

- середовища в Збройних Силах України //Наука і оборона. – 2003. – № 3. – С. 50 – 56.
6. Романченко І.С., Сбітнев А.І., Чумаченко С.М.. Проектування бази даних для системи моніторингу навколишнього середовища в Збройних Силах України //Наука і оборона. – 2004. – № 1. – С. 47 – 53.
 7. Военная экология: Учебник для высших военных учебных заведений /И.П. Айдаров, Б.Н. Алексеев, А.В. Бударрагин и др. Под редакцией Н.В. Петрухина, А.В. Тарабары, И.А. Постовита. — М.: Русь – СВ, 2000. — 360 с.
 8. Григоров С.И., Родионов А.С.. Военная экология и экологическое обеспечение Вооруженных Сил Российской Федерации. — Военная мысль. – 1994. - № 2.
 9. Бондар О.І., Корінько І.В., Ткач В.М., Федоренко О.І. Моніторинг навколишнього середовища: Навчальний посібник. - К.-Х.: ДЕІ-ГТІ, 2005. - 126 с.
 10. Временное методическое руководство по проведению комплексных эколого-геологических исследований (на территории Украины) / Е.А. Яковлев, Г.Г. Лютый, В.И. Почтаренко и др. – К.: ГПП «Геопрогноз», 1994. – 331 с.
 11. Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной среды. - М.: Гидрометеиздат, 1984. — 560 с.
 12. Лысенко А.И., Чумаченко С.Н., Чеканова И.В., Турейчук А.Н. Математическая постановка задачи оптимального управления экологическим состоянием техногенно нагружаемых территорий // Адаптивні системи автоматичного управління. - Вип.5(25). - 2002. - С.45-55.

УДК 519.652:519.254 (045)

О.Г.Чолишкіна, к.т.н.,
О.О.Колганова, к.т.н.,
А.М.Негода, здобувач
НАУ, м.Київ

ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ В-СПЛАЙНІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЗГЛАДЖУВАННЯ ТА МАСШТАБУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В статті одержано нові лінійні оператори, що є частковими випадками локальних поліноміальних сплайнів на основі В-сплайнів другого, третього та п'ятого порядків. Отримані функціонали можуть мати використання в задачах згладжування, масштабування та стиснення цифрових сигналів.

В статье получены новые линейные операторы, которые являются частными случаями локальных полиномиальных сплайнов на основе В-сплайнов второго, третьего и пятого порядков. Полученные функционалы

могут применяться в задачах сглаживания, масштабирования и сжатия цифровых сигналов.

In this article basis of linear operators that are special cases of locally polynomial splines based on B-splines of second, third and fifth orders. The resulting functional can be used in smoothing problems, scaling and compression of digital signals.

Постановка проблеми. В реальній практиці обробки цифрових сигналів актуальним є застосування методів, що забезпечують можливість придушення випадкової завади, що за всяк час присутня в таких даних. Природа завади може бути різною, проте за замовченням вважають, що для неї має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням та деякою дисперсією. Причому, згідно нерівності Чебишева, похибка, яку надає завада, буде тим більшою, чим більшою є величина її дисперсії. Тому в таких задачах, як низькочастотна фільтрація або масштабування послідовності, актуальним може бути використання методів, що є обчислювальним аспектом апроксимацій в середньому. При цьому вимогою до конкретних обчислювальних процедур є мінімальна кількість арифметичних операцій, задля забезпечення процесу обробки сигналу у режимі реального часу.

Проблематикою даної роботи визначимо одержання конкретних лінійних операторів, що є частковим випадком відомого підходу до локальної апроксимації, близької до інтерполяційної в середньому.

Аналіз публікацій та постановка задачі. Нехай є деякий аналоговий сигнал $p(t) \in L_2(\mathbf{R})$ з кінцевою енергією, заданий дискретно (цифровий сигнал) відліками на рівномірному розбитті $\Delta_h: ih, i \in \mathbf{Z}: \{p_i\} \in l_2(\mathbf{Z})$. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. На практиці часто буває, що в силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h} \int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t) \phi(t-ih) dt = \bar{p}_i.$$

Тоді для кожного відліку можемо записати

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, i \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

де ε_i – випадкова завада. В роботі [1] обґрунтовано для даних (1) в якості моделі сигналу $p(t)$ використовувати лінійні комбінації B-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [2; 3]. Причому, якщо в якості апроксимації сигналу обрати такий вираз:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} p_i B_{r,h}(t-ih), r \geq 2, \quad (2)$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного

низькочастотного фільтру. Останнє ствердження є наслідком того, що як і функція Гауса, будь-який B -сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ) – якщо $B_r(t)$, $r \geq 2$ – B -сплайн порядку r , то [4]

$$\hat{B}_r(\omega) = \left(\frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i\omega} \right)^{r+1} = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^{r+1}$$

і вже починаючи з порядку $r = 5$ і B -сплайн, і гаусіан в частотній області фактично мало чим відрізняються, при цьому обрахунок B -сплайну п'ятого порядку потребує менше обчислювальних затрат [1].

Вперше сплайни (2), близькі до інтерполяційних у середньому, розглядалися в роботах І. Шоенберга, в їх дослідження при різних значення ступеня r внесли вагомий внесок А.О. Лигун, В.В. Кармазіна, О.О.Шумейко, П.О.Приставка. Якщо ввести заміну

$$x = \frac{2}{h}(t - (i + 0,5)h), \quad |x| \leq 1, \quad \text{при } r = 2, 4$$

та

$$x = \frac{2}{h}(t - ih), \quad |x| \leq 1, \quad \text{при } r = 3, 5,$$

то, з урахуванням подання B -сплайну [3; 5], сплайни $S_{r,0}(p, t)$, $r = 2, 3, 4, 5$ можна навести в розгорнутому представленні:

$$S_{2,0}(p, t) = \frac{1}{8} \left((1-x)^2 p_{i-1} + (6-2x^2) p_i + (1+x)^2 p_{i+1} \right), \quad (3)$$

$$S_{3,0}(p, t) = \frac{1}{48} \left((1-x)^3 p_{i-1} + (23-15x-3x^2+3x^3) p_i + \right. \\ \left. + (23+15x-3x^2-3x^3) p_{i+1} + (1+x)^3 p_{i+2} \right), \quad (4)$$

$$S_{4,0}(p, t) = \frac{1}{384} \left((1-x)^4 p_{i-2} + (76-88x+24x^2+8x^3-4x^4) p_{i-1} + \right. \\ \left. + (230-60x^2+6x^4) p_i + (76+88x+24x^2-8x^3-4x^4) p_{i+1} + (1+x)^4 p_{i+2} \right), \quad (5)$$

$$S_{5,0}(p, t) = \frac{1}{3840} \left((1-x)^5 p_{i-2} + (237-375x+210x^2-30x^3-15x^4+5x^5) p_{i-1} + \right. \\ \left. + (1682-770x-220x^2+140x^3+10x^4-10x^5) p_i + \right. \\ \left. + (1682+770x-220x^2-140x^3+10x^4+10x^5) p_{i+1} + \right. \\ \left. + (237+375x+210x^2+30x^3-15x^4-5x^5) p_{i+2} + (1+x)^5 p_{i+3} \right). \quad (6)$$

В роботах [6 – 8] показано отримання низькочастотних цифрових фільтрів на основі сплайнів (3) – (6). В роботах [3; 9; 10 та інш.] наведено

прикладі використання таких сплайнів при розробці процедур бінарного поповнення послідовностей відліків деяких функцій (процедури бінарного *subdivision* [11]). Поставимо за мету даної роботи отримати інші часткові випадки сплайнів (3) – (6), що можуть мати використання в таких задачах, як стиснення цифрових сигналів з втратами, не бінарне масштабування та інші.

Виклад основного матеріалу. Введемо позначення $\gamma_{(x)}^{(r,k)}$ - вектор стовпець координати якого після операції дискретної згортки з послідовністю відліків $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, функції $p(t)$ надають лінійний функціонал $S_{r,k}^{(x)}$, що є частковим випадком сплайнів (1)-(4) в точці x , тобто:

$$S_{r,k}^{(x)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{(x)}^{(r,k)} \cdot p_i.$$

Нехай x може набувати значення із множини

$$X = \left\{ -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1 \right\}.$$

Тоді для сплайну $S_{2,0}(p,t)$ має місце :

$$S_{2,0}^{(x)} = \sum_{j=i-1}^{i+1} \gamma_{(x)}^{(2,0)} \cdot p_j, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{(-1)}^{(2,0)} &= \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 0)^T; \\ \gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200} (81 \ 118 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(2,0)} &= \frac{1}{128} (49 \ 78 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(2,0)} &= \frac{1}{72} (25 \ 46 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200} (64 \ 132 \ 4)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(2,0)} &= \frac{1}{32} (9 \ 22 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200} (49 \ 142 \ 9)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{3})}^{(2,0)} &= \frac{1}{18} (4 \ 13 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{4})}^{(2,0)} &= \frac{1}{128} (25 \ 94 \ 9)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200} (36 \ 148 \ 16)^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(0)}^{(2,0)} &= \frac{1}{8}(1 \ 6 \ 1)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200}(16 \ 148 \ 36)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{4})}^{(2,0)} &= \frac{1}{128}(9 \ 94 \ 25)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{3})}^{(2,0)} &= \frac{1}{18}(1 \ 13 \ 4)^T; \\ \gamma_{(\frac{2}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200}(9 \ 142 \ 49)^T; \\ \gamma_{(\frac{1}{2})}^{(2,0)} &= \frac{1}{32}(1 \ 22 \ 9)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200}(4 \ 132 \ 64)^T; \\ \gamma_{(\frac{2}{3})}^{(2,0)} &= \frac{1}{72}(1 \ 46 \ 25)^T; \\ \gamma_{(\frac{3}{4})}^{(2,0)} &= \frac{1}{128}(1 \ 78 \ 49)^T; \\ \gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(2,0)} &= \frac{1}{200}(1 \ 118 \ 81)^T; \\ \gamma_{(1)}^{(2,0)} &= \frac{1}{2}(0 \ 1 \ 1)^T. \end{aligned}$$

Для сплайну $S_{3,0}(p, t)$ $x \in X$ має місце:

$$S_{3,0}^{(x)} = \sum_{j=i-1}^{i+2} \gamma_{(x)}^{(3,0)}{}_{j-i} \cdot P_j, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{(-1)}^{(3,0)} &= \frac{1}{6}(1 \ 4 \ 1 \ 0)^T; \\ \gamma_{(-\frac{4}{5})}^{(3,0)} &= \frac{1}{6000}(729 \ 3943 \ 1327 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{4})}^{(3,0)} &= \frac{1}{3072}(343 \ 2003 \ 725 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{2}{3})}^{(3,0)} &= \frac{1}{1296}(125 \ 831 \ 339 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{3}{5})}^{(3,0)} &= \frac{1}{750}(64 \ 473 \ 212 \ 1)^T; \\ \gamma_{(-\frac{1}{2})}^{(3,0)} &= \frac{1}{384}(27 \ 235 \ 121 \ 1)^T; \end{aligned}$$

$$\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{6000}(343 \ 3541 \ 2089 \ 27)^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{162}(8 \ 93 \ 60 \ 1)^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{3072}(125 \ 1697 \ 1223 \ 27)^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{750}(27 \ 404 \ 311 \ 8)^T;$$

$$\gamma_{(0)}^{(3,0)} = \frac{1}{48}(1 \ 23 \ 23 \ 1)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{750}(8 \ 311 \ 404 \ 27)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{3072}(27 \ 1223 \ 1697 \ 125)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{162}(1 \ 60 \ 93 \ 8)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{5}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{6000}(27 \ 2089 \ 3541 \ 343)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{384}(1 \ 121 \ 235 \ 27)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{750}(1 \ 212 \ 473 \ 64)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{1296}(1 \ 339 \ 831 \ 125)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{3072}(1 \ 725 \ 2003 \ 343)^T;$$

$$\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(3,0)} = \frac{1}{6000}(1 \ 1327 \ 3943 \ 729)^T;$$

$$\gamma_{(1)}^{(3,0)} = \frac{1}{6}(0 \ 1 \ 4 \ 1)^T.$$

Для сплайну $S_{5,0}(p, t)$ та $x \in X$ має місце:

$$S_{5,0}^{(x)} = \sum_{j=i-2}^{i+3} \gamma_{(x)}^{(5,0)}{}_{j-i} \cdot p_j, \quad (9)$$

де

$$\gamma_{(-1)}^{(5,0)} = \frac{1}{120}(1 \ 26 \ 66 \ 26 \ 1 \ 0)^T;$$

$$\gamma_{\left(-\frac{4}{5}\right)}^{(5,0)} = \frac{1}{12 \cdot 10^6}(59049 \ 2121805 \ 6540290 \ 3117810 \ 161045 \ 1)^T;$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\left(-\frac{3}{4}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{3932160}(16807 \ 658533 \ 2132198 \ 1065578 \ 59043 \ 1)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{2}{3}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{933120}(3125 \ 142301 \ 500426 \ 270466 \ 16801 \ 1)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{3}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{375000}(1024 \ 52905 \ 198890 \ 114410 \ 7770 \ 1)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{1}{2}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{122880}(243 \ 15349 \ 63854 \ 40314 \ 3119 \ 1)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{2}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{12 \cdot 10^6}(16807 \ 1319015 \ 6081870 \ 4212230 \ 369835 \ 243)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{1}{3}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{29160}(32 \ 2933 \ 14498 \ 10678 \ 1018 \ 1)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{3932160}(3125 \ 352543 \ 1903218 \ 1513438 \ 159593 \ 243)^T; \\
\gamma_{\left(-\frac{1}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{375000}(243 \ 31310 \ 178330 \ 148470 \ 16615 \ 32)^T; \\
\gamma_{(0)}^{(5,0)} &= \frac{1}{3840}(1 \ 237 \ 1682 \ 1682 \ 237 \ 1)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{375000}(32 \ 16615 \ 1484470 \ 178330 \ 31310 \ 243)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{4}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{3932160}(243 \ 159593 \ 1513438 \ 1903218 \ 352543 \ 3125)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{29160}(1 \ 1018 \ 10678 \ 14498 \ 2933 \ 32)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{2}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{12 \cdot 10^6}(243 \ 369835 \ 4212230 \ 6081870 \ 1319015 \ 16807)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{122880}(1 \ 3119 \ 40314 \ 63854 \ 15349 \ 243)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{3}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{375000}(1 \ 7770 \ 114410 \ 198890 \ 52905 \ 1024)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{2}{3}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{933120}(1 \ 16801 \ 270466 \ 500426 \ 142301 \ 3125)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{3}{4}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{3932160}(1 \ 59043 \ 1065578 \ 2132198 \ 658533 \ 16807)^T; \\
\gamma_{\left(\frac{4}{5}\right)}^{(5,0)} &= \frac{1}{12 \cdot 10^6}(1 \ 161045 \ 3117810 \ 6540290 \ 2121805 \ 59049)^T; \\
\gamma_{(1)}^{(5,0)} &= \frac{1}{120}(0 \ 1 \ 26 \ 66 \ 26 \ 1)^T.
\end{aligned}$$

Наведемо приклад застосування часткових випадків сплайну (4) в задачі бінарного розшарування відліків *DST*-індекса геомагнітної

активності [12] за перші дев'ять місяців 2012 року. Результат відтворення даних після 32-кратного зменшення їх кількості на основі процедур *subdivision* наведено на графіках (рис.1, 2). Як видно, згладжувальні властивості сплайну (4) забезпечили прийнятний рівень відсіву шумової складової, що в результаті забезпечує адекватне оцінювання поведінки тієї, чи іншої магнітної бурі.



Рис.1. Графік зміни DST -індекса за перші 9-ть місяців 2012 р. та результат відтворення після 32-кратного зменшення кількості відліків (товста лінія).

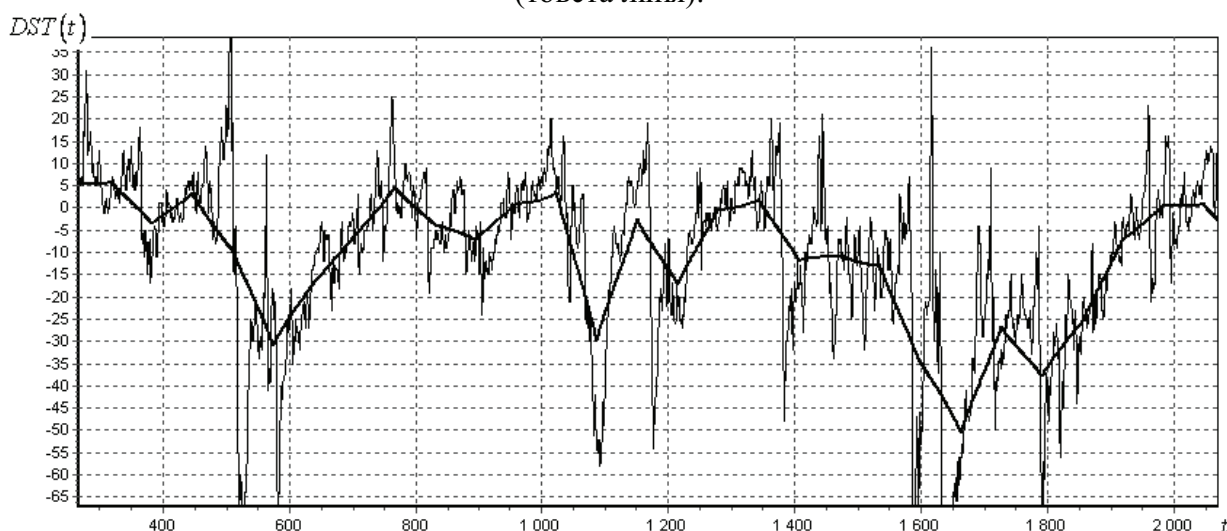


Рис.2. Графік зміни DST -індекса за перші 9-ть місяців 2012 р. (фрагмент). Товстою лінією відображено відтворення даних після 32-кратного стиснення.

Висновки. В роботі отримано нові лінійні оператори (7) – (9), що є частковими випадками сплайнів (2) другого, третього та п'ятого порядків. Особливістю операторів є їх низька обчислювальна складність, що дозволяє рекомендувати їх при обробці цифрових сигналів в режимі реального часу.

Згладжувальні властивості сплайнів (2), на основі котрих одержано нові функціонали, дають змогу при розробці обчислювальних схем нівелювати вплив високочастотної завади з відповідною дисперсією.

Отримані часткові випадки сплайнів на основі B -сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, можуть мати використання в задачах кратно- та некратномасштабного аналізу, в задачі фільтрації цифрових сигналів та при розробці нових методів стиснення, в тому числі й цифрових зображень (по-строкове та по-стовпцеве застосування).

Подальші дослідження припускають отримання двовимірних часткових випадків сплайнів на основі поданих в роботі одновимірних.

Використані джерела інформації:

1. Приставка П.О. Лінійні комбінації B -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : Зб. наук. праць. - Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2011. -Т.15. –С.4-17.
2. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых.- К.: ИМ НАНУ, 1997.- 358 с.
3. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни при обробці даних. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
4. M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22-38, 1999.
5. Приставка П.О., Чолишкіна О.Г. Дослідження B -сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / Математичне моделювання. – ДДТУ, Дніпродзержинськ. – 2007.- №1(16). - С.14-17.
6. Приставка П.О. Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2006. -Т.10. –С.3-14.
7. Чолишкіна О.Г. Застосування поліноміальних сплайнів на основі B -сплайнів п'ятого порядку під час побудови фільтрів / О. Чолишкіна // Вісн. НАУ.- К.: НАУ.- 2009.-№1. -С. 214-218.
8. Приставка П.О. Обробка сигналів з високочастотною завадою на основі часткових випадків комбінацій B -сплайнів / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : Зб. наук. праць. - Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2010. - Т.14. –С.3-12.
9. Приставка П.О. Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення / Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій.- Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту.- 2003.-Т.7. –С.39-53.
10. Приставка П.О. Поповнення зі згладжуванням послідовностей відліків функцій двох змінних на основі сплайнів / Математичне моделювання. – 2008. - №1(18). - С.9-12
11. Andersson L.-E., Stewart N. Introduction to the mathematics of subdivision surfaces. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. – 356 p.
12. Інтернет ресурс http://omniweb.gsfc.nasa.gov/html/omni2_doc.html