

УДК 621.396.4

Лисенко О.І., д.т.н.,  
НТУУ «КПІ»;  
Тачиніна О.М., к.т.н.,  
НАУ

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ ЛЕТАЮЩИХ РОБОТОВ НА БАЗЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

*Предложено методику преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему с изменяющимся в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления*

*Запропоновано методику перетворення складеної динамічної системи в розривну динамічну систему із змінним в моменти структурних перетворень розміром векторів стану та управління*

*The method of converting a compound dynamic system to a branching dynamical system with transient size of state and control vectors at a moment of structural changes is proposed.*

**Введение.** Важность и сложность применения робототехнических комплексов, в том числе беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), во многих областях науки, техники и промышленности вызвана в первую очередь тем, что они могут использоваться там, где жизнедеятельность человека либо затруднена, либо вообще невозможна, например, в зонах радиоактивного или химического загрязнения, в условиях боевых действий, при проведении подводных или космических исследований.

**Анализ исследований и публикаций.** Как показывает анализ публикаций [1], на сегодняшний день использование БПЛА является актуальным для следующего ряда задач:

1) обеспечения организации связи в районах с отсутствующей или разрушенной сетевой инфраструктурой. вследствие чрезвычайных ситуаций природного или технического характера;

2) обеспечения оперативной и устойчивой связи с наземными спасательными службами во время ликвидации последствий экологических катастроф;

3) обеспечение контроля мероприятий в процессе утилизации взрывчатых средств, химических веществ и др.

4) регулярного и качественного мониторинга:

- лесных ресурсов, в том числе обнаружения высохшего леса, тлеющих торфяников, обнаружения малых очагов пожаров с целью предотвращения возникновения лесных пожаров, девствующих лесных и торфяных пожаров, оценки ущерба лесных ресурсов после пожаров или

природных катаклизмов, обнаружения несанкционированных вырубок леса и др;

- нефте- и газотрубопроводов в режиме реального времени для получения данных об утечках, обнаружении актов несанкционированной деятельности, получения аэрофотоснимков, которые позволяют анализировать и оценивать техническое состояние трубопроводов и околотрубного пространства, обнаруживать несанкционированные врезки др.;

- водных ресурсов, для осуществления оперативного осмотра локального водного участка, обнаружения паводков, затоплений, наблюдения за водоемами и за прилегающей береговой территорией.

Проблемам создания БПЛА различного назначения посвящено достаточно большое число исследований, проводимых как в нашей стране, так и за рубежом, начиная с середины 60-х годов прошлого века [2].

В то же время, как показывает опыт применения в обозначенных направлениях, одиночный БПЛА, каким бы интеллектуальным он ни был, может использоваться только для решения некоторых частных задач, либо выполнения довольно простых операций, поскольку он, как правило, обладает сравнительно малыми возможностями для выполнения поставленной задачи (небольшой радиус действия, ограниченный бортовым энергоресурсом; небольшое число выполняемых функций, невысокая вероятность выполнения поставленной задачи при функционировании в экстремальных ситуациях, поскольку выход из строя одиночного БПЛА ведет к невыполнимости его миссии и т.п.).

Очевидным решением указанных выше проблем является применение при решении сложных задач сразу нескольких БПЛА, то есть группы БПЛА. Преимущества группового применения БПЛА очевидны. Это и больший радиус действия, достигаемый за счет рассредоточения БПЛА по всей рабочей зоне; и расширенный набор выполняемых функций, достигаемый за счет установки на каждый БПЛА индивидуального оборудования для обеспечения организации связи; мониторинга территорий, контроля технического состояния наблюдаемых объектов и, наконец, более высокая вероятность выполнения задания, достигаемая за счет возможности перераспределения целей между БПЛА группы в случае выхода из строя некоторых из них. При этом возникают новые проблемы группового управления и коммуникации, связанные с организацией группового взаимодействия БПЛА.

Таким образом, научная проблема, связанная с синтезом оптимального управления движением группы летающих дронов на базе БПЛА, является актуальной.

**Постановка задачи.** БПЛА применяют в составе группы для выполнения специальных комплексных заданий. При этом, они должны определенным образом взаимодействовать друг с другом с тем, чтобы как

можно более эффективно решить поставленную задачу в условиях, когда ситуация может изменяться непредсказуемым образом. Чтобы достичь поставленной цели, группа БПЛА должна действовать как нечто единое целое, и действия каждого отдельного БПЛА должны быть направлены на получение наибольшего группового эффекта. С этой целью предлагается группу БПЛА, выполняющую единую цель рассматривать как составную динамическую систему.

Под составной динамической системой понимается совокупность объектов (подсистем) объединенных в систему физическим смыслом. В качестве таких объектов могут быть использованы БПЛА, роботы и др.

Траектории таких составных динамических систем называются ветвящимися, так как состоят из участков совместного движения составных частей и участков совместного движения составных частей и участков их индивидуального движения к цели, то есть движения по отдельным ветвям траектории.

Эффективность использования этого класса систем зависит от наилучшего, оптимального выбора координат и момента времени разделения составной динамической системы (СДС), а также от оптимального способа движения СДС к точке разделения и оптимального перемещения подсистем к целям по ветвям траектории после разделения.

**Оптимизация траектории составной динамической системы** Подсистемы СДС в процессе своего движения могут многократно группироваться и разделяться (рис. 1).

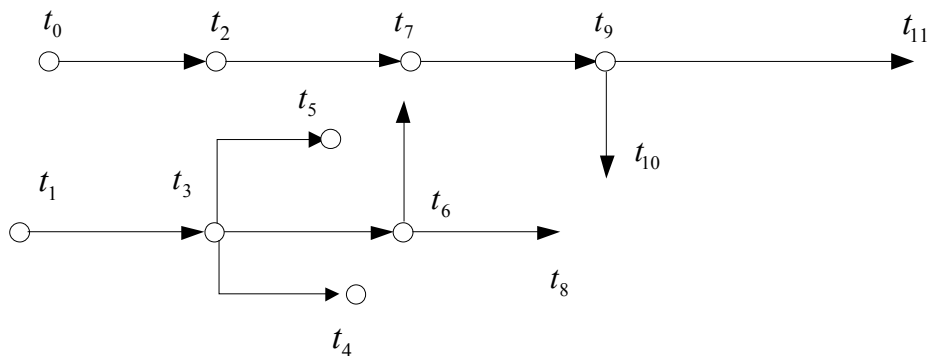


Рис. 1.1. Пример схемы ветвящейся траектории:  
 $t_i$ -моменты времени структурных преобразований СДС;  
 стрелки условно показывают направление движение подсистем СДС

Движение подсистем по ветви траектории СДС описывается дифференциальной системой вида

$$\dot{x} = f(x, u; y, v; t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (1.1)$$

где  $x \in E^n$ ,  $u \in \cap \subset E^m$ ;  $y$  - фазовые координаты,  $v$ - управления других подсистем из состава СДС, влияющих на движение рассматриваемой

подсистемы;  $t_0, t_f$  - моменты времени начала и конца движения подсистемы по рассматриваемой ветвитраектории.

На траекторию подсистемы (1.1) накладываются скалярные ограничения вида

$$\begin{aligned} g_i(x(t_0), y(t_0), t_0; x(t_f), y(t_f), t_f) &= 0, \quad \overline{i = 1, k_g} \\ &\leq 0, \quad \overline{i = k_g + 1, n_g} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} q_i(x(t), u(t), t_0; y(t), v(t); t) &= 0, \quad \overline{i = 1, k_q} \\ &\leq 0, \quad \overline{i = k_q + 1, n_q} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $t \in [t_0, t_f]$ ,

Критерий, оценивающий эффективность функционирования СДС, описывается выражением

$$P = \Pi(\cdot) + \rho_{\Sigma} \rightarrow \min, \quad (1.4)$$

где  $\Pi(\cdot)$  - терминальная составляющая критерия, зависящая от фазовых координат подсистем в моменты времени структурных преобразований СДС и самих моментов времени;  $\rho_{\Sigma}$  - интегральная составляющая критерия, состоящая из суммы частных интегральных составляющих типа

$$\rho = \int_{t_0}^{t_f} h(x(t), u(t); y(t), v(t); t) dt, \quad (1.5)$$

соответствующих отдельным ветвям траектории СДС.

Таким образом, задача (1.1)-(1.5) оптимизации траектории СДС состоит в поиске оптимальных управлений и траекторий движения подсистем по участкам ветвящейся траектории, минимизирующих критерий (1.4), а также в отыскании оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которых происходят структурные преобразования СДС.

Решение указанной задачи предполагается выполнить в три этапа: вначале осуществить переход от состояний динамической системы к разрывной динамической системе с переменным размером векторов состояния управления; затем оптимизировать разрывную систему и, наконец, вернуться к исходной задаче, выразив результат оптимизации разрывной системы через обозначения, принятые в первоначальной формулировке задачи.

### Методика преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему

Методика преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему с изменяющимся в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления состоит в следующем [3]:

- исходя из физических соображений функционирования СДС, вычерчивается схема ветвящейся траектории, составляются уравнения движения подсистем вдоль ветвей траектории, записываются ограничения, действующие непрерывно на подсистемы и в граничных точках, формулируется критерий;

- устанавливается хронологическая последовательность моментов времени структурных преобразований СДС.

- в интервалах времени между структурными преобразованиями СДС вводятся расширенные векторы состояния  $X_i$  и управления и управления  $U_i (i=\overline{1, N})$ , где  $N+1$ -количество структурных преобразований СДС с учетом структурного преобразования, связанного с началом движения СДС ( $i=0$ ), состоящие соответственно из векторов состояния и управления динамических подсистем (блоков), перемещающихся по вервям траектории в данном интервале времени.

В результате применения указанной методики приходим к следующей постановке задачи оптимизации разрывной системы с переменным размером векторов состояния и управления [4-6].

$$I = S(X_{1c}(t_0^+), t_0; X_{1c}(t_1^-), X_{2c}(t_1^+), t_1; X_{2c}(t_2^-), X_{3c}(t_2^+), t_2; \dots$$

$$\dots; X_{ic}(t_i^-), X_{i+1c}(t_i^+), t_i; \dots; \dots; X_{Nc}(t_N^-), t_N) + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}^+}^{t_i} \Phi(X, U, t) dt \rightarrow \min, \quad (1.6)$$

$$G_i(X_{1c}(t_0^+), t_0; X_{1c}(t_1^-), X_{2c}(t_1^+), t_1; \dots; X_{Nc}(t_N^-), t_N) \begin{cases} = 0, & \overline{i=1, K_G}; \\ \leq 0, & \overline{i=K_G+1, N_G} \end{cases}; \quad (1.7)$$

$$Q_{ij}(X_{ic}(t), U_i(t), t) \begin{cases} = 0, & \overline{j=1, K_{Q_i}}; \\ \leq 0, & \overline{j=K_{Q_i}+1, N_{Q_i}} \end{cases}; \quad (1.8)$$

$$\dot{X}_i = F_i(X_i, U_i, t), t \in [t_{i-1}^+, t_i^-], i = \overline{1, N}; \quad (1.9)$$

$$X_i \in E^{\sum_i}, U \in \Omega_i, E^{\sum_i} U_i(\cdot) - \text{кусочно-непрерывно.} \quad (1.10)$$

Здесь  $X_i, U_i$ -расширенные векторы фазового состояния и управляющих воздействий, соответствующие  $i$ -му интервалу времени между структурными преобразованиями СДС, размерности  $n_{\Sigma}$  и  $m_{\Sigma}$ ;

$\cap_i$  - ограниченное множество пространства  $E^{m_{\Sigma_i}}$ ;  $S(\cdot)$ ,  
 $G_j(\cdot)$  ( $j = \overline{1, N_G}$ ;) - гладкие на  $E^{2\sigma} \subset E^{N+1}$  ( $\sigma = \sum_{i=1}^N n_{\Sigma_i}$ ) скалярные  
 функции переменных  $X_1, \dots, X_N, t_0, \dots, t_N$ ;  $Q_j(\cdot)$  ( $j = \overline{1, N_G}$ ;) - непрерывные на  
 $E^{n_{\Sigma_i}} \subset E^{m_{\Sigma_i}} \subset E^l$  вместе с первыми производными по всем своим  
 аргументам скалярные функции, для которых соотношения (1.8)  
 удовлетворяют условию общности положения [6], т.е. векторы  
 $grad_{U_i} Q_j(X_i(t), U_i(t), t)$  ( $j = \overline{1, N_{G,i}}$ ) и  $grad_{U_\gamma} Q_\gamma(X_\gamma(t), U_\gamma(t), t)$   
 ( $\gamma \in I_\gamma$ ;  $I_\gamma$  - множество все индексов из  $j = \overline{K_{G,i} + 1, N_{Q,i}}$ , для которых  
 $Q_j(\cdot) = 0$ ) линейно независимы;  $F_i(\cdot)$  - непрерывное вместе с матрицей  
 производных  ${}_i F_{x_i}$  отображение:  $E^{n_{\Sigma_i}} \subset \Omega \subset E^l \rightarrow E^{n_{\Sigma_i}}$ ;  $K_G, N_G, K_Q, N_Q, N$ -  
 заданные целые числа,  $0 \leq K_G \leq N_G, K_G < \sum_{i=1}^N (2n_{\Sigma_i} + 1) + 1$ ;  $0 \leq K_{Q,i} \leq N_{Q,i}$ ;  
 $K_{Q,i} + K_\gamma \leq m_{\Sigma_i}$ ,

где  $K_\gamma$  - количество индексов  $\gamma$ .

Следует отметить, что только приведение задачи оптимизации ветвящейся траектории СДС к оптимизации траектории разрывной системы с переменным размером вектора состояния и управления (1.6)-(1.10) позволяет сформулировать теоремы, на основании которых можно выполнять оптимизацию траектории СДС с произвольной схемой ветвлений. В противном случае каждая новая схема ветвлений траектории СДС требует выполнения всей процедуры доказательств, учитывающих особенности траектории.

Как было сказано выше, третий этап решения задачи оптимизации ветвящейся траектории СДС состоит в возвращении к терминам исходной формулировки задачи. Приведение условий оптимальности управления и траектории разрывной динамической системы к условиям оптимальности СДС, формальным эквивалентом которой является разрывная система, осуществляется декомпозицией расширенных векторов состояния и управления, ограничений и граничных условий, вспомогательных функций и переменных, использовавшихся в ходе применения метода оптимизации, в последовательности обратной исходным преобразованиям, приведшим к переходу от СДС к разрывной динамической системе, по правилу перехода к исходным терминам. Для наиболее типичных случаев такой переход будет рассматриваться в последующих публикациях в форме следствий из основной теоремы, в которой сформулирован результат решения задачи (1.6) – (1.10).

**Выводы.** В работе решена задача оптимизации траектории составной динамической системы, состоящая в поиске оптимальных управлений и траекторий движения подсистем по участкам ветвящейся траектории, минимизирующих заданный критерий, а также в отыскании оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которых происходят структурные преобразования СДС.

Также предложена методика преобразования составной динамической системы в разрывную динамическую систему с изменяющимся в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления с учетом заданных критериев.

*Использованные источники информации:*

1. Лысенко А.И. Метод синтеза оптимального по энергозатратам закона управления мобильной телекоммуникационной аэроплатформой / А.И. Лысенко, П.И. Кирчу // Науковий вісник академії муніципального управління, серія «Техніка». – 2010. – № 1. – С. 90–97.
2. Oleksandr I. Lysenko, Inga V. Uryadnikova, Stanislav V. Valuisnyi, Sergej Chumachenko. Increasing of manet throughput using quasi-optimal UAVs placement control.- Akademia ozbrojenyah sil. Gen. M.R. Stefanika. Slovakia Science&Military . №1, Volume 8, 2013, p. 52-61.
3. Лысенко А.И. Моделирование оптимального движения составной динамической системы. Наукова думка, журнал “Електронне моделювання”, т.11, № 4, 1989. – С. 71–76.
4. Лысенко А.И. Необходимые условия оптимальности траектории составной динамической системы ВВИА им. проф. Жуковского, сб. ”Авиационные приборы, навигационные системы обеспечения жизнедеятельности экипажей ЛА”, 1988. – С. 11–18.
5. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами.- Новосибирск: Наука, 1987. –226 с.
6. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. –М.: Наука, 1981. – 336 с.