

УДК 629.735.017

**Пархоменко В.Л.**, к.т.н., доцент  
АМУ, м. Київ;

**Нечипоренко О.М.**, к.т.н., доцент  
НТУУ «КПІ», м. Київ

## КРИТЕРІЙ ПАРАМЕТРИЧНОЇ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

*Перехід системи автоматичного керування (САК) в стан відмови розглядається як момент досягнення нею межі параметричної (робастної) стійкості. Час переходу САК з початку її функціонування до моменту втрати параметричної стійкості пропонується нормувати робастним критерієм її відмови, який обмежує допустиме значення призначеного ресурсу САК при її проектуванні. Такий критерій дозволяє враховувати процеси фізичної деградації САК під час її експлуатації при нормуванні часу наступного підрегулювання (тривалості межремонтного періоду).*

*Переход системы автоматического управления (САУ) в состояние отказа рассматривается как момент достижения границы параметрической (робастной) устойчивости. Время перехода САУ с начала ее функционирования до момента утраты параметрической устойчивости предлагается нормировать робастным критерием ее отказа, который ограничивает допустимое значение назначенного ресурса САУ при ее проектировании. Такой критерий позволяет учитывать процессы физической деградации САУ во время ее эксплуатации при нормировании времени последующего подрегулирования (длительности межремонтного периода).*

*Passing of the automatic control system (ACS) to the state of refuse is examined as a moment of achievement of border of self-reactance (robust) stability. Time of transition of ACS from the beginning of its functioning to the moment of loss of self-reactance stability it is suggested to ration the robust criterion of its refuse which limits the assumed value of the appointed resource of SAU at its planning. Such criterion allows to take into account the processes of physical degradation of SAU during its exploitation at setting of norms of time of the subsequent subadjusting (durations of the TBO period).*

*Вступ.* При аналізі надійності об'єкту існують проблеми визначення моменту виникнення порушення (втрати) його працездатності – наробітку

до відмови [1, 2, 3, 4] для нормування допустимого значення призначеного ресурсу САК при її проектуванні. Якщо процеси втрати працездатності САК (за рахунок зношування, старіння, втоми, зміни зовнішніх умов тощо) можна визначити функціональною залежністю її параметрів від часу, розглядають *параметричні* відмови (*параметричну надійність* САК).

Існують ймовірно-фізичні моделі наближення об'єкта до параметричної відмови у разі [5]. Визначення розподілу наробітку до першої відмови об'єктів у такому випадку зводиться до вирішування завдання першого досягнення процесом граничного рівня і пов'язано з розв'язанням рівняння дифузії (Фоккера-Планка-Колмогорова), яке є диференціальним рівнянням у частинних похідних та під час вирішування потребує встановлення *граничних умов* залежно від вигляду реалізацій процесу. У випадку втрати стійкості САК граничною умовою можна вважати момент досягнення межі її стійкості.

Новизна роботи полягає в поєднанні класичних показників безвідмовності технічних об'єктів з критерієм параметричної стійкості САК: запропоновано використовувати критерій стійкості робастно стійкої системи як *робастний критерій її відмови*. Такий критерій також дозволить враховувати процеси фізичної деградації САК під час її експлуатації при нормуванні часу наступного підрегулювання (тривалості межремонтного періоду).

В роботі поширено умову робастної стійкості на нестационарні системи і використано час виходу САК на межу стійкості як наробіток до її відмови.

*Постановка задачі.* Відомо, що при зміні визначального параметра [2, 4] у часі і досягненні їм межі допуску виникає відмова об'єкта. Крім того, втрату стійкості системи можна розглядати, як її відмову: нестійка система, яка знаходиться на межі (аперіодичної або коливальної) стійкості, не є працездатною: будь-яке незначне відхилення призводить до її відмови.

Якщо система параметрично нестійка, виникає проблема визначення меж її стійкості в залежності від значення визначального параметра (ВП). Задачу визначення меж параметричної стійкості в теорії автоматичного регулювання вирішує *критерій робастної стійкості системи*. Але цей критерій розглянуто тільки для стаціонарних систем [5]. З точки зору надійності, при знайденні меж робастної стійкості системи необхідно враховувати *час* досягнення цієї межі визначальним параметром системи.

Параметри стаціонарних *робастно стійких* систем [5] із часом у силу старіння або інших причин можуть мінятися, тобто такі системи можна розглядати, як *нестационарні*. У подібних випадках виникає необхідність побудови систем керування таким чином, щоб вона була стійка не при одних фіксованих значеннях параметрів, а при всіх можливих їх значеннях, і представити параметри системи як функції часу. Важливо розглянути змінювання у часі *визначальних* параметрів САК, тоді

(гіпер)паралелепіед Харитонова [5] буде мати вершини, що змінюються у часі. Момент часу, при якому умови робастної стійкості (всі поліноми Харитонова стійкі) не стане виконуватися, буде визначати момент виникнення відмови САК, тобто наробіток системи до відмови.

### **Визначення параметричної надійності САК**

Якщо відмова розглядається як вихід за припустимі межі значення параметра  $A(t)$  об'єкта, що відбувається через зміни цього параметра у часі  $t$  (у загальному випадку у функції будь-якої монотонно зростаючої величини – наробітку), то ці відмови називають *параметричними*. Надійність об'єкта у разі параметричних відмов визначається функціоналом деякого випадкового процесу  $\{t\}$ , який характеризує зміну параметрів об'єкта у часі. Об'єкт лишається працездатним, поки величина  $A(t)$ , що змінюється у часі, не досягає межі припустимої робочої області  $\Omega$ .

Основний технічний параметр, який характеризує працездатність об'єкта і визначає його міру якості, називають *визначальним параметром (ВП)*.

У загальному випадку ВП може бути вектором, тобто мати кілька складових. Граничні значення, які установлюються на кожен ВП об'єкта, є *припустимими* значеннями ВП, котрі обмежують *робочу область (поле допуску)*, яку задають у НТД.

Поки значення векторного ВП об'єкта перебувають усередині багатовимірної робочої області, об'єкт вважають працездатним. Однак із часом під впливом факторів, пов'язаних зі старінням, зношуванням або розрегулюванням, кінець вектора  $A(t)$  може досягти межі робочої області  $\Omega$ . При цьому об'єкт втрачає працездатність (відбувається відмова).

У практиці експлуатації об'єкта більш важливо знати не щільність розподілу часу до відмови, а конкретний *час збереження працездатності*  $t_{30}$ , протягом якого ВП досягає межі робочої області.

Для вирішення цієї задачі пропонується розглядати час втрати стійкості робастно стійкої САК як час досягнення ВП меж робочої області.

### **Робастна стійкість нестационарних САК**

Параметри стаціонарних робастно стійких систем з часом через старіння або інші причини можуть мінятися. У подібних випадках виникає необхідність побудови систем керування так, щоб вона була стійка не при одних фіксованих значеннях параметрів, а при всіх можливих їх значеннях, які функціонально змінюються у часі. У останньому випадку можна вважати систему *нестационарною*, а при плавних повільних змінах ВП у часі в межах робастної стійкості – стійкою. Розглянемо доказ цього ствердження.

Робастна стійкість САК визначається таким чином.

Характеристичний поліном САК  $D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  називається *стійким поліномом* або *поліномом Гурвіця*, якщо всі його нулі є лівими.

Якщо позначити  $(n+1)$ -вектор  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  і в  $(n+1)$ -мірному просторі коефіцієнтів розглянути множину  $A$  ( $A \subset R^{n+1}$ ), то поліном  $D(\lambda)$  буде *робастно стійким* або *робастно стійким в множині  $A$* , якщо він є стійким при будь-яких значеннях коефіцієнтів  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) з множини  $A$  ( $a \in A$ ).

Система буде *робастно стійкою* або *робастно стійкою на множині  $A$* , якщо її характеристичний поліном є робастно стійким поліномом в  $A$ .

Для аналізу робастно стійких систем введено поліноми Харитонова.

**Поліноми Харитонова.** Нехай множина  $A$  є (гіпер) паралелепіпедом:

$$A = \{a: \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 0, 1, \dots, n\}. \tag{1}$$

Тут  $\underline{a}_i$  і  $\bar{a}_i$  — мінімальне і максимальне значення коефіцієнта  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Підставимо в характеристичний поліном  $\lambda = j\omega$  і виділимо дійсну і уявну частини:

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = u(\omega) + jv(\omega),$$

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - a_{n-6}\omega^6 + \dots, \tag{2a}$$

$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - a_{n-7}\omega^7 + \dots \tag{2б}$$

При фіксованому  $\omega$ , коли вектор  $a$  пробігає всі значення з множини (1), характеристичний вектор описує прямокутник (рис. 1).

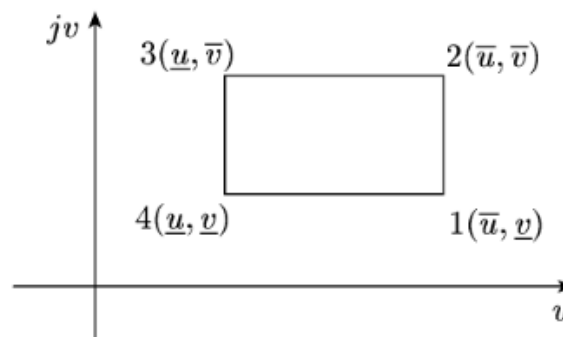


Рис. 1. До визначення поліномів Харитонова

Очевидно, на вершинах прямокутника  $u(\omega)$  і  $v(\omega)$ , як функції від  $a$ , приймають мінімальні або максимальні значення. На рис. 1 позначено

мінімуми  $u(\omega)$  і  $v(\omega)$  – через  $\underline{u}(\omega)$  і  $\underline{v}(\omega)$ , а максимуми – через  $\bar{u}(\omega)$  і  $\bar{v}(\omega)$  відповідно:

$$\underline{u} = \underline{u}(\omega) = \min_{a \in A} u(\omega), \quad \underline{v} = \underline{v}(\omega) = \min_{a \in A} v(\omega),$$

$$\bar{u} = \bar{u}(\omega) = \max_{a \in A} u(\omega), \quad \bar{v} = \bar{v}(\omega) = \max_{a \in A} v(\omega).$$

Функції  $u(\omega)$  і  $v(\omega)$  приймуть мінімальні значення, коли в (2а) і (2б) доданки з додатним знаком приймають мінімальні значення, а доданки з від’ємним знаком – максимальні значення. І навпаки,  $u(\omega)$  і  $v(\omega)$  приймуть максимальні значення, коли доданки з додатним знаком приймають максимальні значення, а доданки з від’ємним знаком – мінімальні. Тому з (2а) і (2б) маємо

$$\underline{u}(\omega) = \underline{a}_n - \bar{a}_{n-2}\omega^2 + \underline{a}_{n-4}\omega^4 - \bar{a}_{n-6}\omega^6 + \dots, \quad (3а)$$

$$\underline{v}(\omega) = \underline{a}_{n-1}\omega - \bar{a}_{n-3}\omega^3 + \underline{a}_{n-5}\omega^5 - \bar{a}_{n-7}\omega^7 + \dots \quad (3б)$$

$$\bar{u}(\omega) = \bar{a}_n - \underline{a}_{n-2}\omega^2 + \bar{a}_{n-4}\omega^4 - \underline{a}_{n-6}\omega^6 + \dots, \quad (3в)$$

$$\bar{v}(\omega) = \bar{a}_{n-1}\omega - \underline{a}_{n-3}\omega^3 + \bar{a}_{n-5}\omega^5 - \underline{a}_{n-7}\omega^7 + \dots \quad (3г)$$

Як впливає з рис. 1, вершинам прямокутника 1, 2, 3 і 4 відповідають характеристичні вектори

$$D_1(j\omega) = \bar{u}(\omega) + j\underline{v}(\omega), \quad D_2(j\omega) = \bar{u}(\omega) + j\bar{v}(\omega),$$

$$D_3(j\omega) = \underline{u}(\omega) + j\bar{v}(\omega), \quad D_4(j\omega) = \underline{u}(\omega) + j\underline{v}(\omega).$$

Підставивши у формулу для  $D_1(j\omega)$  вирази для  $\bar{u}(\omega)$  з (3в) і для  $\underline{v}(\omega)$  з (3б), отримаємо

$$D_1(j\omega) = \bar{a}_n - \underline{a}_{n-2}\omega^2 + \bar{a}_{n-4}\omega^4 - \dots$$

$$\dots + j(\underline{a}_{n-1}\omega - \bar{a}_{n-3}\omega^3 + \underline{a}_{n-5}\omega^5 - \dots) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}(j\omega) +$$

$$\underline{a}_{n-2}(j\omega)^2 + \bar{a}_{n-3}(j\omega)^3 + \bar{a}_{n-4}(j\omega)^4 + \underline{a}_{n-5}\omega^5 + \dots$$

Звідси, поклавши  $j\omega = \lambda$ , отримаємо характеристичний поліном  $D_1(\lambda)$ . Аналогічно можна отримати характеристичні поліноми, відповідні решті вершин прямокутника.

Випишемо коефіцієнти при  $\lambda$  в порядку зростання ступеня  $\lambda$  всіх чотирьох поліномів:

$$D_1(\lambda): \bar{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}, \bar{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \dots, \quad (4а)$$

$$D_2(\lambda): \bar{a}_n, \bar{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \bar{a}_{n-4}, \bar{a}_{n-5}, \dots, \quad (4б)$$

$$D_3(\lambda): \underline{a}_n, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \bar{a}_{n-5}, \dots, \quad (4в)$$

$$D_4(\lambda): \underline{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \dots. \quad (4г)$$

Поліноми  $D_1(\lambda)$   $D_2(\lambda)$   $D_3(\lambda)$  і  $D_4(\lambda)$  називають поліномами Харитонова.

### Теорема Харитонова.

**Необхідна умова робастної стійкості.** Оскільки при робастній стійкості в паралелепіпеді (2) повинні бути стійкими характеристичні поліноми при всіх значеннях коефіцієнтів з цього паралелепіпеда, необхідно, щоб був стійким характеристичний поліном при  $a_i = \underline{a}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тому для робастної стійкості в паралелепіпеді (2) необхідно, щоб при  $a_0 > 0$  виконувалися умови

$$\underline{a}_1 > 0, \underline{a}_2 > 0, \dots, \underline{a}_n > 0. \quad (5)$$

**Теорема Харитонова.** Для того, щоб система з характеристичним поліномом  $D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  була робастно стійка в паралелепіпеді

$$A = \{a : \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 0, 1, \dots, n\},$$

необхідно і достатньо, щоб всі поліноми Харитонова були стійкими.

**Доказ. Необхідність.** Оскільки за визначенням робастної стійкості характеристичний поліном повинен бути стійким при всіх значеннях  $a \in A$ , то повинні бути стійкими і поліноми Харитонова як характеристичні поліноми, відповідні чотирьом різним значенням  $a$  з множини  $A$ .

**Достатність.** За критерієм Михайлова для робастної стійкості при  $a_0 > 0$  достатньо, щоб годограф характеристичного вектора при будь-яких  $a \in A$ , почавшись на додатній дійсній півісі, послідовно охоплював  $n$  квадрантів. Інакше кажучи, прямокутник на рис. 1 повинен послідовно охоплювати  $n$  квадрантів. Дійсна і уявна частини характеристичного вектора  $D'(j\omega) = u'(\omega) + jv'(\omega)$ , відповідного довільному  $a' \in A$ , задовольняє нерівностям

$$\underline{u}(\omega) \leq u'(\omega) \leq \bar{u}(\omega), \quad \underline{v}(\omega) \leq v'(\omega) \leq \bar{v}(\omega).$$

Тому, якщо вершини прямокутника послідовно охоплюють  $n$  квадрантів, то і всі точки прямокутника послідовно охоплюватимуть  $n$  квадрантів. Теорема доведена.

**Випадок  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .** Як відомо, для поліномів першого і другого порядків достатність його коефіцієнтів є достатньою умовою стійкості. Тому у випадку  $n = 1, 2$ , очевидно, для робастної стійкості в паралелепіпеді необхідно і достатньо, щоб виконувалася необхідна умова робастної стійкості (5).

**Слідство.** Для того, щоб система з характеристичним поліномом  $D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  була робастно стійка в паралелепіпеді при

виконанні необхідної умови робастної стійкості (5), необхідно і достатньо, щоб були стійкими:

- а) у разі  $n = 3$  поліном Харитонова  $D_1(\lambda)$ ;
- б) у разі  $n = 4$  поліноми Харитонова  $D_1(\lambda)$  і  $D_2(\lambda)$ ;
- в) у разі  $n = 5$  поліноми Харитонова  $D_1(\lambda)$ ,  $D_2(\lambda)$  і  $D_3(\lambda)$ .

Доказ. Необхідність очевидна. Тому доведемо достатність. Вершини прямокутника 1, 2, 3, 4 в 1-му квадранті перетворюються при переході в 2-й квадрант в  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$ , при переході в 3-й квадрант – в  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$ , і при переході в 4-й квадрант – в  $1'''$ ,  $2'''$ ,  $3'''$ ,  $4'''$  відповідно (рис. 2).

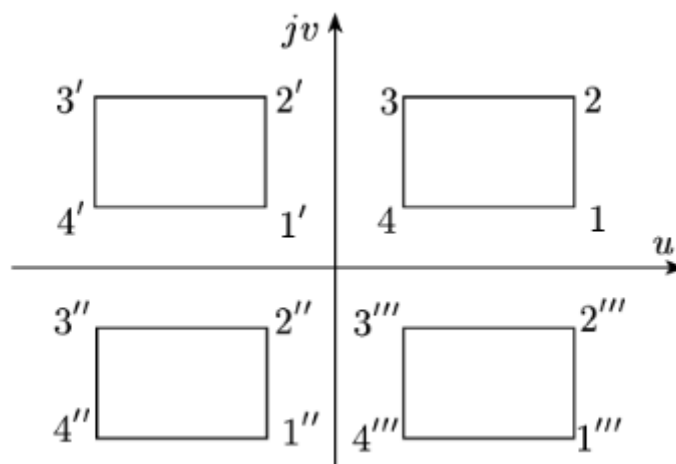


Рис. 2. До виведення слідства теореми Харитонова

а) Якщо при збільшенні  $\omega$  вершина 1 прямокутника переходить в 2-й квадрант, то і решта всіх вершин також перейде в 2-й квадрант. Далі, якщо вершина  $1'$  при подальшому збільшенні  $\omega$  не перетинає уявну вісь, то решта вершин також її не перетнуть. І так як характеристичний вектор 3-го порядку з додатними коефіцієнтами при  $\omega \rightarrow \infty$  розташовується в 3-му квадранті, при  $n = 3$  годографи характеристичних векторів  $D_2(j\omega)$ ,  $D_3(j\omega)$  і  $D_4(j\omega)$  послідовно охоплюватимуть три квадранти, якщо годограф характеристичного вектора  $D_1(j\omega)$  послідовно охопить три квадранти. Отже, при  $n = 3$  для робастної стійкості достатньо, щоб годограф характеристичного вектора  $D_1(j\omega)$  послідовно охоплював три квадранти, тобто щоб поліном  $D_1(\lambda)$  був стійким.

б) Якщо із зростанням  $\omega$  вершини 1 і 2 прямокутники, послідовно охоплюючи 1-й і 2-й квадранти, опиняться в 3-му квадранті, то теж саме відбудеться з вершинами 3 і 4. І, якщо при подальшому зростанні  $\omega$  вершина  $2''$  не перетне дійсну вісь, то і вершини  $3''$  і  $4''$  не перетнуть цю вісь. Так як характеристичний вектор 4-го порядку з додатними коефіцієнтами при  $\omega \rightarrow \infty$  розташовується в 4-му квадранті, при  $n = 4$

годографи характеристичних векторів  $D_3(j\omega)$  і  $D_4(j\omega)$  послідовно охоплюватимуть чотири квадранти, якщо годографи характеристичних векторів  $D_1(j\omega)$  і  $D_2(j\omega)$  послідовно охоплять чотири квадранти. Отже, при  $n=4$  для робастної стійкості достатньо, щоб годографи характеристичних векторів  $D_1(j\omega)$  і  $D_2(j\omega)$  послідовно охоплювали чотири квадранти, тобто щоб поліноми  $D_1(\lambda)$  і  $D_2(\lambda)$  були стійкими.

в) Якщо вершини 1, 2 і 3 із зростанням  $\omega$ , послідовно пройшовши 1-й, 2-й і 3-й квадранти, опиняться в 4-му квадранті, то те ж саме відбудеться з вершиною 4. І якщо при подальшому зростанні  $\omega$  вершина 3''' не перетинає уявну вісь, то і вершина 4''' не перетне цю вісь. І так як годограф характеристичного вектора 5-го порядку з додатними коефіцієнтами при  $\omega \rightarrow \infty$  закінчується в 1-му квадранті, годограф характеристичного вектора  $D_4(j\omega)$  при  $n=5$  послідовно охопить п'ять квадрантів, якщо годографи характеристичних векторів  $D_1(j\omega)$ ,  $D_2(j\omega)$  і  $D_3(j\omega)$  послідовно охоплять п'ять квадрантів.

Таким чином, при  $n=5$  для робастної стійкості достатньо, щоб поліноми  $D_1(\lambda)$ ,  $D_2(\lambda)$  і  $D_3(\lambda)$  були стійкими поліномами.

### **Робастний критерій відмови САК**

Якщо при знайденні меж робастної стійкості системи замість деякого значення ВП  $a_i$  використовувати залежність цього параметра від часу  $a_i(t)$ , а потім вирахувати час досягнення цієї межі визначальним параметром САК, то таким чином можна отримати час  $t_{\text{тр}}$ , що визначає наробіток системи до відмови.

Тривалість досягнення межі робастної стійкості при змінюванні ВП САК у часі можна розглядати як **робастний критерій відмови системи**  $t_{\text{тр}}$ . Тоді (гіпер)паралелепіпед Харитонова [5] буде мати вершини, що змінюються у часі. Момент часу, при якому умови робастної стійкості (всі поліноми Харитонова стійкі) не стануть виконуватися, буде визначати момент виникнення відмови САК, який можна розглядати як критерій відмови.

Цей критерій можна використовувати для визначення впливу зміни одного з параметрів САК (наприклад, визначального) на її стійкість. Граничне значення ВП  $a_{i\text{тр}}$ , після якого система стає нестійкою, і буде тим значенням досліджуваного параметра, при якому визначається значення часу  $t_{\text{тр}}$ .



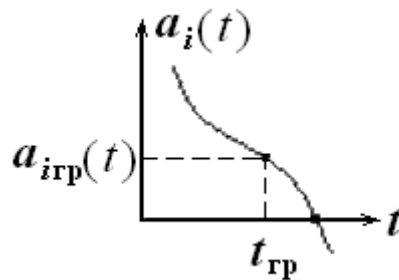


Рис. 3. Знаходження граничного значення параметра  $a_{igr}$ , яке знаходиться на межі стійкості системи

### Параметрична надійність САК для випадкових змін ВП

Вище розглянуто випадок, коли змінювання ВП  $a_i$  у часі *детерміновані*. У загальній постановці завдання час досягнення ВП меж робочої області можна розглядати як систему *випадкових* величин або *векторний випадковий процес*.

Розглянемо характер випадкового процесу наближення до відмови на прикладі САК, працездатність якої визначається скалярним ВП  $A$  (однією координатою векторного ВП). При цьому простір ВП  $A$  буде *одновимірним*, а робоча область  $\Omega$  обмежена відрізком прямої (граничне значення ВП  $a_{гр}$ ). Нехай  $\epsilon$  множина  $j = \overline{1, n}$  однакових САК, одночасно включених у роботу (за  $t=0$ ), і ВП кожної САК вимірюється у ті самі моменти часу  $t_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ).

Зміну ВП однакових САК у процесі експлуатації будемо розглядати як випадкову функцію часу  $A(t)$ . Для кожної  $j$ -ої САК ( $j = \overline{1, n}$ ) зміна ВП є реалізацією (складовою)  $A_j(t)$  випадкової функції  $A(t)$ . Точки перетинання реалізацій  $A_j(t)$  випадкового процесу із межею  $A_{гр}$  робочої області (поля допуску) відповідають моментам часу відмов  $j$ -их САК. Тому випадковий характер виникнення поступових відмов у процесі експлуатації однакових систем описується щільністю розподілу  $f\{X(t)\}$  часу перетинання ВП межі  $A_{гр}$ , тобто щільністю розподілу часу до відмови.

Якщо з моменту включення в роботу (за  $t=0$ ), вимірюючи з однаковою  $\Delta t = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1}$  або різною періодичністю (інтервалом)  $\Delta t$ , контролювати значення ВП кожної  $j$ -ої САК, то можна прогнозувати (екстраполювати) подальші зміни ВП, а отже, передбачити момент настання відмови. Це дасть можливість організувати технічне обслуговування таких САК, тобто забезпечити попереджувальне виведення їх на поточний або капітальний ремонт або відправлення на регулювання. Інтервал часу від початку експлуатації  $t=0$  до моменту,

коли вихід окремих реалізацій  $A_j(t)$  випадкового процесу  $A(t)$  за межі  $A_{\text{тр}}$  робочої області стає частим явищем, називають **часом збереження працездатності**  $t_{36}$ . Правий кінець інтервалу  $t_{36}$  визначається абсцисою характерної точки кривої ЦРВ  $f\{X(t)\}$ , починаючи з якої спостерігається різке зростання кривої.

Маючи інформацію про реальне значення часу досягнення ВП граничного значення  $t_r < t_{36}$  на етапі проектування, можна аналітично розрахувати час збереження працездатності системи, тобто зробити обґрунтований прогноз про працездатність у майбутньому. Це дасть змогу вчасно попередити відмови, а також керувати станом складних САК, замінюючи їх елементи резервними, проводячи підрегулювання або змінюючи робочі режими САК.

*Нестационарний випадковий процес*  $A(t)$  характеризує довгострокові необоротні зміни параметрів у результаті зношування, старіння або розрегулювання. Процес  $A(t)$  – основна причина відмов, його можна назвати **процесом зношування**.

Для випадкових процесів зношування типовими є досить жорсткі зв'язки між значеннями параметра у послідовні моменти часу. Великий вплив на вид реалізації процесу  $A(t)$  справляє фізико-хімічна структура матеріалу і технологія виготовлення об'єкта. Однотипні об'єкти дають близькі за формою криві зношування, але з різними значеннями швидкості зношування. Тому моделі процесів зношування повинні бути функціонально залежними від часу, а їх випадковий характер обумовлюється випадковими параметрами, що не залежать від часу. Подібні випадкові процеси іноді називають **детермінізованими** або **напіввипадковими**.

Випадковий процес  $A(t)$  зношування можна розглядати як залежність

$$A(t) = A_0 + \int_0^t B(\tau) d\tau, \tau \in [0, t],$$

де  $A_0$  – початкове (заводське, фабричне, промислове, виготовлене, настроєне тощо) значення ВП;  $B(t)$  – напіввипадковий процес зміни швидкості зношування. Початкове значення  $A_0$  ВП є випадковою величиною, що іноді має усічений (через допуск підприємства-виробника) розподіл, але не залежить від часу  $t$ .

Як відомо, основою випадкових процесів зміни ВП є необоротні випадкові зміни ВП, викликані старінням, зношуванням або розрегулюванням. Вони певною мірою залежні від часу, їх можна розглядати (з деякою мірою ймовірності) як *поступові*. При цьому *випадковий* характер таких змін обумовлений *випадковими* параметрами,

що не залежать від часу. Отже, моделі реальної зміни ВП об'єкта мають бути випадковими функціями, аргументами яких є постійні у часі випадкові величини й сам час.

Розглянемо найпоширеніші моделі (класи моделей) нестационарних випадкових процесів наближення до відмов.

### **Лінійні випадкові функції.**

Під час лінеаризації реального процесу зношування об'єкта кожна реалізація  $A_j(t)$  процесу замінюється прямою, тобто реальний процес зміни ВП  $A(t)$  апроксимується випадковою функцією вигляду

$$A = A_0 \pm Vt, \quad (6)$$

де  $A_0$  – випадкове початкове значення ВП (за  $t=0$ ), що має математичне сподівання (МС)  $m_{A_0} = M\{A_0\}$  та середнє квадратичне відхилення (СКВ)  $S_{A_0} = \sqrt{D_{A_0}}$ ,  $A_0 = A(t=0)$ ;  $V$  – випадкова нормально розподілена швидкість зміни ВП у часі, що має МС  $m_V = M\{V\}$  та СКВ  $S_V = \sqrt{D_V}$ ,  $V = \{v\}$ .

### **Нелінійні випадкові функції**

Для багатьох об'єктів є типовою деяка постійна відносна швидкість зміни ВП  $\frac{dA(t)/dt}{A(t)} = V^*$ , що відповідає нелінійному випадковому процесу  $A(t)$ , який апроксимується випадковою функцією вигляду

$$A = A_0 \exp(\pm V^* t), \quad (7)$$

де  $V^*$  – випадкова, нормально розподілена швидкість зміни натурального логарифма ВП  $V^* = \frac{d \ln A}{dt}$ , що має МС  $m_{V^*} = M\{V^*\}$  та СКВ  $S_{V^*} = \sqrt{D_{V^*}}$ .

У моделях обох класів (6) та (7) знаки «+» і «-» використовуються для апроксимації відповідно зростаючих й спадних у часі процесів. Випадкова величина  $X_0$  у моделях (6) та (7) є постійною в часі, як і випадкова величина швидкості  $V$  зміни ВП у моделі (6). У моделі (7) постійною в часі є швидкість зміни логарифма ВП, сам же ВП має змінювану у часі швидкість зміни.

Для зручності подальшого розгляду моделей тільки в лінійному варіанті модель (7) логарифмуванням перетворимо до лінійної моделі зміни логарифма ВП:

$$\ln A(t) = \ln A_0 \pm V^* t. \quad (8)$$

Якщо позначити натуральний логарифм ВП випадковою функцією  $Y(t)$ , тобто  $Y(t) = \ln A(t)$ ;  $Y_0 = \ln A_0$ , то вираз (8) можна представити як

$$Y(t) = Y_0 \pm V^* t, \quad (9)$$

подібний моделі (6). Тобто, можна розглядати різні модифікації випадкових процесів тільки для  $A(t)$ , а результати аналізу використовувати сумісно, як для ВП  $A(t)$ , так і для  $\ln A(t)$ , тому що моделі для  $A(t)$  та  $\ln A(t)$  будуть подібні.

Розглянемо окремо кожен тип лінійних випадкових моделей, які апроксимують випадковий процес зміни ВП  $A(t)$  або його логарифма  $\ln A(t)$ .

**Основні типи лінійних моделей**

З різних модифікацій лінійних зростаючих випадкових функцій зміни ВП  $A(t)$  або  $\ln A(t)$  найчастіше процес наближення об'єкта до відмов апроксимується такими типами моделей:

- а) віялової з ненульовим початковим розсіюванням (рис. 3.2);
- б) віялової з нульовим початковим розсіюванням (рис. 3.3);
- в) рівномірної (рис. 3.4).

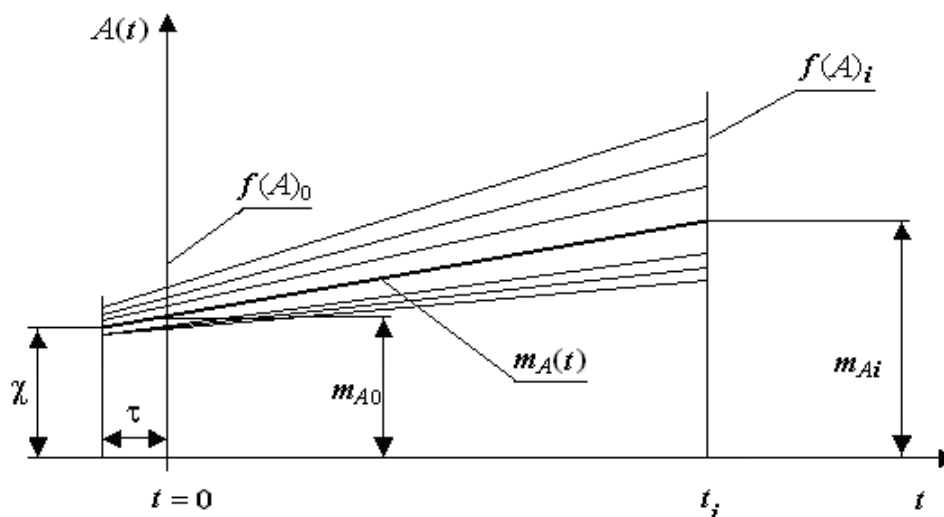


Рис. 3.2. Віялова модель зміни ВП з ненульовим початковим розсіюванням  $\chi$

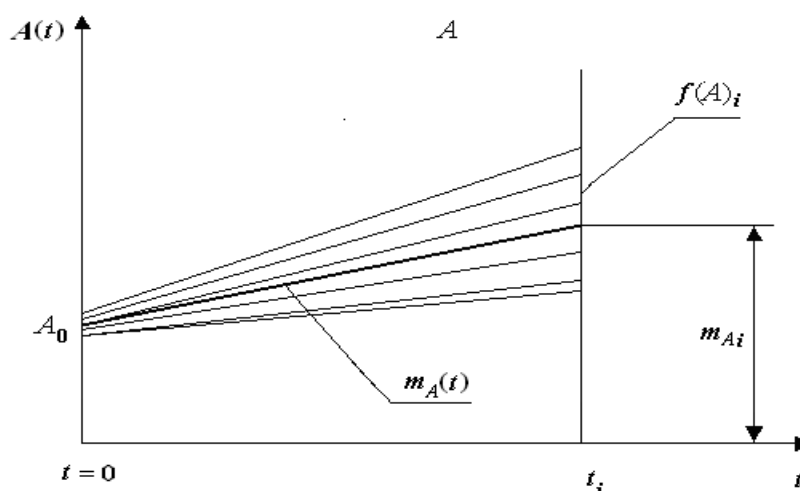


Рис. 3.3. Віялова модель зміни ВП з нульовим початковим розсіюванням

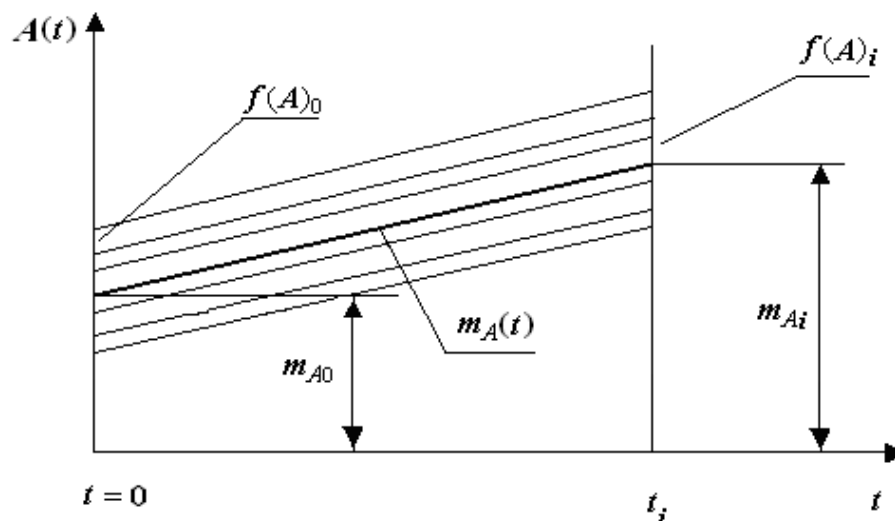


Рис. 3.4. Віялова модель рівномірної зміни ВП

Тип моделі лінійної функції  $A(t)$  або  $\ln A(t)$  залежить від кількості випадкових аргументів, які визначають її випадковий характер.

Віялову функцію з ненульовим початковим розсіюванням можна описати так

– для процесу  $A(t)$ :

$$A(t) = \chi + V(t + \tau); \tag{10}$$

– для процесу  $\ln A(t)$ :

$$\ln A(t) = \ln \chi + V^*(t + \tau). \tag{11}$$

Якщо  $t = 0$ , значення функцій (10) і (11) являють собою випадкову величину відповідно:

$$A_0 = \chi + V\tau, \tag{12}$$

$$\ln A_0 = \ln \chi + V^*\tau. \tag{13}$$

З урахуванням формул (12) та (13) моделі (10) та (11) легко можна подати у вигляді (6) та (9). Випадковий характер розглянутої моделі визначається двома випадковими аргументами:

1)  $A_0$  або  $\ln A_0$  – випадкове початкове значення ВП або його логарифма;

2)  $V$  або  $V^*$  – випадкова швидкість зміни ВП або його логарифма.

Усі реалізації віялової лінійної випадкової функції з ненульовим початковим розсіюванням проходять через загальну невідому точку – «поліус» (рис. 3.2).

Аргумент розглянутої моделі (випадкова швидкість зміни ВП  $V$  або логарифма ВП  $V^*$ ) – має нормальний розподіл із щільністю розподілу відповідно

$$f(V) = \frac{1}{S_V \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(V - m_V)^2}{2S_V^2} \right];$$

$$f(V^*) = \frac{1}{S_{V^*} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(V^* - m_{V^*})^2}{2S_{V^*}^2} \right].$$

Лінійно залежна від  $V$  випадкова функція  $A(t)$  (10) у всіх  $i = \overline{0, k}$  перетинах буде розподілена нормально із щільністю

$$f(A)_i = \frac{1}{S_{A_i} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(A_i - m_{A_i})^2}{2S_{A_i}^2} \right], \quad i = \overline{0, k}, \quad (14)$$

де параметри розподілу:  $m_{A_i} = M\{A_i\}$  – це МС;  $S_{A_i}$  – це СКВ. Числові характеристики, тобто МС  $M\{A(t)\} = m_\chi(t)$  і СКВ  $S\{A(t)\} = S_\chi(t)$  самої випадкової функції (10), можна виразити через числові характеристики  $m_V$  та  $S_V$  випадкової швидкості:

$$m_\chi(t) = \chi + m_V(t + \tau); \quad (15)$$

$$S_\chi(t) = S_V(t + \tau). \quad (16)$$

Випадкове початкове значення ВП  $A_0$  відповідає значенням функції  $A(t)$  (10) за  $t = 0$ , тому також має нормальний розподіл згідно з функцією (14) за  $i = 0$  з параметрами  $m_A(t = 0) = m_{A_0}$  і СКВ  $S_A(t = 0) = S_{A_0}$ , які отримують із виразів (15) та (16) за  $t = 0$ :

$$m_{A_0} = \chi + m_V \tau, \quad (17)$$

$$S_{A_0} = S_V \tau. \quad (18)$$

З урахуванням виразів (17) та (18) вирази (15) та (16) для числових характеристик випадкової функції (10) набудуть вигляду

$$m_A(t) = m_{A_0} + m_V \tau, \quad (19)$$

$$S_A(t) = S_{A_0} + S_V \tau. \quad (20)$$

Відповідно до функції (11) нормальний розподіл швидкості  $V^*$  зумовлює те, що лінійно залежний від  $V^*$  логарифм ВП  $\ln A(t)$  також буде розподілений нормально в усіх  $i = \overline{0, k}$  перетинах із щільністю розподілу

$$f(\ln A)_i = \frac{1}{S_{\ln A_i} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\ln A_i - m_{\ln A_i})^2}{2S_{\ln A_i}^2} \right], \quad i = \overline{0, k}. \quad (21)$$

Визначальний параметр при цьому буде мати логарифмічно нормальний розподіл, щільність якого

$$f(A)_i = \frac{1}{S_{\ln A_i} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(A_i - m_{\ln A_i})^2}{2S_{\ln A_i}^2} \right], \quad i = \overline{0, k}. \quad (22)$$

У виразах (21) та (22)  $m_{\ln A_i} = M \{ \ln A_i \}$  і  $S_{\ln A_i} = \sqrt{D_{\ln A_i}} = \sqrt{M \{ (\ln A_i - m_{\ln A_i})^2 \}}$  – відповідно МС і СКВ логарифма ВП у  $i = \overline{0, k}$  перетинах випадкової функції (11).

Математичне сподівання  $m_{\ln A}(t)$  і СКВ  $S_{\ln A}(t)$  можна отримати, використовуючи числові характеристики випадкової швидкості  $V$ :  $m_{V^*}$  та  $S_{V^*}$ . Проводячи аналогічні, як для функції (10), перетворення, отримуємо числові характеристики моделі (11) зміни логарифма ВП  $\ln A(t)$ :

$$m_V(t) = m_{V_0} + m_{V^*}t, \quad (23)$$

$$S_V(t) = S_{V_0} + S_{V^*}t. \quad (24)$$

*Віялова функція з нульовим початковим розсіюванням* є частковим окремим випадком моделей (3.3) та (9) і може бути отримана із зазначених виразів заміною в них, відповідно, випадкових початкових значень ВП  $A_0$  або його логарифма  $\ln A_0$  деяким не випадковим значенням  $K_0$  або  $\ln K_0$ .

Оскільки віялова модель із нульовим початковим розсіюванням є частковим окремим випадком моделей (10) та (11) з ненульовим початковим розсіюванням, то її властивості визначаються властивостями зазначених моделей; тому числові характеристики можна знайти:

– для функції  $A(t) = K_0 + Vt$  зміни ВП з виразів (19) та (20) отримаємо

$$m_A(t) = K_0 + m_V t;$$

$$S_A(t) = S_V t.$$

– для функції зміни ВП  $\ln A(t) = \ln K_0 + V^*t$  з виразів (23) та (24) отримаємо

$$m_V(t) = \ln K_0 + m_{V^*}t;$$

$$S_V(t) = S_{V^*}t.$$

*Рівномірна функція* також є частковим випадком моделей (3.3) та (9) і може бути отримана з останніх заміною в них відповідно випадкових швидкостей зміни ВП  $V$  або його логарифма  $V^*$  на не випадкові (постійні) швидкості  $v$  або  $v^*$ .

Числові характеристики випадкових функцій знаходять (подано без виведення):

– для функції зміни ВП  $A(t) = A_0 + v^*t$  з виразів (19) та (20) отримаємо

$$m_A(t) = m_{A_0} + vt;$$

$$S_A(t) = S_{A_0} = \text{const};$$

– для функції  $\ln A(t) = \ln A_0 + v^*t$  з виразів (23) та (24) отримаємо

$$m_v(t) = m_{v_0} + v^*t;$$

$$S_v(t) = S_{v0} = \text{const.}$$

Розглянуті лінійні моделі зручні для апроксимації випадкових процесів зміни ВП тим, що дають можливість характеризувати ці процеси обмеженою кількістю аргументів моделі, для визначення яких потрібен мінімальний обсяг експериментальних даних.

Крім того отримані вирази, де можна визначити час  $t$  (формули (23), (24) та інші), дозволяють знайти час збереження працездатності  $t_{3б}$ , і таким чином визначити критерій відмови робастно стійкої системи.

#### *Висновки.*

1. Досягнення САК межі параметричної (робастної) стійкості можна розглядати, як перехід системи в стан непрацездатності (в стан відмови). Час переходу САК з початку її функціонування до моменту втрати параметричної стійкості можна нормувати **робастним критерієм її відмови**, який обмежує допустиме значення призначеного ресурсу САК при її проектуванні. Такий критерій також дозволить враховувати процеси фізичної деградації САК під час її експлуатації при нормуванні часу наступного підрегулювання (тривалості межремонтного періоду).

2. *Робастний критерій відмови* визначається згідно умов робастної стійкості стаціонарних систем [5], якщо використати замість фіксованого значення визначального параметра САК його функціональну залежність від часу.

#### *Використані джерела інформації:*

1. Канарчук В. Є. Надійність машин: підруч. / В. Є. Канарчук, С. К. Полянський, М. М. Дмитрієв. – К.: Либідь, 2003. – 424 с. – Бібліогр.: с. 418. – 2000 пр. – ISBN 966-06-0215-4.
2. Нечипоренко О. М. Основи надійності літальних апаратів. Навчальний посібник з грифом МОН України. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 240 с. – Бібліогр.: 235-238. – 300 пр. – ISBN 978-966-622-360-2.
3. Черкесов Г. Н. Надежность аппаратно-программных комплексов: учеб. пособие / Г. Н. Черкесов. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с. – Библиогр.: в конце глав. – 4000 экз. – ISBN 5-469-00102-4.
4. Половко А. М. Основы теории надежности / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с. – Библиогр.: с. 689-698. – 3000 экз. – ISBN 5-94157-541-6.
5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с. – Библиогр.: с. 280-281. – ISBN 5-9221-0379-2.
6. ДСТУ 3433-96. Надійність техніки. Моделі відмов. Основні положення. – К.: Держстандарт України, 1998. – 42 с.

*Рецензент: д.т.н. Рижков Л.М.*