УДК.519.21

Дубко В.А.,
д.ф.-м.н., проф.,
АМУ

ЭЛЕМЕНТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ

Встановлюється клас стохастичних рівнянь Іто з вінерівськими та пуассонівськими збуреннями, розв'язки яких узгоджуються з вимогами збереження фазового об'єму та інваріантності інтеграла Пуанкаре.

Определяется класс стохастических уравнений Ито с винеровскими и пуассоновскими возмущениями, решения которыхх согласуются с требованиями сохранения фазового объема и инвариантности интеграла Пуанкаре.

Defines a class of Ito stochastic equations with Wiener's and Poisson's perturbations, whose decisions are related with the condition of the conservations of phase volume and the invariance's of the integral Poincare.

Введение. В аналитической механике требования существования интегрального инварианта Пуанкаре, Пуанкаре-Картана приводит к классу дифференциальных уравнений гамильтоновой механики [1]. Одним из основных в гамильтоновой механике является утверждение о сохранении фазового объема.

В данной работе исследуется вопрос о строении класса уравнений Ито с пуассоновскими и винеровскими возмущениями, согласующихся с требованием сохранения фазового объема и существованием интегрального инварианта Пуанкаре.

Для упрощения в записи математических выражений в работе, полагается, как принято, что по индексам, встречающимся дважды, выполняется суммирование.

Сохранение фазового объема. Пусть $x(t)$ решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для процесса $x(t)$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{dx_r(t)}{dt} = a_r\left(t; x(t)\right)$$

$$x_r(t) = x_r\left(t; x(0)\right)|_{t=0} = x_r(0), \quad r = \overline{1, n_0}.$$

При условии существования производных $\frac{\partial}{\partial x_l} a_r\left(t; x(t)\right)$, уравнение для элементов якобиана преобразования

$$J_{r,l}(t)=J_{r,l}\left(t;x(0)\right)=\lim_{|\Delta|=\Delta_l\to 0}\frac{x_r(t;x(0)+\Delta)-x_r(t;x(0))}{\Delta_l},\quad l,r=\overline{1,n_0},$$

имеет вид:

$$\frac{dJ_{r,l}(t)}{dt}=J_{\eta,l}(t)\frac{\partial a_r(t;x(t))}{\partial x_\eta},\ J_{r,l}(0)=\delta_{r,l}(\delta_{r,r}=1,\ \delta_{r,l}=0,\forall r\neq l)$$

Опираясь на это уравнение, можем построить и уравнение для якобиана преобразования $J(t)=J\left(t;x(0)\right)$:

$$\frac{d}{dt}J(t)=J(t)\frac{\partial a_r\left(t;x(t)\right)}{\partial x_r},\ J(0)=1.$$

Определение 1. Дифференциалом фазового объема, согласованного с процессом $x\left(t,x(0)\right)$, назовем структуру:

$$dV(t)=J(t)dV\left(x(0)\right),\qquad dV(x)=\prod_{r=0}^{n_0}dx_r$$

Определение 2**.** Элементом фазового объема, порожденного процессом $x\left(t,x(0)\right)$, назовем интеграл:

$$V_t\left(V(0)\right)=\int_{V(0)}J(t)dV\left(x(0)\right).\tag{1}$$

Условие сохранения (инвариантности)$V_t\left(V(0)\right)$ для произвольной области начальных состояний $V(0)$, приводит, как следует из уравнения (1) к требованию:

$$\frac{\partial a_r(t;x)}{\partial x_r}=0.$$

В аналитической механике доказывается, что если в $R^{n_0}=R^{2n}$ определена система уравнений вида:

$$dx_i(t)=\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}H\left(t;x(t)\right)dt,\quad x_i(t)=x_i\left(t;x(0)\right)|_{t=0}=x_i(0),$$

$$dx_{i+n}(t)=-\frac{\partial}{\partial x_i}H\left(t;x(t)\right)dt,\ x_{i+n}(t)=x_{i+n}\left(t;x(0)\right)|_{t=0}=x_{i+n}(0),i=\overline{1,n}.$$

- то фазовый объем – инвариант [1].

Обратное утверждение – не корректно.

1.Условия сохранение стохастического объема [6]. [8].. Пусть $x(t)$ определен в $R^{n}{}_0$ и является решением системы обобщенных уравнений Ито:

$$dx_r(t)=a_r\left(t;x(t)\right)dt+b_{r,k}\left(t;x(t)\right)dw_k(t)+\int_{R(\lambda)}g_r(t;x(t);\lambda)\nu(dt;d\lambda),\tag{2}$$

$$x_r(t)=x_r\left(t;x(0)\right)\Big|_{t=0}=x_r(0),\ r,l=\overline{1,n_0}.$$

В (2) $w_k(t), k=\overline{1,m}$ - независимые винеровские процессы, а $\nu(dt;d\lambda)$ - стохастическая пуассоновская мера [2]:

$$\mathrm{E}[\nu(dt;d\lambda)] = \prod(d\lambda)dt\,.$$

Относительно коэффициентов $a(t;x),\ b(t;x),\ g(t;x;\gamma)\in \mathrm{R}^{n_0}$, будем предполагать, что они, в общем, случайные функции, ограниченные и непрерывные вместе со своими производными:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial a_l(t;x)}{\partial x_r},\quad \frac{\partial b_{l,k}(t;x)}{\partial x_r},\quad \nabla^\alpha g_l(t;x;\lambda)\,,\quad r,l=\overline{1,n_0}\,,\ k=\overline{1,m};\\ &\int\limits_0^T dt\int\limits_{\mathrm{R}(\lambda)}|\nabla^\alpha g_l(t;x;\lambda)|^\theta\prod(d\lambda)<\infty,\ \int\limits_{\mathrm{R}(\lambda)}\prod(d\lambda)<\infty,\ \alpha=\overline{1,4},\ \theta=1,2,\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

где ∇^α- обозначение всевозможных частных производных по компонентам x порядка от 1-го до 4-го; - пространство параметров R (λ) пуассоновских мер. В дальнейшем, обозначение области интегрирования
по R (λ) будем опускать.

Условий (3) достаточно для существования и единственности решений (2), возможности дифференцирования их по начальным значениям [2] и, как следствие, построения случайных величин:

$$J_{l,r}(t) = \underset{|\Delta|=\Delta_r\to 0}{l.i.m.}\frac{x_l(t;x(0)+\Delta)-x_l(t;x(0))}{\Delta_r}\,.$$

$J_{l,r}(t)$ - решение составной системы стохастических уравнений (2) и уравнений:

$$\begin{aligned}dJ_{l,r}(t) = J_{\mu,r}(t)[&\frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_\mu}dt+\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_\mu}dw_k(t)+\\ &+\int\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_\mu}\nu(dt;d\gamma)],\end{aligned}\qquad(4)$$

$$J_{l,r}(t)=J_{l,r}(t;x(0))\,|_{t=0}=\begin{cases}0, & l\neq r\\ 1, & l=r\end{cases},\quad \eta=\overline{1,n_0}\,.$$

Опираясь на уравнение (4) строим уравнение для $J(t)$ ([5] [6]):

$$\begin{aligned}dJ(t) = J(t)\mathrm{K}(t)dt + J(t)\frac{\partial b_{l,k}(t;x(t))}{\partial x_l}dw_k(t)+\\ +\int\{J([J_{l,r}(t)+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_\mu}J_{\mu,r}(t)])-J(J_{l,r}(t))\}\nu(dt;d\gamma),\end{aligned}\qquad(5)$$

где

$$\mathrm{K}(t)=\left[\frac{\partial a_l(t)}{\partial x_l}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial b_{r,k}(t)}{\partial x_r}-\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial b_{r,k}(t)}{\partial x_l}\right)\right]$$

Из свойств матриц и детерминантов следует, что

$$J([J_{l,r}(t)+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_\mu}J_{\mu,r}(t)])=J(t)\det[\mathrm{E}+\mathrm{G}(\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r})],\ \mu=\overline{1,n_0},$$

где матрицы E и G размерности $n\times n$, соответственно, единичная и построенная из элементов $\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r}$.

Это позволяет представить полученное уравнение (5) в виде:

$$\begin{gathered} dJ(t)=J(t)\{\mathrm{K}(t)dt+\frac{\partial b_{l,k}(t;x(t))}{\partial x_l}dw_k(t)+ \\ +\int(\det[\mathrm{G}(\delta_{l,r}+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r})]-1)\nu(dt,d\gamma)\}; \end{gathered} \tag{6.}$$

Решение этого уравнения, которое рассматривается как решение составной системы (2), (6), при начальном условии $J(t)_{t=0}=1$ и ограничениях (3), существует и единственно:

$$J(t)=\exp\left\{\int_0^t[\mathrm{K}(\tau)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{l,k}(x(\tau);\tau)}{\partial x_l}\right)^2]d\tau+\right. \tag{7.}$$

$$\left.+\int_0^t\frac{\partial b_{l,k}(x(\tau);\tau)}{\partial x_l}dw_k(\tau)+\int_0^t\int\ln\{|(\det[\mathrm{G}(\delta_{l,r}+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r})]-1)|\}\nu(d\tau,d\gamma)\right\}.$$

Определение 3. Элементом стохастического фазового объема, порожденного случайным процессом $x(t,x(0))$, назовем отображение

$$\Delta V(t)=J(t)\Delta V(x(0)),$$

где $\Delta V(x(0))$ $n-$мерная окрестность точки $x(0)$.

Условие $\Delta V(t)=\Delta V(x(0)),\forall t\geq 0,\forall\Delta V(x(0))\subset R^n$, приводит к требованию $J(t)=J(0)=1,\forall t\geq 0$, и, как следствие, к равенствам:

$$\begin{gathered} dJ(t;x(0))=0,\ \forall t\in[0,T]; \\ dJ^2(t;x(0))=0,\ \forall t\in[0,T]. \end{gathered} \tag{8}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$dJ^2(t)=\frac{\partial J^2(t)}{\partial J}dJ(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J^2(t)}{\partial J^2}(J(t))^2\left(\frac{\partial b_{i,k}(t)}{\partial x_i}\right)^2dt+$$

$$+\int[\{J(t)+J(t)\det[\mathrm{E}+\mathrm{G}(\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r})]\}^2-J^2(t)]\nu(dt,d\gamma)=$$

$$=(J(t))^2\left\{\left(\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_l}\right)^2dt+.\int[(\det[\mathrm{G}(\delta_{l,r}+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r})]-1)]^2\nu(dt,d\gamma)\right\}$$

Из этого уравнения следует, что необходимым условием является выполнение равенств

$$\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_l}=0,\ \forall k=\overline{1,m},\ \forall t\geq 0, \tag{9}$$

и, в силу положительности приращений $\nu(\Delta t,\Delta\gamma)$ пуассоновской меры, равенства:

$$(\det[\mathrm{G}(\delta_{l,r}+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r})]-1)=0,\forall t\geq 0,\forall\gamma. \qquad (10).$$

Возвращаясь к уравнению (5), приходим, с учетом (8) и (9), к выводу о необходимости выполнения требования:

$$\mathrm{K}(t)=\left[\frac{\partial a_l(t)}{\partial x_l}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial b_{r,k}(t)}{\partial x_r}-\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial b_{r,k}(t)}{\partial x_l}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial a_l(t)}{\partial x_l}-\frac{1}{2}\frac{\partial b_{l,k}(t)}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial b_{r,k}(t)}{\partial x_l}=0,\ \forall t\geq 0\,. \tag{11}$$

Теорема 1. При выполнении ограничений (3), условия (9), (10),(11) являются необходимыми и достаточными для сохранения фазового объема.

Доказательство. Достаточность проверяется подстановкой (9), (10),(11) в (7). Необходимость же следует из условий существования и единственности решения (6).

2. Стохастические уравнения Гамильтона. Перейдем к рассмотрению случая когда $x_i(t), x_{i+1}(t)$ - решения системы стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими и пуассоновскими возмущениями - обобщенных уравнений Ито:

$$\begin{aligned} dx_i(t)&=a_i\big(t;x(t)\big)dt+b_{i,k}\big(t;x(t)\big)dw_k(t)+\int\limits_{\mathrm{R}(\lambda)} g_i(t;x(t);\lambda)\nu(dt;d\lambda),\\ dx_{i+n}&=a_{i+n}\big(t;x(t)\big)dt+b_{i+n,k}\big(t;x(t)\big)dw_k(t)+\int\limits_{\mathrm{R}(\lambda)} g_{i+n}(t;x(t);\lambda)\nu(dt;d\lambda), \end{aligned} \tag{12}$$

$$x_i(t)=x_i\big(t;x(0)\big)\big|_{t=0}=x_i(0),\ x_{i+n}(t)=x_{i+n}\big(t;x(0)\big)\big|_{t=0}=x_{i+n}(0),\ i=\overline{1,n}\,.$$

В работе [8] было установлена теорема, которую мы подадим в удобной для целей работы формулировке:

Теорема 2. Стохастические обобщенные уравнения Ито (12), при ограничениях (3), с коэффициентами:

А)

$$a_i(t;x)=\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_{i+n}}-[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{j+n}}-\beta\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}],$$

$$a_{i+n}(t;x)=-\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_i}+[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{j+n}}-\beta\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}]$$

B) $b_{i,k}\left(t;x\right)=\dfrac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_{i+n}},\quad b_{i+n,k}\left(t;x\right)=-\dfrac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_i};\ \forall k=\overline{1,m},\ \ i,j=\overline{1,n}$.

C) $g_i(t;x;\lambda)=\dfrac{\partial}{\partial x_{i+n}}H_0(t;x;\lambda),\ \ g_{i+n}(t;x;\lambda)=-\dfrac{\partial}{\partial x_i}H_0(t;x;\lambda),\ \ \forall\lambda\in\mathrm{R}(\lambda),$

при условии, что

$$H_0(t;x;\lambda)=H_0(t;\vartheta_1\,x_1+\vartheta_{1+n}x_{1+n};\vartheta_2\,x_2+\vartheta_{2+n}x_{2+n};..;\vartheta_n\,x_n+\vartheta_{2n}x_{2n};\lambda),$$

где β и ϑ_j – произвольные функции, не зависящие от x, требования к которым связываем с условиями существования и единственности решения (12), образуют класс стохастических уравнений (Ито-Гамильтона) с винеровскими и пуассоновскими возмущениями, для которых существует интегральный инвариант Пуанкаре

$$I\left(t\right)=\int_0^1 x_{i+n}\left(t;x_l\left(\gamma\right)\right)J_{i,l}\left(t;x_l\left(\gamma\right)\right)\delta x_l\left(\gamma\right),\quad l=\overline{1,2n},\quad . \tag{13}$$

где $\delta x_l\left(\gamma\right)-l$ - ая проекция элемента дуги замкнутого контура начальных значений $Z\left(0,\gamma\right)$ (полагаем, что функции $x_l\left(\gamma\right)$ - дифференцируемы).

3. Уравнения Ито с винеровскими возмущениями. В этом случае необходимо проверить выполнимость условий (9), (11), при ограничениях Теоремы 2.

1. Перепишем условия (9)

$$\frac{\partial b_{l,k}\left(t;x\right)}{\partial x_l}=0,\ \forall k=\overline{1,m},\ \forall t\ge 0,$$

в пространстве переменных $x_i,\ x_{i+n}$:

$$\frac{\partial b_{i,k}\left(t;x\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial b_{i+n,k}\left(t;x\right)}{\partial x_{i+n}}=0,\ \forall k=\overline{1,m},\ \forall t\ge 0,$$

Учитывая равенства B) Теоремы 1, убеждаемся в выполнении условий (9):

$$\frac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_i\partial x_{i+n}}-\frac{\partial H_k\left(t;x\right)}{\partial x_i\partial x_{i+n}}=0,\ \forall k=\overline{1,m},\ \forall t\ge 0.$$

2. Перейдем к проверке выполнения (11). Развернем для этого требование (11)

$$\frac{\partial a_r(t;x)}{\partial x_r}-\frac{1}{2}\frac{\partial b_{r,k}(t;x)}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial b_{l,k}(t;x)}{\partial x_r}=0;\ \ r,l=\overline{1,2n},$$

в пространстве переменных $x_i,\ x_{i+n}$:

$$\frac{\partial a_i(t;x)}{\partial x_i}a+\frac{\partial a_{i+n}(t;x)}{\partial x_{i+n}}=$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial b_{j,k}(t;x)}{\partial x_i}+\frac{\partial b_{i+n,k}(t;x)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial b_{j,k}(t;x)}{\partial x_{i+n}}$$
$$+\frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_{j+n}}\cdot\frac{\partial b_{j+n,k}(t;x)}{\partial x_i}+\frac{\partial b_{i+n,k}(t;x)}{\partial x_{j+n}}\cdot\frac{\partial b_{j+n,k}(t;x)}{\partial x_{i+n}}];\quad i,j=\overline{1,n}.$$

От этого равенства, учитывая В) Теоремы 2, приходим к равенству:

$$\frac{\partial a_i(t)}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{i+n}(t)}{\partial x_{i+n}}=\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{j+n}}-\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}-$$
$$-\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{j+n}}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}].$$

Собирая подобные слагаемые, находим:

$$\frac{\partial a_i(t)}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{i+n}(t)}{\partial x_{i+n}}=[\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{j+n}}-\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}] \tag{14}$$

Обратимся к равенствам А) Теоремы 1 и убедимся, что вид слагаемых слева будет тождественен выражению справа в (14). Для этого продифференцируем коэффициенты в А) и сложим соответствующие производные:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(t;x)+\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}a_{i+n}(t;x)=\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_i\partial x_{i+n}}-\frac{\partial H(t;x)}{\partial x_i\partial x_{i+n}}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{r+n}}-\beta\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_r}]+ \tag{15}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}[(1-\beta)\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{r+n}}-\beta\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_r}].$$

Для удобства восприятия, продифференцируем по отдельности все слагаемые при β:

1)
$$\beta\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_r})=$$
$$=\beta(\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{r+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_r}+\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{r+n}}\frac{\partial^3 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{i+n}\partial x_r});$$

2)
$$-\beta\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}(\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_j})=$$
$$-\beta(\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i\partial x_{i+n}\partial x_j}).$$

Сложив их, получим выражение:

$$3)\qquad \beta[\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}-\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}].$$

Продифференцируем, по отдельности и все слагаемые при $(1-\beta)$:

$$4)\qquad \begin{aligned} &-(1-\beta)\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{j+n}})= \\ &=-(1-\beta)(\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{j+n}}+\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_j}\frac{\partial^3 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{i+n}x_{j+n}}); \end{aligned}$$

$$5)\qquad \begin{aligned} &(1-\beta)\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}(\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{r+n}})= \\ &=(1-\beta)(\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_r}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{r+n}}+\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_r}\frac{\partial^3 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{i+n}\partial x_{r+n}}); \end{aligned}$$

Сложив 4) и 5), приходим к выражению:

$$6)\quad (1-\beta)[-\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{j+n}}+\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{j+n}}]$$

Подставив 3) и 6) в (15), приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i(t)}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{i+n}(t)}{\partial x_{i+n}} &= \beta[\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}-\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_{j+n}}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}]+ \\ &+(1-\beta)[-\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{j+n}}+\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{j+n}}]= \\ &=-[\frac{\partial H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}x_{j+n}}-\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_{i+n}\partial x_j}\frac{\partial^2 H_k(t;x)}{\partial x_i \partial x_{j+n}}] \end{aligned} \qquad (16)$$

Сравнивая равенства (14) и (16) видим их полное совпадение. Следовательно:

Теорема 2. Для стохастической системы уравнений Ито-Гамильтона фазовый объем – инвариант.

Эту теорему можно рассматривать, как расширение теоремы Лиувилля на случай стохастических процессов, согласующихся с уравнениями Ито.

4. Уравнения Ито с винеровскими и пуассоновскими возмущениями. Рассмотрим класс стохастических гамильтоновых систем, с коэффициентами вида С) при пуассоновских возмущениях, приведенных в Теореме 2. Требуется дополнительно установить, существование обобщенных уравнений Ито-Гамильтона, которые обеспечат выполнение равенства (10):

$$\det[\mathrm{G}] = 1, \forall t \geq 0, \qquad (17).$$

где

$$\mathrm{G}{=}\mathrm{G}(\delta_{l,r} + \frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r}) = \mathrm{G}\begin{pmatrix} \mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_2 \\ \mathrm{G}_3 & \mathrm{G}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{G}_1{=}\mathrm{G}_1(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(t;x(t);\lambda)}{\partial x_j}), \quad \mathrm{G}_2{=}\mathrm{G}_2(\frac{\partial g_i(t;x(t);\lambda)}{\partial x_{j+n}}),$$

$$\mathrm{G}_3{=}\mathrm{G}_3(\frac{\partial g_{i+n}(t;x(t);\lambda)}{\partial x_j}), \ \mathrm{G}_4{=}\mathrm{G}_4(\delta_{i+n,j+n} + \frac{\partial g_{i+n}(t;x(t);\lambda)}{\partial x_{j+n}}), \ i,j = \overline{1,n}.$$

Проверка условия (17) требует громоздких и сложных разложений. В данной работе мы ограничимся несколькими частными случаями.

1. Если g_i не зависят от x_j, то это соответствует такому виду H_0:

$$H_0(t;x;\lambda) = g_j(t;\lambda)x_{j+n} - g_{j+n}(t;\lambda)x_j + C,$$

где C- произвольная функция, не зависящая от компонент x, то условие (17) будет выполнено.

2. Рассмотрим следующую функцию:

$$\begin{aligned} H_0 = H_0(t;x;\lambda) = H_0(t;\vartheta_1 x_1 + \vartheta_{1+n}x_{1+n};\vartheta_2 x_2 + \vartheta_{2+n}x_{2+n};..;\vartheta_n x_n + \vartheta_{2n}x_{2n};\lambda),= \\ = C_j H_{0,j}(t;\vartheta_j x_j + \vartheta_{j+n}x_{j+n};\lambda) + C, \end{aligned} \qquad (18)$$

где C_j, C произвольные функции, не зависящие от компонент x. В этом случае:

$$g_j = g_j(t;x;\gamma) = g_j(t;\vartheta_j x_j + \vartheta_{j+n}x_{j+n};\lambda),$$

$$g_{j+n} = g_{j+n}(t;x;\lambda) = g_{j+n}(t;\vartheta_j x_j + \vartheta_{j+n}x_{j+n};\lambda).$$

Рассмотрим матрицу

$$h_j = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial g_j}{\partial x_j} & \dfrac{\partial g_j}{\partial x_{j+n}} \\ \dfrac{\partial g_{j+n}}{\partial x_j} & 1 + \dfrac{\partial g_{j+n}}{\partial x_{j+n}} \end{pmatrix}$$

С учетом условий C) Теоремы 1, она переходит в такую:

$$h_j = \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_j \partial x_{j+n}}\right), & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_{j+n}\partial x_{j+n}} \\ -\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_j \partial x_j} \quad , & \left(1 - \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial x_j \partial x_{j+n}}\right) \end{pmatrix}$$

Введем новые переменные: $z_j = \vartheta_j x_j + \vartheta_{j+n}x_{j+n}$. В этих переменных:

$$\det h_j = \det\begin{pmatrix} \left(1+\vartheta_j\vartheta_{j+n}\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial z_j^2}\right), & \vartheta_j^2\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial z_j^2} \\ -\vartheta_{j+n}^2\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial z_j^2} & , \left(1-\vartheta_j\vartheta_{j+n}\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial z_j^2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= 1-(\vartheta_j\vartheta_{j+n})^2\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_j^2}\right)^2+\vartheta_j^2\vartheta_{j+n}^2\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_j^2}\right)^2 = 1$$

Матрица G является блочной матрицей, заполненной нулевыми матрицами (2×2), кроме главной диагонали, на которой расположены ненулевые матрицы h_j:

$$\mathrm{G}(\delta_{l,r}+\frac{\partial g_l(t;x(t);\gamma)}{\partial x_r}) = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix}$$

Учитывая свойства детерминантов матриц такого типа, убеждаемся что:

$$\det\mathrm{G} = \det\begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n}\det h_j = 1.$$

Так, что условие (17) выполнено и для $H_0(t;x;\lambda)$, определяемого (18).

Рассмотрение $H_0(t;x;\lambda)$ вида:

$$H_0(t;x;\lambda) = H_0(t;\vartheta_1 x_1+\vartheta_{1+n}x_{1+n};\vartheta_2 x_2+\vartheta_{2+n}x_{2+n};..;\vartheta_n x_n+\vartheta_{2n}x_{2n};\lambda),=$$
$$= C_{j,i}H_{0,j,i}(t;\vartheta_j x_j+\vartheta_{j+n}x_{j+n};\vartheta_i x_i+\vartheta_{i+n}x_{i+n}\lambda)+C,$$

(где $C_{j,i}$, C- произвольные функции, не зависящие от компонент x) и более сложных структур, привело к выводу, что заведомо обеспечить выполнение условия (17) возможно при условии, что все $\vartheta_j, \vartheta_{j+n}$ совпадают.

Выводы. В первых работах [3], [4], [9] по стохастической аналитической механике строились и исследовались стохастические гамильтоновы системы с винеровскими возмущениями. Как стало ясно после работ [7], [8], требование инвариантности интеграла Пуанкаре мене жесткое, чем требование инвариантности интеграла Пуанкаре-Картана. На примере теоремы о сохранении фазового объема [6], показано, что и более широкий класс [8] стохастических уравнений Ито-Гамильтона обеспечивает сохранение фазового объема. Более того, доказано, что существует класс обобщенных уравнений Ито с пуассоновскими и винеровскими возмущениями, для которых инвариантность интеграла Пуанкаре приводит к сохранению фазового объема. Это позволяет трактовать полученные утверждения как стохастические расширения теоремы Лиувилля.

Использованные источники информации:

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике /Гантмахер Ф.Р. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
2. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / Гихман И.И., Скороход А.В. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
3. Дубко В.А. Интегрирование по начальным данным, интегральный инвариант Пуанкаре и уравнения «Гамильтона» для диффузионных процессов // УМЖ, Т.33, №6. – 1981. – С.802-804. http://www.imath.kiev.ua/~umzh/Archiv/1981/6/UMZh_1981_06_0802.pdf
4. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений / Дубко В.А. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1989. – 185 с.
5. Дубко В.А. Открытые эволюционирующие системы (Некоторые аспекты математического моделирования) // Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (26-27 квіт. 2003 р.). (Ддодаток) - К., ВНЗ ВМУРоЛ, 2002.-37с. С. 14-31.
6. Дубко В.А. Условия инвариантности фазового объема, связанного с решениями обобщенного уравнения Ито // Друга міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (1-30 грудня 2003 р.). Сб.текстов докладов, Т.2 - К., ВНЗ ВМУРоЛ, 2004. С. 66-68.
7. Дубко В.А. Интегральный инвариант Пуанкаре и стохастические уравнения Гамильтона // Труды Всероссийской конференции «XXXV Дальневосточная математическая школа». – Владивосток: Изд-во ТОГУ, 2010. – С. 78-82.
8. Дубко В.А. Элементы стохастической аналитической механики . Стохастические уравнения Гамильтона // Науковий вісник АМУ. Серія «Техніка». Випуск 1(7). – 2014. – С. 47-57.
9. Bismut J.M. Mẻcanique Alẻtatorie – NevYork: Springer-Verlag,1981.553 p.