УДК 502.2; 504.06

Чумаченко С.М., д.т.н.,
УкрНДІ ЦЗ;
Туровець Ю.С.,
ЦНДІ ЗС України

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ПРИРОДНОГО СЕРЕДОВИЩА НА ОСНОВІ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЙНОГО ТИПУ

Розглядається метод прогнозування деградації природного середовища під впливом дії негативних факторів у разі надзвичайної події на техногенно-небезпечному об'єкті за допомогою математичного моделювання з використанням дифузійного немонотонного розподілу за визначальним параметром.

Рассматривается метод прогнозирования деградации природной среды под воздействием негативных факторов в случае чрезвычайной ситуации на техногенно-опасном объекте с помощью математического моделирования с использованием диффузионного немонотонного распределения за определяющим параметром.

It is proposed the method of forecasting of the degradation of natural environment under act of negative factors, which arise up in case of emergency at a technogenic dangerous object, to use mathematical model with the diffusive untmonotonous distribution by the qualificatory parameter.

Вступ. Територія України перенасичена техногенно-небезпечними об'єктами (ТНО). На сьогодні ситуація у країні така, що ці об'єкти можуть бути уражені випадково, коли спрацьовує "людський чинник", або навмисне. В обох випадках виникає уражальна дія, яка створює небезпеку як для населення, так і для навколишнього середовища. Актуальним є питання прогнозування впливу цієї дії на природне середовище. Однак, у цій предметній галузі існує не багато методів, які б дозволяли проводити комплексне аналітичне прогнозування наслідків руйнівного впливу на довкілля.

Для відповіді на ці питання, в першу чергу, потрібно розробити методи, математичні моделі та методики для кількісного оцінювання впливу факторів ураження на природне середовище.

Аналіз останніх досліджень і публікацій[1–5] засвідчив, що для прогнозування наслідків руйнівного впливу застосоване таке поняття, як ризик настання негативної події. Для більшості розрахунків ризику різного походження використовується щільність розподілу ймовірності настання негативної події, знаходження якої дуже часто буває проблематичним завданням.

Постановка завдання. Використовуючи дифузійний немонотонний розподіл за визначальним параметром розробити метод та математичну модель деградації природного середовища під впливом дії негативних факторів, пов'язаних із ураженням техногенно-небезпечного об'єкта.

Основна частина.Будь-яка незапланована подія, а саме аварійна ситуація, її масштаб та вплив викидів на довкілля, має ймовірнісний характер. Тож у нашому дослідженні ми маємо справу з характеристиками, які випадковим чином змінюються в часі. Якщо ймовірність $P(t_0,x_0;\ t,R)$ того, що система в момент t_0 перебуває у стані x_0, а в момент $t>t_0$ буде в одному із станів множини R, і якщо додаткові знання про стани системи в моменти $\tau<t_0$ не змінюють цієї ймовірності за будь-яких $t_0,\ x_0;\ t,\ R$, тоді можемо сказати, що ми маємо процес без наслідків, або інакше – марковський процес [6]. За умови відповідного розуміння стану системи будь-який випадковий процес можна розглядати як марковський. Тому узагальнений процес деградації природного середовища, яке перебуває під впливом негативних факторів через аварію ТНО (що само по собі є випадковою подією), будемо розглядати як марковський процес дифузійного типу, який описується стохастичним диференціальним рівнянням Іто-Стратановича першого порядку такого вигляду:

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)d\,\eta(t)\,, \tag{1}$$

де $x(t)$ – визначальний параметр; $A(t),\ B(t)$ – детерміновані функції, які характеризують зміну середнього значення та дисперсії визначального параметра (коефіцієнти знесення і дифузії); $\eta(t)$ – випадковий процес із незалежними приростами гаусівського типу.

Метод, що пропонується у статті, має такі етапи:

- визначення розподілу часу до першого прояву деградації;
- масштабування розподілу;
- визначення ризику ураження природного середовища.

Задача визначення розподілу часу до першого прояву деградації у цьому випадку зводиться до розв'язання задачі першого досягнення процесом (1) верхньої межі області (за нормованого процесу верхня межа дорівнює одиниці). Така задача вирішується повністю [7], якщо відома умовна щільність імовірності переходу процесу з одного стану в інший. Для марковського процесу дифузійного типу умовна перехідна щільність $\omega(t,x)$, яка відповідає процесу (1), описується рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова. Це диференціальне рівняння в часткових похідних такого виду:

$$\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial t} + A(t)\frac{\partial \omega(t,x)}{\partial x} - \frac{[B(t)]^2}{2}\frac{\partial^2 \omega(t,x)}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (2)$$

Оскільки ми розглядаємо випадок, коли уражається природне середовище через аварію ТНО, то реалізація процесу має немонотонний характер (рис. 1).

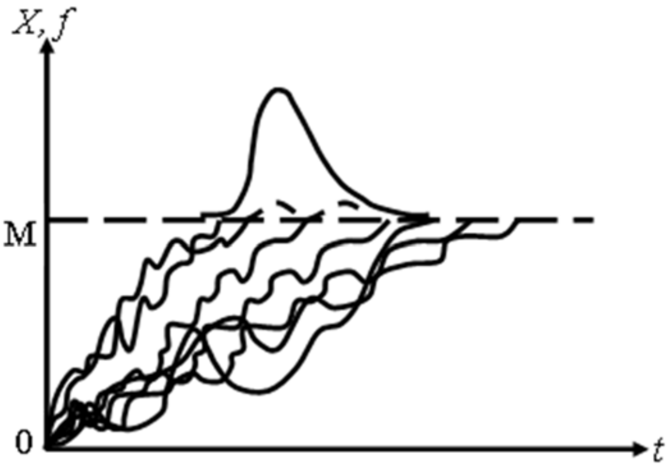

Рис. 1. Модель випадкового процесу деградації (марковський немонотонний процес) і схема формування розподілу процесу деградації

Для розв’язання рівняння (2) задамо граничні умови.

Для визначення виразу досягнення граничного рівня, що описується процесом (1), необхідно конкретизувати функції $A(t)$ і $B(t)$. Будемо вважати, що ми розглядаємо процес деградації однорідного середовища, тобто з постійною середньою швидкістю і постійним середнім квадратичним відхиленням швидкості (або постійним коефіцієнтом варіації швидкості). У такому випадку кінетичне рівняння процесу (1) запишемо так:

$$dx(t) = ax(t)dt + bd\eta(t)\,, \qquad (3)$$

де a – коефіцієнт знесення (середня швидкість зміни визначального параметра); b – коефіцієнт дифузії (b^2 – середня швидкість зміни дисперсії визначального параметра).

Для марковського процесу дифузійного типу, визначеного рівнянням (3), дифузія умовної перехідної щільності $\omega(t_0,x_0; t,x)$ цього процесу описується рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова такого вигляду:

$$\frac{\partial \omega(t_0,x_0;t,x)}{\partial t} + a\frac{\partial \omega(t_0,x_0;t,x)}{\partial x} - \frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 \omega(t_0,x_0;t,x)}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (4)$$

Як відомо [7], щільність розподілу часу досягнення межі розглядуваним процесом (щільність розподілу часу деградації) має такий зв'язок з умовною щільністю переходу процесу з одного стану в інший:

$$f(t) = -\int_{-\infty}^{l} \frac{\partial \omega(t_0, x_0; t, x)}{\partial t} dx \tag{5}$$

Щоб визначити щільності ймовірності розподілу часу деградації $f(t)$, необхідно отримати вираз для $\omega(t_0, x_0; t, x)$, розв'язавши рівняння (4), після чого знайти часткову похідну за часом від функції $\omega(t_0, x_0; t, x)$, а отриманий вираз проінтегрувати за параметром x. Отже, рівняння (4) є параболічним диференціальним рівнянням у часткових похідних. Для розв'язання такого типу рівнянь необхідно задати крайові умови.

Виходячи із шуканої функції $\omega(t_0, x_0; t, x)$, у загальному випадку початкові умови задамо у такому вигляді:

$$\omega(t_0, x_0; t, x)\Big|_{t=t_0} = \omega_0(x_0), \tag{6}$$

де $\omega(x_0)$ – деякий розподіл досліджуваного параметра в початковий момент.

Якщо початкове значення параметра задане (наприклад, можемо вважати, що x_0=0, t_0=0), тоді $\omega(x_0)$ вироджується у δ-функцію:

$$\omega(t, x)\Big|_{t=0} = \delta(x) \tag{7}$$

У випадку немонотонного розподілу після першого досягнення межі заданої області немонотонна реалізація може знову повернутися до заданої області і брати участь у розглядуваному процесі (деякі такі реалізації показані пунктиром на рис. 1). Така ситуація типова для об'єктів живої природи, коли після негативного впливу на неї через деякий період часу природа відновлюється. У нашому дослідженні ми задамо такий проміжок часу, за який відновлення точно ще не відбудеться.

Отже, щоб після першого досягнення межі немонотонна реалізація більше не брала участі у досліджуваному процесі і не впливала на $\omega(t,x)$ необхідно на межі заданої області накласти граничні умови типу "екран поглинання". Для розв'язання рівняння (4) вони будуть такі:

$$\omega(t, x)\Big|_{x=-\infty} = 0\ ; \tag{8}$$

$$\omega(t, x)\Big|_{x=1} = 0\ . \tag{9}$$

Умова (8) формальна і необхідна для розв'язання (4). Умова (9) випливає із вище викладеного і відповідає "екрану поглинання" у точці x=1.

Рішення рівняння (4) для крайових умов (7)–(9) записується у такому вигляді:

$$\omega(t,x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-at)^2}{2b^2 t} \right] - \exp\left[-\frac{(x-at-2)^2 - 4at}{2b^2 t} \right] \right\}. \tag{10}$$

Вираховуємо похідну $\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t}$, підставляємо отриманий вираз у (5), інтегруємо і отримуємо вираз для щільності розподілу часу досягнення граничної межі:

$$f(t) = \frac{1}{bt\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2b^2 t} \right].$$

Оскільки ми розглядаємо однорідний процес деградації дифузійного типу, то коефіцієнт дифузії має простий зв'язок із зазвичай використовуваними характеристиками процесу – середнім квадратичним відхиленням швидкості процесу (σ_a) і коефіцієнтом варіації процесу (ν) [8]:

$$b = \frac{\sigma_a}{\sqrt{a}} = \nu\sqrt{a}\ .$$

Враховуючи це, можемо записати щільність розподілу часу досягнення граничного рівня у такому вигляді:

$$f(t) = \frac{1}{\nu \cdot t\sqrt{2\pi a t}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2\nu^2 a t} \right]. \qquad (11)$$

Щільності (11) відповідає функція розподілу

$$F(t) = \Phi\left(\frac{at-1}{\nu\sqrt{at}} \right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2} \right) \cdot \Phi\left(-\frac{at+1}{\nu\sqrt{at}} \right). \qquad (12)$$

Для зручності введемо параметр масштабу дифузійного розподілу $\mu = M[\mathrm{T}] = \int_0^\infty tf(t)dt = \frac{1}{a}$. Тоді маємо такі щільність та функцію немонотонного розподілу відповідно:

$$f(t) = f_N(t; \mu,\nu) = \frac{\sqrt{\mu}}{\nu \cdot t\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\nu^2 \mu \cdot t} \right],$$

$$F(t) = F_N(t; \mu,\nu) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\nu\sqrt{\mu \cdot t}} \right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2} \right) \cdot \Phi\left(-\frac{t+\mu}{\nu\sqrt{\mu \cdot t}} \right).$$

Імовірність того, що деградація природного середовища почнеться на інтервалі часу $(t_1;t_2)$ розраховується за співвідношенням:

$$P(t_1 \le T \le t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt\ .$$

Як вже зазначалося вище, щільність розподілу є повною характеристикою випадкової величини, то, використовуючи$f(t)$, можемо підрахувати середнє значення ризику на інтервалі $(t_1;t_2)$:

$$\rho = \int_{t_1}^{t_2} L(t) \cdot f(t)dt\ ,$$

де $L(t)$ – відома залежність збитку за час t.

Висновки. Таким чином, ми визначили щільність розподілу ймовірності настання негативної події та ризик ураження складових природного середовища, який, у свою чергу, відображає оцінку збитку завданого природному середовищу. Розроблений метод дає змогу спрогнозувати наслідки для природного середовища від можливої негативної події (аварії ТНО).

Використані джерела інформації:

1. Орел, Д. С. Імовірнісна оцінка ризику забруднення атмосфери на прикладі теплової електростанції [Текст] / Д. С. Орел // Экология и промышленность. – Х., 2010. – Вып. 3. – С. 16–21.
2. Андреева, Т. В. Снижение уровня экологического риска как фактор обеспечения экологической безопасности [Текст] / Т. В. Андреева. – М.: Изд-во РГГУ, 1999. – 372 с.
3. Лисиченко, Г. В. Природний, техногенний та екологічний ризики: аналіз, оцінка, управління [Текст] / Г. В. Лисиченко, Ю. Л. Забулонов, Г. А. Хміль. – К.: Наукова думка, 2008. – 542 с.
4. Лисиченко, Г. В.Методологія оцінювання екологічних ризиків [Текст] : монографія / Г. В. Лисиченко, Г. А. Хміль, С. В. Барабашев. – Одеса: Астропринт. – 2011. – 368 с.
5. Биченок, М. М. Ризики життєдіяльності у природно-техногенному середовищі [Текст] / М. М. Биченок, С. П. Іванюта, Є. О. Яковлєв. – К.: Ін-т пробл. нац. безп. Ради нац. безп. і оборони України, 2008. – 160 с.
6. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. – 564 с.
7. Свешников, А. А. Прикладные методы теории случайных процесов [Текст] / А. А. Свешников – М.: Наука, 1965. – 254 с.
8. Азарсков, В. Н. Надежность систем управления и автоматики [Текст] : учебное пособие / В. Н. Азарсков, П. П. Стрельников. – К.: НАУ, 2004. – 164 с.