УДК 621.396.4

Лысенко А.И., д.т.н., профессор,
НТУУ «КПИ»;
Тачинина Е.Н., к.т.н., доцент,
НАУ

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ С АЛЬТЕРНАТИВОЙ

Предложен метод построения оптимальных траекторий с альтернативой, позволяющий существенно расширить возможности составных динамических систем

Запропоновано метод побудови оптимальних траєкторій з альтернативою, що дозволяє істотно розширити можливості складених динамічних систем

The method of optimal alternative tracing that permits increase essentially the capabilities of compound dynamic systems is proposed.

Введение. Проблема группового управления – это глобальная проблема, актуальная для всех сфер жизни. Везде, где существует некоторая группа живых или технических объектов, которая должна совместными усилиями решать ту или иную задачу, возникает проблема управления группой. В технической сфере это может быть группа роботов или группа беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), которые используются там, где жизнедеятельность человека либо затруднена, либо вообще невозможна, например, в зонах радиоактивного или химического загрязнения, в условиях боевых действий, при проведении подводных или космических исследований.

Анализ исследований и публикаций. При групповом применении БПЛА, они должны определенным образом взаимодействовать друг с другом с тем, чтобы как можно более эффективно решить поставленную задачу в условиях сложной среды, когда ситуация может изменяться непредсказуемым образом. Чтобы достичь поставленной цели, группа БПЛА должна действовать как нечто единое целое, и действия каждого отдельного БПЛА должны быть направлены на получение наибольшего группового эффекта. С этой целью предлагается группу БПЛА, выполняемую единую цель рассматривать как составную динамическую систему.

Под составной динамической системой понимается совокупность объектов (подсистем) объединенных в систему физическим смыслом. В качестве таких объектов могут быть использованы БПЛА, роботы и др. [6].

Траектории таких составных динамических систем называются ветвящимися, так как состоят из участков совместного движения составных частей и участков совместного движения составных частей и участков ихиндивидуального движения к цели, то есть движения по отдельным ветвям траектории.

Эффективность использования этого класса систем зависит от наилучшего, оптимального выбора координат и момента времени разделения составной динамической системы (СДС), а также от оптимального способа движения СДС к точке разделения и оптимального перемещения подсистем к целям по ветвям траектории после разделения.

Постановка задачи. В настоящее время рассматриваются задачи, в которых траектории динамических систем должны удовлетворять не только основным требованиям, но и ряду альтернативных [9].

Альтернативность свойств траектории состоит в том, что в каждый момент времени движения динамической системы по этой траектории существуют условия для другого варианта движения, цель которого исключает основную цель движения системы. К указанному классу траекторий относятся, например, траектории посадки БПЛА, из любой точки которой возможен уход на второй круг; траектория полета БПЛА, из любой точки некоторого заданного участка которой возможен безаварийный сброс груза [7]. Поиск возможных подходов, в том числе использующих положения теории оптимальных ветвящихся траекторий, определения оптимальных траекторий, удовлетворяющих не только основным, но и альтернативным требованиям позволит расширить возможности составных динамических систем.

Оптимальные траектории, представляющие динамическим системам дополнительные возможности

Основная конструктивная идея состоит в применении принципа расширения [4, 5], не только к критерию оптимизации и вектору фазового состояния, но и к ограничению.

Рассмотрим математическую постановку задачи и ее решение.

Динамическая система

$$dx / dt = \dot{x}_t = F(x,u,t), t \in [t_0, t_f], \tag{1}$$

где $x \in E^n, u \in \Omega \subset E^m, F(\cdot)$ -непрерывное вместе с матрицами производных F_x, F_u отображение $E^n \times E^m \to E^n$, перемещается из точки с координатами $(x(t_0),t_0) \in Q_0 = \{(x(t_0), t_0) : \varphi^{(0)}(x(t_0), t_0) = 0\}$ $(\varphi^{(0)} : E^{n+1} \to E^{r0}, r_0 \langle n+1)$ в точку $(x(t_f),t_f) \in$ $Q_f = \{(x(t_f), t_f) : \varphi^{(f)} x(t_f), t_f) = 0\}$ $(\varphi^{(f)} : E^{n+1} \to E^{rf}, r_f \langle n+1)$.

В каждый момент времени $t \in [t_0, t_f]$,от динамической системы (1) может отделиться динамическая подсистема

$$dy/d\xi = \dot{y}_\xi = f(x, \nu, \xi), \xi \in [t_0, t_k], \qquad (2)$$

где $y \in E^n, \nu \in \Omega_\nu \subset E^{m_\nu}$, $y(t) = x(t)$ для всех фазовых координат, кроме массы, $f(\cdot)$-непрерывное вместе с матрицами производных f_y, f_ν отображение $E^n \times E^{m_\nu} \to E^n$, перемещающаяся в точку $(y(t_k), t_k) \in Q_k = \{(y(t_k), t_k) : \varphi^{(k)} x(t_k), t_k) = 0\}$ $(\varphi^{(k)} : E^{n+1} \to E^{r_k}, r_k \langle n+1)$.

На движение подсистемы (2) накладывается ограничение

$$\mathrm{J} = \int_t^{t_k} \varphi(y, \nu, \xi) d\xi + g(y(t), t; y(t_k), t_k) \le 0 \qquad (3)$$

Требуется найти $u(t), x(t),\ t \in [t_0, t_f],\ \nu(\xi), y(\xi), t \in [t, t_k]$, моменты времени t_0, t_f, t_k такие, чтобы функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \Phi(x, u, t) dt + G(x(t_0), t; x(t_f), t_f) \to \min \qquad (4)$$

принимал наименьшее возможное значение.

Решение задачи предлагается искать в классе кусочно-гладких траекторий и кусочно-непрерывных управлений.

Предполагается, что задача (1) – (4) не имеет тривиального решения, состоящего в том, что оптимальная траектория задачи (1) – (4) удовлетворяет ограничению (3) при неуправляемом движении подсистемы.

Используя гипотезу о расширении ограничения, сущность которой состоит в том, что задачу поиска $\nu(\xi), y(\xi), t_k, \xi \in [t, t_k]$, удовлетворяющих двум ограничениям (2), (3) возможно заменить на эквивалентную задачу с одним ограничением

$$\widetilde{J} = \int_t^{t_k} \begin{cases} \varphi(y, \nu, \xi) d\xi + \Phi^T(\xi)\left[f(y, \nu, \xi) - \dot{y}_\xi\right]\} d\xi + \\ + \mu^{(k)T\varphi(k)}\ (y(t_k), t_k) + g(x(t), t; y(t_k), t_k) \le 0 \end{cases}, \qquad (5)$$

где $\mu^{(k)T} = \{\mu_1^{(k)}, \dots, \mu_{r_k}^{(k)}\}$-векторный множитель, $\Phi^T(\xi) = \{\phi_1(\xi), \dots, \phi_2(\xi)\}$-функциональный векторный множитель, которые могут трактоваться как множители Лагранжа[2], если поиск $\nu(\xi), y(\xi), t_k, \xi \in [t, t_k]$ выполняется по условию $J \to min$. В этом случае $\nu(\xi), y(\xi), \Phi^{(k)}(\xi), t_k$ должны удовлетворять уравнениям [6, 8]

$$\dot{\Phi}_\xi = -dh/dy\big|_\wedge, \qquad (6)$$

$$h(\hat{y},\hat{v},\phi,\xi) = \min_{v(\xi)\in\Omega_V} h(\hat{y},v,\phi,\xi) \qquad (7)$$

$$\mu^{(k)T}\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial t_k}\Big|_{\wedge} + \frac{\partial g}{\partial t_k}\Big|_{\wedge} + h\Big|_{\wedge} = 0,$$

$$\mu^{(k)T}\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial yt_k}\Big|_{\wedge} + \frac{\partial g}{\partial yt_k}\Big|_{\wedge} - \Phi(\hat{t}_k)\Big|_{\wedge} = 0, \qquad (8)$$

$$\mu^{(k)} \ge 0, \phi_i^{(k)}(y(t_k)\langle t_k) = 0 \ \ (i = \overline{1, r_k}). \qquad (9)$$

где значок «^» отмечает оптимальныепеременные и параметры,

$$h(y,v,\varphi,\xi) = \varphi(y,v,\xi) + \Phi^T(\xi) f(y,v,\xi).$$

Выполнение соотношений (8)-(9) позволяет удовлетворить неравенство (3), которое преобразуется к виду

$$\hat{J} = (x(t),(t); \quad \hat{y}(\hat{t}_k),\hat{t}_k \le 0. \qquad (10)$$

наилучшим образом.

Если при таком подходе неравенство (3) нарушается, то остается единственный способ добиться его выполнения – это изменить траекторию $x(t)$. При неоптимальном способе выбора $v(\xi), \xi \in [t, t_k]$ неясно, за счет чего добиваться выполнения условия (3): либо за счет управления $v(\xi)$, либо посредством измерения $x(t)$. Поэтому в дальнейшем будем исходить из того, что $v(\xi), \xi \in [t, t_k]$ вычислено по формулам (6), (9).

В выражениях (1), (4), (10) ограничение (10) является ограничением типа неравенства, не содержащим управление. Возьмем полную производную по времени от выражения (10) и подставим $F(x,u,t)$ вместо $\dot{x}$ [3, 6]:

$$\dot{\hat{J}}_t = \frac{\partial\hat{J}}{\partial t} + \left[\frac{\partial\hat{J}}{\partial t}\right]^T F(x,u,t) = 0, \hat{J} = 0. \qquad (11)$$

$$H(x,u,\lambda,t) = \Phi(x,u,t) + \lambda^T(t)F(x,u,t) + \mu(t)\dot{\hat{J}}_t, \qquad (12)$$

где

$$\mu(t)\begin{cases} \ge 0, \hat{J} = 0, \dot{\hat{J}} = 0; \\ = 0, \hat{J} \langle 0. \end{cases}$$

Уравнения принципа минимума имеют вид [8]:

$$\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{\wedge}; H(\hat{x},\hat{u},\lambda,t) = \min_{u(t)\in\Omega} H(\hat{x},u,\lambda,t), \qquad (13)$$

$$\mu^{(0)T}\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial t_0}\Big|_{\wedge} + \frac{\partial G}{\partial t_0}\Big|_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0),\hat{u}(\hat{t}_0),\lambda(\hat{t}_0),\hat{t}_0) = 0, \qquad (14)$$

$$\mu^{(f)T}\frac{\partial\varphi^{(f)}}{\partial t_f}\Bigg|_{\wedge}+\frac{\partial G}{\partial t_f}\Bigg|_{\wedge}-H(\hat{x}(\hat{t}_f),\hat{u}(\hat{t}_f),\lambda(\hat{t}_f),\hat{t}_f)=0, \qquad (15)$$

$$\mu^{(0)T}\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial x(t_0)}\Bigg|_{\wedge}+\frac{\partial G}{\partial x t_0}\Bigg|_{\wedge}+\lambda(\hat{t}_0)=0,$$

$$\mu^{(f)T}\frac{\partial\varphi^{(f)}}{\partial x(t_f)}\Bigg|_{\wedge}+\frac{\partial G}{\partial x(t_f)}\Bigg|_{\wedge}-\lambda(\hat{t}_f)=0. \qquad (16)$$

Отметим, что переход от неравенства (10) к неравенству (11) и далее, к гамильтониану (12) не является единственно возможным способом решения задачи (1), (4), (10). Для устойчиво оптимальных процессов [1] предлагаются два способа решения задачи (1), (4), с ограничением (10), отличающиеся от приведенного. Первый способ состоит в том, что в гамильтониан (12) вместо $\mu(t)\dot{\hat{J}}(t)$ и вводятся $\mu(t)\hat{J}(t)$ [1]. Второй способ заключается в переходе к новой эквивалентной М-задаче с прежними условиями (1), (10), но другим целевым функционалом [1]

$$I_M=G(x(t_0),t_0;x(t_f),t_f+\int_{t_0}^{t_f}\Phi(x,u,t)dt+\mu^{(0)T}\varphi^{(0)}(x(t_0),t_o)+\mu^{(f)T}\varphi^{(f)}(x(t_f),t_f)+$$

$$+\frac{M}{t_f-t_0}\int_{t_0}^{t_f}max^2(0,\hat{J}(x(t),t;\hat{y}(\hat{t}_k),\hat{t}_k))dt,$$

где М >0 – постоянная.

В заключение отметим, что решение задачи (1) - (4) следует начинать с проверки отсутствия тривиального решения, то есть решить задачу (1) , (5) и проверить выполнение условий (2) , (3) при неуправляемом движении подсистемы. (2).

Гипотеза о расширении ограничения строго обосновывается по методике [9] в случае, когда от неравенства (3) осуществляется переход к его минимальному значению $J=\min\limits_{v(t)\in\Omega_V} h(\hat{y},v,\phi,\xi)$.

Выводы. Таким образом, предложенный метод построения оптимальных траекторий с альтернативой, состоящий в применении принципа расширения, не только к критерию оптимизации и вектору фазового состояния, но и к ограничению, позволит удовлетворить как основные, так и альтернативные требования к оптимальным траекториям и существенно расширить возможности составных динамических систем.

Использованные источники информации:

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными система.-Новосибирск: Наука, 1987. –226 с.
2. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. – .М.: Радио и связь, 1987.–400 с.

3. Брайсон А., Хо Ю–Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.554 с.
4. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985.288 с.
5. Кротов В.Ф. Гурман В.И. Метолы и задачи оптимального управления.– М.: Наука, 1973.–448 с.
6. Лысенко А.И. Синтез оптимальных траекторий, представляющих динамическим системам дополнительные возможности. Авиационные приборы, навигационные системы,системы обеспечения жизнедеятельности и спасения экипажей летательных аппаратов. М.: ВВИА им проф. Н.Е. Жуковского, 1989.–С.65-70.
7. Мубаракшин Р.В. Комлексное наведение летательных аппаратов и отделяемых средств.– М.: Машиностроение, 1990.–272 с.
8. Справочник по теории автоматического управления. Под редакцией А.А. Красовского. –М.: Наука, 1987.–712 с.
9. .Mason J.D.Some Optimal dranched trajectories. Redondo Beach, Calif., CR-1331, 1969.–78 p.