УДК.519.21

Дубко В.А., д.ф.-м.н., проф., АМУ

ЭЛЕМЕНТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

Встановлюється клас стохастичних рівнянь Іто з вінерівськими і пуссонівськими збуреннями, розв'язок яких узгоджується з умовою інваріантності інтеграла Пуанкаре.

Определяется класс стохастических уравнений Ито с винеровскими и пуассоновскими возмущениями, решения которых согласуются с условием инвариантности интеграла Пуанкаре.

Defines a class of Ito stochastic equations with Wiener and Poisson perturbations, whose decisions are consistent with the condition of invariance of the integral Poincare.

Введение. Включение в уравнения динамики случайных составляющих существенно изменяет характер поведения систем и методы исследования их эволюции, даже при малых возмущениях. Но независимо от того, детерминированным или стохастическим уравнениям подчиняются переменные состояния системы, условия единственности решения приводят к существованию конструкций, сохраняющихся с вероятностью единица на любых реализациях случайных возмущений: первых интегралов (стохастических первых интегралов), ядер интегральных инвариантов (стохастических ядер) [4], [5], [7], [8].

В аналитической механике дополнительные требования существования интегрального инварианта Пуанкаре или Пуанкаре-Картана для детерминированных процессов, выделяют класс дифференциальных уравнений, соответствующий классической гамильтоновой механике [1].

Задачи, связанные с существованием интегрального инварианта Пуанкаре для стохастических систем рассматриваются и в теории случайных процессов, но при условии только винеровских возмущений [3], [4], [6], [8], [9]. При переходе к стохастическим процессам, отличием от классического рассмотрения является предположение о типе стохастических уравнений, которым подчиняются переменные состояния системы. В данной работе исследуется вопрос о строении класса уравнений Ито с пуассоновскими и винеровскими возмущениями, согласующихся с требованием существования интегрального инварианта Пуанкаре.

Для упрощения в записи математических выражений, в работе полагается, как принято, что по индексам встречающимся дважды выполняется суммирование.

Построение уравнений Гамильтона. Пусть $x(t)$ решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для процесса $x(t)$ в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned} &dx_i(t) = Q_i(t;x(t))dt, \quad dx_{i+n}(t) = G_i(t;x(t))dt, \\ &x_i(t) = x_i(t;x(0))|_{t=0} = x_i(0), \\ &x_{i+n}(t) = x_{i+n}(t;x(0))|_{t=0} = x_{i+n}(0), \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{1}$$

В аналитической механике доказывается, что если сохраняются во времени значения интеграла Пуанкаре ([1], с.137)

$$I(t) = \oint_{Z(t)} x_i(t)\delta x_{i+n}(t), \tag{2}$$

взятого вдоль любого замкнутого контура $Z(t) = Z(t,x(\gamma))$ одновременных состояний, $\{x(0)\} \in x(\gamma)$, $x(t) = x(t;x(\gamma))|_{t=0} = x(\gamma)$, $x(\gamma) = x(\gamma+1)$, $\gamma \in [0,1)$, то система является гамильтоновой.

Это означает, что существует такая функция $H(t;x)$, что

$$\begin{aligned} dx_i(t) = Q_i(t;x(t))dt = \frac{\partial}{\partial x_{i+n}} H(t;x(t))dt, \\ dx_{i+n}(t) = G_i(t;x(t))dt = -\frac{\partial}{\partial x_i} H(t;x(t))dt. \end{aligned} \tag{3}$$

С учетом определения вариационной производной, (2) эквивалентно такому представлению:

$$I(t) = \int_0^1 x_{i+n}(t;x_l(\gamma))J_{i,l}(t;x_l(\gamma))\delta x_l(\gamma), \quad l = \overline{1,2n} \quad . \tag{4}$$

$\delta x_l(\gamma) - l$-ая проекция элемента дуги замкнутого контура $Z(0)$; полагаем, что функции $x_l(\gamma)$ дифференцируемы;

$$J_{l,j}(t) = J_{i,l}(t;x_l(0)) = \lim_{|\Delta|=\Delta_j \to 0} \frac{x_l(t;x(0)+\Delta) - x_l(t;x(0))}{\Delta_j}, \quad j,l = \overline{1,2n}.$$

В дальнейшем, будем опираться на вариант представления (2) в форме (4) и для стохастических процессов $x(t;x(\gamma)))$. Для стохастических процессов $I(t)$ трактуется как среднеквадратичный предел сумм по γ.

Поскольку интегрирование в (4) ведется по замкнутой кривой, то из условия $x(\gamma+1) = x(\gamma)$ следует, что для любых дифференцируемых по x_l функций $f(t;x)$ и $q(t;x)$:

$$\int_0^1 \delta_\gamma [f(t;x(t;x(\gamma)))q(t;x(t;x(\gamma)))] =$$
$$= \int_0^1 f(t;x(t;x(\gamma)))\delta_\gamma q(t;x(t;x(\gamma))) + \int_0^1 q(t;x(t;x(\gamma)))\delta_\gamma f(t;x(t;x(\gamma))) = \quad (5)$$
$$= f(t;x(t;x(1))q(x(t;x(1));t) - f(t;x(t;x(0))q(x(t;x(0));t) = 0, \quad \forall t \ge 0.$$

Из (5), в частности, следует возможность и такого представления:

$$\int_0^1 f(t;x(t;x(\gamma)))\delta_\gamma q(t;x(t;x(\gamma))) = -\beta \int_0^1 q(t;x(t;x(\gamma)))\delta_\gamma f(t;x(t;x(\gamma))) +$$
$$+ (1-\beta)\int_0^1 f(t;x(t;x(\gamma)))\delta_\gamma q(t;x(t;x(\gamma))). \quad (6)$$

где β – произвольная функция.

Случай стохастических дифференциальных уравнений. Сразу отметим, что и в стохастическом случае справедливы равенства (5), (6). Перейдем к рассмотрению случая когда $x_i(t), x_{i+1}(t)$ - решения системы стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими и пуассоновскими возмущениями - обобщенных уравнений Ито [2]:

$$dx_i(t) = a_i(t;x(t))dt + b_{i,k}(t;x(t))dw_k(t) + \int_{R(\lambda)} g_i(t;x(t);\lambda)\nu(dt;d\lambda),$$
$$dx_{i+n} = a_{i+n}(t;x(t))dt + b_{i+n,k}(t;x(t))dw_k(t) + \int_{R(\lambda)} g_{i+n}(t;x(t);\lambda)\nu(dt;d\lambda), \quad (7)$$
$$x_i(t) = x_i(t;x(0))\big|_{t=0} = x_i(0),\ x_{i+n}(t) = x_{i+n}(t;x(0))\big|_{t=0} = x_{i+n}(0),\ i = \overline{1,n}.$$

В (7) $w_k(t), k = \overline{1,m}$ - независимые винеровские процессы, а $\nu(dt;d\lambda)$ - стохастическая пуассоновская мера [2]:

$$\mathrm{E}[\nu(dt;d\lambda)] = \prod(d\lambda)dt.$$

Относительно коэффициентов $a(t;x)$, $b(t;x)$, $g(t;x;\gamma) \in \mathrm{R}^{2n}$, будем предполагать, что они, в общем, случайные функции, ограниченные и непрерывные вместе со своими производными:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial a_l(t;x)}{\partial x_j},\quad \frac{\partial b_{l,k}(t;x)}{\partial x_j},\quad \nabla^\alpha g_l(t;x;\lambda),\ j,l = \overline{1,2n}, \\ &\int_0^T dt \int_{R(\lambda)} |\nabla^\alpha g_l(t;x;\lambda)|^\theta \prod(d\lambda) < \infty,\ \int_{R(\lambda)} \prod(d\lambda) < \infty,\ \alpha = \overline{1,4},\ \theta = 1,2, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где ∇^α- обозначение всевозможных частных производных по компонентам x порядка от 1 до 4-х; $\square(\lambda)$ - пространство параметров пуассоновских мер.

Этих условий достаточно для существования и единственности решений (7), возможности дифференцирования их по начальным значениям [2] и, как следствие, построения случайных величин:

$$J_{l,j}(t) = \underset{|\Delta|=\Delta_j \to 0}{l.i.m.} \frac{x_l(t;x(0)+\Delta) - x_l(t;x(0))}{\Delta_j}.$$

$J_{l,j}(t)$ - решение составной системы стохастических уравнений (7) и уравнений

$$dJ_{l,j}(t) = J_{\eta,j}(t)\{\frac{\partial a_l(t;x(t))}{\partial x_\eta}dt + \frac{\partial b_{l,k}(t;x(t))}{\partial x_\eta}dw_k(t) + \\ + \int\limits_{R(\lambda)} \frac{\partial g_l(t;x(t);\lambda)}{\partial x_\eta}\nu(dt;d\lambda)\}, \tag{9}$$

$$J_{l,j}(t) = J_{l,j}(t;x(0))\,|_{t=0} = \begin{cases} 0, & l \neq j \\ 1, & l = j \end{cases}, \quad \eta = \overline{1,2n}\ .$$

При ограничениях (8), решение (9) существует и единственно [2].

С учетом требования неизменности во времени $I(t)$, опираясь на уравнения (8), (9), (4) и обобщенную формулу Ито, приходим к равенству:

$$dI(t) = \int\limits_0^1 \delta_\gamma x_l(\gamma)\, d\{x_{i+1}(t;x(\gamma))J_{i,l}(t;x(\gamma))\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \delta_\gamma x_l(\gamma)\{x_{i+n}(t)J_{j,l}(t)[\frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_j}dt + \frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_j}dw_k(t)] +$$

$$+J_{i,l}(t)[a_{i+n}(t;x(t))dt + b_{i+n,k}(t;x(t))dw_k(t)] + J_{j,l}(t)b_{i+n,k}\frac{\partial}{\partial x_j}b_{i,k}(t)dt + \tag{10}$$

$$+ \int\limits_{R(\lambda)} [x_{i+n}(t) + g_{i+n}(t;x(t);\lambda)][J_{i,l}(t) + J_{j,l}(t)\frac{\partial}{\partial x_j}g_i(t;x(t);\gamma)]\nu(dt;d\lambda) -$$

$$- \int\limits_{R(\lambda)} x_{i+n}(t)J_{i,l}(t)\nu(dt;d\lambda)\} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Стохастические уравнения Гамильтона при винеровских возмущениях. Рассмотрим в (10) часть дифференциала, относящуюся к dt и винеровскими возмущениям [3], [4]:

$$[dx_{i+n}(t)J_{i,l}(t)] = x_{i+n}(t)J_{j,l}(t)[\frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_j}dt + \frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_j}dw_k(t)] +$$

$$+ J_{i,l}(t)[a_{i+n}(t;x(t))dt + b_{i+n,k}(t;x(t))dw_k(t)] +$$

$$+ J_{j,l}(t)b_{i+n,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_j}b_{i,k}(t;x(t))dt = 0.$$

Поскольку

$$\int_0^1 \frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_j} J_{j,l}(t) x_{i+n}(t) \delta x_l(\gamma) = -\int_0^1 b_{i,k}(t;x(t)) J_{i+n,l}(t) \delta x_l(\gamma),$$

то, используя это равенство для коэффициентов при $dw_k(t)$, находим:

$$\int_0^1 \left[b_{n+i,k}(t;x(t)) J_{i,l}(t) - b_{i,k}(t;x(t)) J_{i+n,l}(t) \right] \delta x_l(\gamma) = 0, \forall k = \overline{1,m}.$$

Из последнего тождества следует необходимость представления:

$$b_{i,k}(t;x) = \frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}}, \quad b_{i+n,k}(t;x) = -\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_i}; \ \forall k = \overline{1,m}, \ \ \forall i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

В свою очередь, учитывая равенства (5), (6):

$$\int_0^1 x_{i+n}(t) J_{j,l}(t) \frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_j} \delta x_l(\gamma) = -\int_0^1 J_{i+n,l}(t) a_i(t;x(t)) \delta x_l(\gamma)$$

$$\beta \int_0^1 b_{i+n,k}(t;x(t)) \frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_j} J_{j,l}(t) \delta x_l(\gamma) = -$$

$$-\beta \int_0^1 b_{i,k}(t;x(t)) \frac{\partial b_{i+n,k}(t;x(t))}{\partial x_j} J_{j,l}(t) \delta x_l(\gamma),$$

приходим к таким требованиям для коэффициентов при dt:

$$-\int_0^1 [a_i(t;x(t)) - (1-\beta) b_{r+n,k}(t;x(t)) \frac{\partial b_{r,k}(t;x(t))}{\partial x_{i+n}} +$$

$$+ \beta b_{r,k}(t;x(t)) \frac{\partial b_{r+n,k}(t;x(t))}{\partial x_{i+n}}] J_{i+n,l}(t) \delta x_l(\gamma) +$$

$$+\int_0^1 [a_{i+n}(t;x(t)) + (1-\beta) b_{r+n,k}(t;x(t)) \frac{\partial b_{r,k}(t;x(t))}{\partial x_i} -$$

$$- \beta b_{r,k}(t;x(t)) \frac{\partial b_{r+n,k}(t;x(t))}{\partial x_i}] J_{i,l}(t) \delta x_l(\gamma) = 0; \ \ r = \overline{1,n}.$$

Это условие должно быть выполнено для любого замкнутого контура начальных состояний $x(\gamma)$. Как следствие, приходим к соотношениям:

$$a_i(t;x) - (1-\beta) b_{r+n,k}(t;x) \frac{\partial b_{r,k}(t;x)}{\partial x_{i+n}} + \beta b_{r,k}(t;x) \frac{\partial b_{r+n,k}(t;x)}{\partial x_{i+n}} = \frac{\partial H(t;x)}{\partial x_{i+n}},$$

$$a_{i+n}(t;x) + (1-\beta) b_{r+n,k}(t;x) \frac{\partial b_{r,k}(t;x)}{\partial x_i} - \beta b_{r,k}(t;x) \frac{\partial b_{r+n,k}(t;x)}{\partial x_i} = -\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_i},$$

где β не зависит от x.

Учитывая (11), находим:

$$a_i(t;x) = \frac{\partial H(t;x)}{\partial x_{i+n}} + [(1-\beta) \frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_r} \frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n} \partial x_{r+n}} - \beta \frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{r+n}} \frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n} \partial x_r}] \tag{12}$$

$$a_{i+n}\left(t;x\right)=-\frac{\partial H\left(t;x\right)}{\partial x_i}-[(1-\beta)\frac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k\left(t;x\right)}{\partial x_i\partial x_{r+n}}-\beta\frac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k\left(t;x\right)}{\partial x_{i+n}\partial x_r}].$$

Стохастические уравнения Гамильтона в представлении Стратоновича. При наличии только винеровских процессов и $\beta=0{,}5$, как можно показать, при переходе к представлению Стратоновича, уравнения (7), с коэффициентами (11) и (12), приобретают вид [6]:

$$dx_i(t)=\frac{\partial H\left(t;x(t)\right)}{\partial x_{i+n}}dt+\frac{\partial H_k\left(t;x(t)\right)}{\partial x_{i+n}}dw_k^s\left(t\right),$$

$$dx_{i+n}(t)=-\frac{\partial H\left(t;x(t)\right)}{\partial x_i}dt-\frac{\partial H_k\left(t;x(t)\right)}{\partial x_i}dw_k^s\left(t\right),$$

$$x_i\left(t\right)=x_i\left(t;x\left(0\right)\right)\big|_{t=0}=x_i\left(0\right),\ x_{i+n}\left(t\right)=x_{i+n}\left(t;x\left(0\right)\right)\big|_{t=0}=x_{i+n}\left(0\right),i=\overline{1,n},$$

где индекс s подчеркивает, что приращение винеровских процессов $w_k\left(t\right)$ берутся симметрично относительно t.

Такой вид уравнений был установлен в [5], [7] и, как видим, связан с условием симметрии приращения винеровского процесса относительно текущего момента t. Это условие является дополнительным ограничением и сужает каласс стохастических уравнений для которых неизменны (2),(4).

Особенно симметричный вид система принемает, если

$$H\left(t;x\right)=H_k\left(t;x\right),\ w_k(t)=w(t),\ \forall k=\overline{1,m}.$$

Для этого случая

$$dx_i(t)=\frac{\partial H\left(t;x(t)\right)}{\partial x_{i+n}}dg^s(t),\quad dx_{i+n}(t)=-\frac{\partial H\left(t;x(t)\right)}{\partial x_i}dg^s(t),\ g(t)=t+w(t).$$

Расширение системы уравнений Ито до стохастической гамильтоновой. Рассмотрим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=a_i(t;x(t)).$$

Введем функцию в расширенном пространстве x,z:

$$H(t;x;z)=z_r a_r(t;x)+\phi(t;x),$$

где $\phi(t;x)$ - произвольная функция.

В новых переменных расширенная система

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=a_i(t;x(t)),\qquad \frac{dz_i(t)}{dt}=-z_r(t)\frac{\partial}{\partial x_i}a_r(t;x(t))+\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(t;x(t)),$$

становится гамильтоновой. Требования к $\phi(t;x)$ связываем только с условиями существования и единственности решений.

Этот метод позволяет привести к гамильтоновой форме систему уравнений, полученную, например, феноменологически и не являющуюся экстремалями какой-либо вариационной задачи. После приведения к гамильтоновой форме, исследование решений уравнений может быть произведено на основе теории гамильтоновых систем [1].

Пусть $x(t)$ решение системы уравнений Ито с винеровскими возмущениями:

$$dx_i(t) = a_i(t;x(t))dt + b_{i,k}(t;x(t))dw_k(t), \quad i=\overline{1,n}. \qquad (a)$$

Покажем, как дополнить (a) таким образом, чтобы расширенная система была стохастической гамильтоновой системой [4].

Рассмотрим систему:

1) $$a_i(t;x) = \frac{\partial H(t;x;z)}{\partial z_i} - \\ -[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x;z)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x;z)}{\partial z_i \partial z_r} - \beta\frac{\partial H_k(t;x;z)}{\partial z_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x;z)}{\partial z_i \partial x_r}]$$

2) $$b_{i,k}(x;t) = \frac{\partial}{\partial z_i} H_k(t;x;z).$$

Совпадение с коэффициентами при dt в (a) будет, если в 2) выбрать

$$H_k(t;x;z) = z_r b_{r,k}(t;x) + \phi_k(t;x). \qquad (b)$$

Подставив (b) в 1), можем убедиться, что это равенство буде обеспечено если:

$$H(t;x;z) = \phi(t;x) + a_r(t;x)z_r + \beta b_{\chi,k}(t;x)\frac{\partial}{\partial x_\chi} b_{r,k}(t;x)z_r, \ \chi=\overline{1,n}. \qquad (c)$$

Дополняющая система для уравнений (a) имеет, следовательно, вид:

$$dz_i(t) = -\frac{\partial H(t;x(t);z(t))}{\partial x_i}dt - \left[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x(t);z(t))}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x(t);z(t))}{\partial x_i \partial z_r} - \right. \\ \left. -\beta\frac{\partial H_k(t;x(t);z(t))}{\partial z_r}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x(t);z(t))}{\partial z_i \partial x_r}\right]dt - \frac{\partial H_k(t;x(t);z(t))}{\partial x_i}dw_k(t). \qquad (d).$$

Как и в детерминированном случае, требования к произвольным функциям $\phi_k(t;x)$, $k=\overline{1,m}$ и $\phi(t;x)$ в (b) и (c) связываем с выполнением условий существования и единственности решений для системы (a), (d). Расширенная система (a),(d) является стохастической гамильтоновой в пространстве $(x;z)$.

Учет пуассоновских возмущений. Рассмотрим в (7) ту часть дифференциала, которая связанна с пуассоновскими возмущениями $(x(t) = x(t;x(\gamma));\ J_{j,l}(t) = J_{j,l}(t;x(\gamma)))$:

$$[dI(t)]_p = \int_0^1 \delta_\gamma x_l(\gamma)[dx_{i+n}(t)J_{i,l}(t)]_p =$$

$$= \int_{R(\lambda)} [\int_0^1 \{x_{i+n}(t) + g_{i+n}(t;x(t);\lambda)\}\{J_{i,l}(t) + J_{r,l}(t)\frac{\partial}{\partial x_r} g_i(t;x(t);\lambda) +$$

$$+J_{r+n,l}(t)\frac{\partial}{\partial x_{r+n}} g_i(t;x(t);\lambda)\}\delta_\gamma x_l(\gamma) - \int_0^1 J_{i,l}(t)x_{i+n}(t)\delta_\gamma x_l(\gamma)]\nu(dt;d\lambda) =$$

$$= \int_{R(\lambda)} [\int_0^1 \{g_{i+n}(t;x(t);\lambda)J_{i,l}(t) + x_{i+n}(t)J_{r,l}(t)\frac{\partial}{\partial x_r} g_i(t;x(t);\lambda)\}\delta_\gamma x_l(\gamma) +$$

$$+\int_0^1 \{g_{r+n}(t;x(t);\lambda)\frac{\partial}{\partial x_i} g_r(t;x(t);\lambda)J_{i,l}(t) + \tag{13}$$

$$+ g_{r+n}(t;x(t);\lambda)\frac{\partial}{\partial x_{i+n}} g_r(t;x(t);\lambda)J_{i+n,l}(t)\}\delta_\gamma x_l(\gamma)]\nu(dt;d\lambda)$$

В последнем слагаемом было выполнено переобозначение: $r \leftrightarrow i$.

Учитывая (6), преобразуем слагаемые в (13):

$$[dI(t)]_{p_1} =$$

$$= \int_0^1 \delta x_l(\gamma) \int_{R(\lambda)} [g_{i+n}(t;x(t);\lambda)J_{i,l}(t) + x_{r+n}(t)J_{j,l}(t)\frac{\partial}{\partial x_j} g_r(t;x(t);\lambda)]\nu(dt;d\lambda) =$$

$$= \int_0^1 \delta x_l(\gamma) \int_{R(\lambda)} [g_{i+n}(t;x(t);\lambda)J_{i,l}(t) - J_{i+n,l}(t)g_i(t;x(t);\lambda))]\nu(dt;d\lambda); \tag{14}$$

$$[dI(t)]_{p_2} = \int_0^1 \delta x_l(\gamma) \int_{R(\lambda)} [g_{i+n}(t;x(t);\lambda)J_{j,l}(t)\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(t;x(t);\lambda)]\delta x_l(\gamma)\nu(dt;d\lambda) =$$

$$= \int_{R(\lambda)} \nu(dt;d\lambda)[\int_0^1 g_{i+n}(t;x(t);\lambda)\delta_\gamma g_i(t;x(t);\lambda)]\delta x_l(\gamma) =$$

$$= \int_0^1 \int_{R(\lambda)} [(1-\mu)g_{r+n}(t;x(t);\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j} g_r(t;x(t);\lambda) -$$

$$- \mu g_r(t;x(t);\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j} g_{r+n}(t;x(t);\lambda)]J_{j,l}(t)\delta x_l(\gamma)\nu(dt;d\lambda) \tag{15}$$

где μ - еще не определено.

Обращение в ноль (14) возможно, если подынтегральное выражение в нем является полным дифференциалом по γ от некоторой скалярной функции $f(t;x;\lambda)$:

$$\frac{\partial f\left(t;x\left(t;x\left(\gamma\right)\right);\lambda\right)}{\partial\gamma}=\frac{\partial f\left(t;x\left(t;x\left(\gamma\right)\right);\lambda\right)}{\partial x_j}J_{j,l}(t;\gamma)\delta x_l\left(\gamma\right), \qquad .$$

Это приводит к требованию существования такой функции $H_0(t;x;\lambda)$, что

$$g_{i+n}(t;x;\lambda)=\frac{\partial}{\partial x_i}H_0(t;x;\lambda), \quad g_i(t;x;\lambda)=-\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}H_0(t;x;\lambda)., \tag{16}$$

(16) является необходимым и достаточным условием обращения в ноль (14).

Рассмотрим (15). Требование обращения в ноль (15), при условии (16), заведомо будет выполнено тогда, когда

$$[(1-\mu)g_{i+n}(t;x;\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j}g_i(t;x;\lambda)=\mu g_i(t;x;\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j}g_{i+n}(t;x;\lambda)], \quad \forall j=\overline{1,2n}.$$

Это возможно если $\mu=0,5$ и

$$H_0(t;x;\lambda)=H_0(t;\vartheta_1x_1+\vartheta_{1+n}x_{1+n};\vartheta_2x_2+\vartheta_{2+n}x_{2+n};..;\vartheta_nx_n+\vartheta_{2n}x_{2n};\lambda), \tag{17}$$

где ϑ_j – произвольные функции не зависящие от x.

Вывод. Собирая полученные выражения коэффициентов (11), (12), (16), (17) и учитывая схему выполненных рассуждений, приходим к утверждению:

ТЕОРЕМА. Стохастические уравнения Ито (7), при ограничениях (8), с коэффициентами

$$a_{i+1}\left(t;x\right)=-\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_i}+[(1-\beta)\frac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k\left(t;x\right)}{\partial x_{i+n}\partial x_{r+n}}-\beta\frac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k\left(t;x\right)}{\partial x_{i+n}\partial x_r}]$$

$$a_i\left(t;x\right)=\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_{i+n}}-[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{r+n}}-\beta\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_r}]$$

$$b_{i,k}\left(x;t\right)=\frac{\partial H_k\left(x;t\right)}{\partial x_{i+n}}, \quad b_{i+n,k}\left(x;t\right)=\frac{\partial H_k\left(x;t\right)}{\partial x_{i+n}}, \quad \forall k=\overline{1,m},$$

$$g_i(t;x;\lambda)=-\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}H_0(t;x;\lambda), \; g_{i+n}(t;x;\lambda)=\frac{\partial}{\partial x_i}H_0(t;x;\lambda), \; \forall\lambda\in\mathrm{R}(\lambda),$$

при условии, что

$$H_0(t;x;\lambda)=H_0(t;\vartheta_1x_1+\vartheta_{1+n}x_{1+n};\vartheta_2x_2+\vartheta_{2+n}x_{2+n};..;\vartheta_nx_n+\vartheta_{2n}x_{2n};\lambda),$$

а β и ϑ_j – произвольные функции, не зависящие от x, требования к которым связываем с условиями существования и единственности решения (7), образуют класс стохастических уравнений Ито с винеровскими и пуассоновскими возмущениями, для которых существует интегральный инвариант Пуанкаре.

Обратно, существование функций $H\left(x;t\right),H_k\left(x;t\right)$, $H_0(t;x;\lambda)$, согласованных с требованиями (8), является достаточным условием обеспечения инвариантности интеграла (4), построенного на решениях системы (7).

Если $H_k(t;x)$, $H_0(t;x;\lambda) \equiv const$, то уравнения (7), с коэффициентами, определяемыми соотношениями Теоремы, переходят в канонические уравнения Гамильтона. Это и дает основание назвать их стохастическими уравнениями Гамильтона.

Отметим, что примененный в данной работе подход, опирающийся на интегрирования по начальным значениям, позволяет с самого начала работать в рамках теории уравнений Ито и предположений относительно гладкости $H(x;t), H_k(x;t), H_0(t;x;\lambda)$ – обычных для классической механики.

Использованные источники информации:

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике /Гантмахер Ф.Р. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
2. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / Гихман И.И., Скороход А.В. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
3. Дубко В.А. Интегрирование по начальным данным, интегральный инвариант Пуанкаре и уравнения «Гамильтона» для диффузионных процессов // УМЖ, Т.33, №6. – 1981. – С.802-804. http://www.imath.kiev.ua/~umzh/Archiv/1981/6/UMZh_1981_06_0802.pdf
4. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений / Дубко В.А. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1989. – 185 с.
5. Дубко В.А. Открытые эволюционирующие системы // Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (26-27 квіт. 2002 р., Київ) (Додаток). – Київ : ВНЗ ВМУРоЛ. – 2002. – С. 14-31. http://openevolvingsystems.narod.ru/indexUkr.htm
6. Дубко В.А. Интегральный инвариант Пуанкаре и стохастические уравнения Гамильтона // Труды Всероссийской конференции «XXXV Дальневосточная математическая школа». – Владивосток: Изд-во ТОГУ, 2010. – С. 78-82.
7. Дубко В.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Избранные разделы. / Дубко В.А. – К.: Логос, 2012. – 68 с. http://www.twirpx.com/file/1333718/ , http://www.calameo.com/books/003168372374fa86544f4 .

8. Дубко В.А. Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. / Дубко В.А., Карачанская Е.В. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. – 91 с.
9. Bismut J.M. Mėcanique Alėtatorie – NevYork: Springer-Verlag,1981.553 p.