УДК:519.876.5

Кривенко Н.И., ст.. преподаватель,
Академия муниципального управления

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ В ДВУМЕРНОМ ТЕЛЕ

Предложена аналитическая математическая модель для исследования стационарного температурного поля, формируемого в двумерном теле при обработке оптических материалов ленточным электронным лучом в вакуумной камере, учитывающая дискретные источники теплового воздействия на границе двумерного тела и расстояние от источников теплового воздействия до внутренних точек тела, для которых рассчитывается температура. Рассматривается также математическая модель для случая постоянной температуры на границе двумерного тела, а также приведены точностные характеристики расчета температурного поля обеими математическими моделями.

Запропонована аналітична математична модель для дослідження стаціонарного температурного поля, яке формуються в двомірному тілі при обробці оптичних матеріалів ланцюговим електронним променем в вакуумній камері, яка враховує джерела теплової дії на границі двомірного тіла та відстань від джерел теплової дії до внутрішніх точок тіла, для яких розраховується температура. Розглядається також математична модель для випадку постійної температури на границі двомірного тіла, а також приведені точності характеристики розрахунку температурного поля обома математичними моделями.

The proposed analytical mathematical model for the study of stationary temperature field, which are formed in two-dimensional body in the processing of optical materials chain electron beam in a vacuum chamber, which takes into account the source of thermal effects on the border of two-dimensional body and the distance from sources of heat of the internal points of the body for which the calculated temperature . We also consider the mathematical model for the case of constant temperature on the border of two-dimensional body, and given the accuracy of calculation of temperature field characteristics of the two mathematical models.

Известна математическая модель (ММ) электронно – лучевой обработки оптических материалов, в которой учтен процесс распространения тепла в обрабатываемом материале за счет теплопроводности и представленный известным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных с заданными граничными условиями [1]. Дифференциальное уравнение ММ решено методом двойного интегрирования и имеет методическую ошибку расчета температурного поля за счет использования численных методов при вычислении интегралов. Получение аналитического выражения для расчета температурного поля требует высокой квалификации математика – программиста и не соответствует принятой в технике концепции по ограниченю форм и методов решения технических задач при разработке их ММ. Кроме того, при отладке программного обеспечения для расчета температурного поля такими ММ возникают трудности с проверкой правильности выполненных расчетов из-за сложного математического выражения, описывающего процесс распространения тепла в обрабатываемом материале.

Известен интерполяционный метод расчета стационарной температуры в двумерном теле, в котором используется линейная зависимость распределения температуры [2]:

$$T_{x,y} = T_4 + \frac{(T_2 - T_4)}{M} \cdot x + T_1 + \frac{(T_3 - T_1)}{L} \cdot y \,, \qquad (1)$$

где: $T_{x,y}$ - температура во внутренней точке с координатами x,y; T_1, T_2,T_3,T_4 – температура на 4-х границах двухмерного тела; M,L – геометрические размеры тела по координатам x и y, соответственно; x,y – координаты внутренней точки, для которой расчитывается температура.

Практическое использование интерполяционного метода для расчета стационарного температурного поля показало значительную погрешность расчетов и, как следствие этого, непригодность для использования при разработке термических процессов обработки материалов.

Возможно проведение точных расчетов стационарного температурного поля в двумерном теле при использовании в качестве ММ дифференциального уравнения Лапласа [2] второго порядка с соответствующими граничними условиями. Для решения дифференциального уравнения возможно использование метода конечних разностей [3] с последующим представлением дифференциального уравнения системой алгебраических уравнений. Для решения системы алгебраических уравнений может бать использован итерационный метод Зейделя или метод простой итерации [2]. При этом возникают те же проблемне задачи, что и при использовании ММ [1].

Для качественной оценки правильности вычисления стационарного температурного поля при отладке соответствующего програмного обеспечения предлагается дискретная ММ как альтернативная интерполяционной модели (1):

$$T_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i \cdot \frac{1}{R_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i^2}} \,, \qquad (2)$$

где: $T_{x,y}$ - температура в точке с координатами x,y; T_i - температура точечного источника тепла на внешних границах тела; n- общее количество теплових источников на внешних границах тела;; R_i – расстояние от точки, в которой рассчитывается температура, до i-того теплового источника, расположенного на границе двумерного тела.

Анализ ММ (2) показывает, что она учитывает влияние на температуру выбранной точки двумерного тела всех источников тепла с соответствующими коэффициентами обратно пропорциональными квадрату расстояния R_i, а также сумму всех обратно пропорциональных квадратов расстояний R_i.

На рис.показано двумерное тело и все принятые выше обозначения.

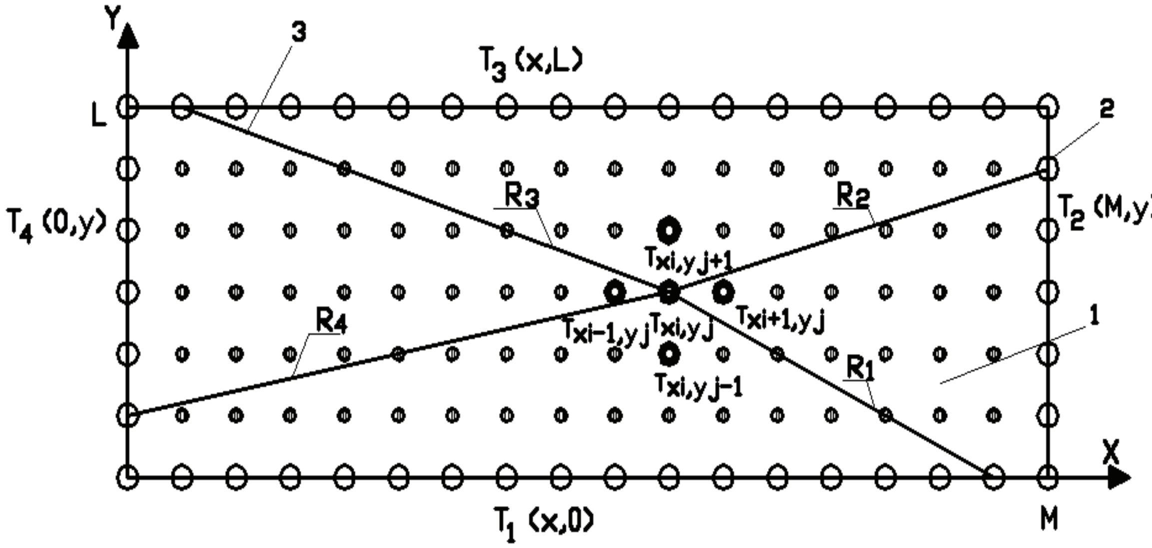

Рис 1. Двумерное тело задачи расчета статического температурного поля.

L, M – геометрические характеристики тела, 1- внутренняя область; 2 – внешняя область; 3- расстояние R_i от точки с координатами x,y до i-того точечного источника тепла; T1(x,0), T2(L, y), T3(x, L), T4(0, y) – температура внешних границ тела с соответствующими координатами в принятой системе координат.

Точность вычисления температурного поля ММ (2) зависит от количества выбранных теплових источников на границе двумерного тела и размера дискретизации внутренней области тела.

Известны задачи расчета температуры в двумерном теле, например при электронно- лучевой обработке оптических материалов, при условии, что температура граничных источников тепла является постоянной. Тогда возможен переход от дискретных источников тепла к линейным (непрерывным) в пределах каждой границы. В этом случае ММ (2) примет иной вид:

$$T_{x_i,y_j}=\frac{\int\limits_0^M \frac{T_1}{R_1^2}\cdot dx+\int\limits_0^M \frac{T_3}{R_3^2}\cdot dx+\int\limits_0^L \frac{T_2}{R_2^2}\cdot dy+\int\limits_0^L \frac{T_4}{R_4^2}\cdot dy}{\int\limits_0^L \frac{1}{R_1^2}\cdot dx+\int\limits_0^L \frac{1}{R_3^2}\cdot dx+\int\limits_0^L \frac{1}{R_2^2}\cdot dy+\int\limits_0^L \frac{1}{R_4^2}\cdot dy}=\frac{J_1}{J_2}, \qquad (3)$$

где: $T_{x,y}$- температура в точке с координатами x,y; T_1,T_2, T_3,T_4- постоянные значения теплових источников; $R_1=(x-x_i)^2+(0-y_j)^2$; $R_2=(M-x_i)^2+(y-y_j)^2$; $R_3=(x-x_i)^2+(L-y_j)^2$; $R_4=(0-x_i)^2+(y-y_j)^2$ – переменные величины.

Інтегралы виражения (3) типовые. Вычислим один из них с учетом соответствующих координат источников тепла: $T_1(x, 0)$; $T_2(M, y)$; $T_3(x, L)$; $T_4(0, y)$. Тогда для первого интеграла получим:

$$\int\limits_0^M \frac{T_1}{R_1^2}\cdot dx=$$

$$\int\limits_0^M \frac{T_1}{(x-x_i)^2+(y-y_j)^2}\cdot dx=\int\limits_0^M \frac{T_1}{(x-x_i)^2+(0-y_j)^2}\cdot dx=\int\limits_0^M \frac{T_1}{(x-x_i)^2+y_j^{\,2}}\cdot dx=$$

$$\frac{T_1}{y_j}\cdot arctg\frac{x-x_i}{y_j}\Bigg|_0^M=\frac{T_1}{y_j}\left(arctg\frac{M-x_i}{y_j}-arctg\frac{-x_i}{y_j}\right)=\frac{T_1}{y_j}\left(arctg\frac{M-x_i}{y_j}+arctg\frac{x_i}{y_j}\right).(4)$$

Тогда числитель выражения (3) примет вид:

$$J_1=\frac{T_1}{y_j}\left(arctg\frac{M-x_i}{y_j}+arctg\frac{x_i}{y_j}\right)+\frac{T_3}{L-y_j}\left(arctg\frac{M-x_i}{L-y_j}+arctg\frac{x_i}{L-y_j}\right)+$$
$$\frac{T_4}{x_i}\left(arctg\frac{L-y_j}{x_i}+arctg\frac{y_j}{x_i}\right)+\frac{T_2}{M-x_i}\left(arctg\frac{L-y_j}{M-x_i}+arctg\frac{y_j}{M-x_i}\right) \qquad .(5)$$

После введения обозначений:

a=$arctg\frac{M-x_i}{y_j}$; b=$arctg\frac{x_i}{y_j}$; c=$arctg\frac{M-x_i}{L-y_j}$; d=$arctg\frac{x_i}{L-y_j}$

и следующих преобразований:

$$arctg\frac{y_j}{M-x_i}=\frac{\pi}{2}-a;\ arctg\frac{y_j}{x_i}=\frac{\pi}{2}-b;\ arctg\frac{L-y_j}{M-x_i}=\frac{\pi}{2}-c;\ arctg\frac{L-y_j}{x_i}=\frac{\pi}{2}-d, \quad (6)$$

получим новый вид выражения (5)

$$J_1=\frac{T_1}{y_j}\cdot(a+b)+\frac{T_3}{L-y_j}\cdot(c+d)+\frac{T_4}{x_i}\cdot(\frac{\pi}{2}-d+\frac{\pi}{2}-b)+\frac{T_2}{M-x_i}\cdot(\frac{\pi}{2}-c+\frac{\pi}{2}-a)=$$
$$\frac{T_1}{y_j}\cdot(a+b)+\frac{T_3}{L-y_j}\cdot(c+d)+\frac{T_4}{x_i}\cdot(\pi-d-b)+\frac{T_2}{M-x_i}\cdot(\pi-c-a) \qquad .(7)$$

После проведения аналогичных расчетов интегралов, приведеннях в знаменателе (3), окончательно получим:

$$T_{x_i,y_j}=\frac{\frac{T_1}{y_j}\cdot(a+b)+\frac{T_3}{L-y_j}\cdot(c+d)+\frac{T_4}{x_i}\cdot(\pi-d-b)+\frac{T_2}{M-x_i}\cdot(\pi-c-a)}{\frac{1}{y_j}\cdot(a+b)+\frac{1}{L-y_j}\cdot(c+d)+\frac{1}{x_i}\cdot(\pi-d-b)+\frac{1}{M-x_i}\cdot(\pi-c-a)}. \qquad (8)$$

Выражение (8) представляет интегральную ММ распространения тепла в двумерном теле и позволяет вичислять статическую температуру в произвольной внутренней точке с координатами х,у при условии использования линейных температурных источников на всех границах двумерного тела.

В табл. показаны сравнительные точностные характеристики расчета температурного поля в двумерном теле, разбитого на 12 точек по каждой координате, выполненные в равноточных условиях. Расчеты проводились дискретними методами по выражениям (1) и (2), а также интегральным методом по выражению (8).

Распределение относительной погрешности по площади двумерного тела различное. Погрешность расчета температуры центральних точек менше чем погрешность расчета периферийных точек.

Анализ приведенных табличных даннях показывает, что дискретный и интегральный методы расчета температурного поля в двумерном теле могут бать использованы для качественной проверки правильности расчета температуры точными итерационными методами в процессе отладки програмного обеспечения.

Таблица 1

Метод расчета температуры	Точное значие температуры в узле (6,7)	Прибл. значение температуры в узле (6,7)	Относ. погрешнось в узле (6,7) %	Сред.относ. погрешнось по всем узлам %	Макс. отн. погрешн. по всем узлам %
Итерац.Зейделя	61,8112	-	-	-	
Линейный (1)	-	53	14,262	25,52	191,037
Дискретный (2)	-	62,27	0,738	3,165	18,68
Интегральный (8)	-	61,74	0,1158	2,309	12,491

Кроме того, для определенного класса задач, связанных с вычислением стационарных температурних полей в двумерном теле, предложенные ММ (2) и (8) могут бать использованы при разработке и отработке технологических процессов теплового воздействия на различные материалы, учитывая сравнительно высокую точность вычисления температуры внутренних точек тела. Относительная погрешность вычисления таких точек составляет 0,738% и 0,1158%, соответственно.

Выводы:

1. Дискретная ММ (2) позволяет приближенно вичислять стационарное температурное поле в двумерном теле при произвольных значениях теплових источников на границе двумерного тела. При этом

точность вичислений тем выше, чем больше дискретних источников расположено на внешней границе тела;

2. Интегральная ММ (8) позволяет решать ту же задачу, что и ММ (2), при условии представления источников тепла на границе двумерного тела линейными источниками;

3. Точность вычисления стационарного поля обеими ММ возрастает по мере удаления от источников теплового воздействия во внутреннюю область тела и достигает наименьшей погрешности для точек равноудаленных от теплових источников;

4. Целесообразно использовать ММ (2) или (8) для качественной проверки точности расчета температурного поля при отладке програмного обеспечения или для других теплотехнических задач, точность вычисления которых удовлетворяет данням приведенням в табл.

Использованные источники информации:

1. Ващенко В.А., Канашевич Г.В., Дробот И.В. Математическое моделирование и расчет теплового воздействия подвижного ленточного электронного луча на подложки оптических интегральных схем. ГАСНТИ 47.33.31. Черкассы, 1993.
2. Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л.. Феклисов Г.И. Численные методы. Москва.1976.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.