349,0	198,0	Firm18	1
7	Firm7	2274,2	147,8	461,8	971,3	692,0	0,77	5743,0	191,0	1220,0	780,0	692,0	Firm17	0,9768
8	Firm8	239,0	212,0	297,0	265,0	40,0	1,00	239,0	212,0	297,0	265,0	40,0	Firm10	0,9604
9	Firm9	1656,0	799,0	1748,0	1473,0	598,0	1,00	1656,0	799,0	1748,0	1473,0	598,0	Firm2	0,8675
10	Firm10	148,9	117,2	178,1	157,0	32,0	0,96	155,0	122,0	297,0	157,0	20,0	Firm12	0,7796
11	Firm11	283,9	76,9	130,1	175,0	84,4	0,64	443,0	120,0	203,0	175,0	52,0	Firm7	0,7740
12	Firm12	111,5	51,9	113,8	97,1	40,0	0,78	143,0	96,0	146,0	97,0	40,0	Firm11	0,6409
13	Firm13	270,0	179,0	171,0	244,0	59,0	1,00	270,0	179,0	171,0	244,0	59,0	Firm19	0,5919
14	Firm14	139,6	21,0	49,0	72,0	43,3	0,50	279,0	42,0	98,0	72,0	29,0	Firm6	0,5515
15	Firm15	4718,0	372,0	339,0	999,0	633,0	1,00	4718,0	372,0	339,0	999,0	633,0	Firm20	0,5215
16	Firm16	818,3	53,2	166,2	349,5	249,0	0,52	1609,0	103,0	354,0	348,0	249,0	Firm16	0,5165
17	Firm17	6199,7	453,2	783,4	1867,5	1270,0	0,98	6347,0	504,0	802,0	1860,0	1270,0	Firm4	0,5107
18	Firm18	3615,0	235,0	734,0	1544,0	1100,0	1,00	3615,0	235,0	734,0	1544,0	1100,0	Firm5	0,5010
19	Firm19	1240,1	108,9	309,6	561,0	381,2	0,59	2095,0	184,0	884,0	561,0	325,0	Firm14	0,5005
20	Firm20	1147,2	74,6	232,9	490,0	349,1	0,52	2205,0	143,0	466,0	490,0	313,0	Firm3	0,4857

Рис. 15

Використані джерела інформації:

1. Чейз Р., Эквилайн Н., Якобс Р. Производственный и операционный менеджмент, 8-е изд. Пер. с англ. – М.: «Вильямс», 2004. – 704 с.
2. Farrell M. The Measurement of Productive Efficiency. J. Roy. St. Soc., 1957, pp. 253–290.
3. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Expositions, interpretations and extensions of Farrell efficiency measures. – Manag. Sc. Res. Report, Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, 1975.
4. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Measuring the efficiency of decision-making units. – European Journal of Operational Research, 1978, vol. 2, pp. 429–444.
5. Cooper W., Seiford L., Kaoru T. Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver software. – Kluwer Acad. Publ., 1999
6. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2005. – 320 с.
7. Charnes A., Cooper W. Blending Aviation Gasoline. A Study of Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company. – Econometrica, 20, 1952

8. Charnes A., Cooper W. Programming with linear fractional functionals. – Naval Res. Logist. Quart. 9, 1962, pp. 181-185.
9. Emrouznejad A., Parker B., Tavares G. Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. – J. Socio-Economics Planning Science, 2008, pp. 151-157.
10. Website Joe Zhu's research on Data Envelopment Analysis (DEA)  
[www.deafrontier.net](http://www.deafrontier.net)
11. Zhu J. Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets. – Springer; 2<sup>nd</sup> ed., 2008. – 334 p.

*Рецензент: Пьянов В.М.*