УДК 621.396.4

Тачиніна О.М.,
к.т.н., доцент,
Національний Авіаційний Університет

УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ РУХУ ГРУПИ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ З МОЖЛИВОЮ ЗМІНОЮ ЦІЛІ РУХУ В БУДЬ-ЯКИЙ МОМЕНТ ЧАСУ В ЗАДАНОМУ ІНТЕРВАЛІ

Анотація. В роботі запропоновано умови оптимальності траєкторії групи безпілотних літальних апаратів з можливою зміною цілі руху в будь-який момент часу в заданому інтервалі.

Ключові слова: складена динамічна система, оптимізація, траєкторія, управління

Тачинина Е.Н.,
к.т.н., доцент,
Национальный Авиационный Университет

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТРАЕКТОРИИ ГРУППЫ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ВОЗМОЖНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ЦЕЛИ ДВИЖЕНИЯ В ЛЮБОЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ В ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Аннотация. В работе предложены условия построения оптимальной траектории группы беспилотных аппаратов с возможным изменением цели движения в любой момент времени в заданном интервале.

Ключевые слова: составная динамическая система, оптимизация, траектория, управление.

Tachinina H.,
PhD, associated professor,
National Aviation University

THE PATH OPTIMALITY CONDITIONS OF UNMANNED AERIAL VEHICLES GROUP WITH THE PROBABLE TARGET MOTION CHANGE AT ANY INSTANT IN THE ASSIGNED PERIOD.

Annotation. The path optimality modeling conditions of unmanned aerial vehicles group with the probable target motion change at any instant in the assigned period are proposed.

Keywords: dynamic system, optimization, trajectory.

Введение. В настоящее время широкое распространение получили беспилотные летательные аппараты (БПЛА), этому способствуют новейшие достижения в области электроники, вычислительной техники, средств связи и систем управления.

Перспективными областями применения БПЛА являются: обследование территорий для поиска очагов пожаров, загрязнений, картографирование местности, поиск людей на суше и на воде, применение в военных областях.

Актуальность применения группы БПЛА. Как показывает анализ публикаций, на практике, как правило, применяются одиночные БПЛА, это в свою очередь приводит к невысокой эффективности выполнения задания, особенно если оно выполняется на большой территории. Ограничения эти связаны с тем, что сенсорные системы БПЛА имеют ограниченные зоны действия. Одним из перспективных направлений развития беспилотной авиации является групповое применение беспилотных летательных аппаратов. Преимущество применения группы БПЛА становится очевидным в задачах, в которых возможно распараллеливание сложной задачи на несколько аппаратов – например, в задаче проведении мониторинга больших территорий за короткое время, что является проблемой при использовании одиночных БПЛА.

Чтобы достичь поставленной цели, группа БПЛА должна действовать как нечто единое целое, и действия каждого отдельного БПЛА должны быть направлены на получение наибольшего группового эффекта. С этой целью предлагается группу БПЛА, выполняемую единую цель рассматривать как составную динамическую систему (СДС).

Под составной динамической системой понимается совокупность объектов (подсистем) объединенных в систему физическим смыслом задачи.

Траектории таких составных динамических систем называются ветвящимися, так как состоят из участков совместного движения составных частей и участков их индивидуального движения к цели, то есть движения по отдельным ветвям траектории. Эффективность использования этого класса систем зависит от оптимальных управлений и траекторий движения подсистем (блоков) по участкам ветвящейся траектории, а также в отыскании оптимальных моментов времени и фазовых координат, в которых происходят структурные преобразования СДС.

В настоящее время рассматриваются задачи, в которых траектории динамических систем должны удовлетворять не только основным требованиям, но и ряду альтернативных. Альтернативность свойств траектории состоит в том, что в каждый момент времени движения динамической системы по этой траектории существуют условия для другого варианта движения, цель которого исключает основную цель движения системы.

В данной статье излагаются необходимые условия оптимальности траектории составной динамической системы в условиях, когда изменение динамики системы и изменение конечной цели движения происходит не в фиксированный или оптимально подобранный момент времени, а в любой текущий момент времени, принадлежащий некоторому заданному интервалу [2,4].

Постановка задачи. Рассмотрим постановку задачи. В некоторый момент времени СДС находится в воздухе в состоянии полета. Движение составной динамической системы описывается дифференциальной системой вида

$$\dot{x} = f(x,u,t), t \in [t_0, t_f], x \in E^n, u \in \Omega \subset E^m, \qquad (1)$$

где *x, u* – векторы фазового состояния и управляющих воздействий, влияющих на движение СДС, t_0, t_f - моменты времени начала и конца движения системы в заданном интервале.

Динамическую систему необходимо перевести из некоторого произвольного состояния

$$Q_0 = \left\{ (x(t_0), t_0) : \varphi_j^{(0)}(x(t_0), t_0) \begin{cases} \le 0, j = \overline{1, r_0^{(0)}}; \\ = 0, j = \overline{r_0^{(0)} + 1, r^{(0)}}. \end{cases} \right\} \qquad (2)$$

где $r_0^{(0)} + r_0^{(0)} \langle n+1,$

$$\text{в заданное } Q_f = \left\{ (x(t_f), t_f) : \varphi_j^{(f)}(x(t_f), t_f) \begin{cases} \le 0, j = \overline{1, r_f^{(f)}}; \\ = 0, j = \overline{r_f^{(f)} + 1, r^{(f)}}. \end{cases} \right\}, \qquad (3)$$

где $r^{(f)} - r_f^{(f)} \langle n+1,$ таким образом, чтобы минимизировать критерий

$$I = S(x(t_0), t_0); x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x,u,t) dt \to \min_{u(t) \in \Omega} \qquad (4)$$

При этом в интервале времени $[t', t''] \subset [t_0, t_f]$ возможно изменение динамики движения исходной системы и ее конфигурации. С учетом этого, дифференциальная система (1) заменяется дифференциальной системой

$$\begin{aligned} &\dot{x}^0 = f^0(x^0, u^0, \eta), \eta \in [\tau, t_k^\tau], \tau \in [t', t''], \\ &x^0 \in E^n, u^0 \in \Omega^0 \subset E^{m_0}, \end{aligned} \qquad (5)$$

которая должна быть переведена из состояния $x^0(\tau) = x(\tau)$ на многообразие

$$Q_k = \left\{ (x(t_k^\tau), t_k^\tau) : \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^\tau), t_k^\tau) \begin{cases} \le 0, j = \overline{1, r_k^{(k)}}; \\ = 0, j = \overline{r_k^{(k)} + 1, r^{(k)}}. \end{cases} \right\}, \qquad (6)$$

где $r^{(k)} - r_k^{(k)} \langle n+1, t_k^\tau$ - время достижения системой (5) конечного многообразия (6) при условии, что изменение динамики движения системы и ее конфигурации произошло в момент времени τ, с учетом выполнения неравенства

$$I^0 = S^0(x^0(\tau), \tau); x^0(t_k^\tau), t_k^\tau) + \int_{\tau}^{t_k^\tau} \Phi^0(x^0, u^0, \eta) d\eta \le 0. \qquad (7)$$

Здесь скалярные функции

$S(x(t_0),t_0;\, x(t_f),t_f), S^0(x^0(\tau),\tau); x^0(t_k^\tau),t_k^\tau), \varphi_j^{(0)}(x(t_0),t_0)(j=\overline{1,r_0^{(0)}}),$

$S(x(t_0),t_0;\, x(t_f),t_f), S^0(x^0(\tau),\tau); x^0(t_k^\tau),t_k^\tau), \varphi_j^{(0)}(x(t_0),t_0)(j=\overline{1,r_0^{(0)}}),$

$\varphi_j^{(f)}(x(t_f),t_f)(j=\overline{1,r^{(f)}}), \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^\tau),t_k^\tau)(j=\overline{1,r^{(k)}})$ имеют непрерывные первые производные по всем аргументам: $f(x,u,t), f^0(x^0,u^0,\eta)$ - непрерывные вместе с матрицами $\partial f/\partial x$ и $\partial f^0/\partial x^0$ отображения $E^n\times\Omega\times E^1-E^n$ и $E^n\times\Omega^0\times E^1-E^n; \Phi(x,u,t), \Phi^0(x^0,u^0,\eta)$ -непрерывные вместе с матрицами $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi^0/\partial x^0$ отображения $E^n\times\Omega\times E^1-E^n$ и $E^n\times\Omega^0\times E^1-E^n$.

Положив, что изменение динамики движения системы и ее конфигурации возможно только в фиксированные моменты времени $t_i\in[t',t''], t_{i-1}\langle t_i, i=\overline{2,N};\ t_1=t', t_N=t''$.и воспользовавшись предельным переходом $N\to\infty, \max|t_{i-1}-t_i|\to 0$ найдем решение исходной задачи.

Новая задача формулируется следующим образом

$$I=S(x(t_0),t_0);x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}\Phi(x,u,t)dt\to \min_{\substack{u(t)\in\Omega,\\ t\in[t_0,t_f]}} \tag{8}$$

$$\dot{x}=f(x,u,t), t\in[t_0,t_f], \tag{9}$$

$$\dot{x}^0=f^0(x^0,u^0,\eta),\eta\in[t,t_k^i],\, x^0(t_i)=x(t_i)(i=\overline{1,N}), \tag{10}$$
$$(x(t_0),t_0);\in Q_0,(x(t_f),t_f)\in Q_f,$$

$$\varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^i),t_k^i)\begin{cases}\le 0,\ j=\overline{1,r_k^{(k)}};\\ =0,\ j=\overline{r_k^{(k)}+1,r^{(k)}}.\end{cases} \tag{11}$$

$$S^0(x^0(t_i),t_i);x^0(t_k^i),t_k^i)+\int_{t_i}^{t_k^i}\Phi^0(x^0,u^0,\eta)d\eta\le 0,(i=\overline{1,N}), \tag{12}$$

$$x\in E^n, x^0\in E^n, u\in\Omega\subset E^m, u^0\in\Omega^0\subset E^{m_0}. \tag{13}$$

В силу конечного значения *N,* задача (8)-(13) предъявляет менее жесткие требования к допустимому процессу $x(t),u(t),x^0(\eta),\, u^0(\eta),t_0,t_f,t_k^i$, чем задача (1)-(7) к процессу $x(t),u(t),x^0(\eta),\, u^0(\eta),t_0,t_f,t_k^\tau$.

Поэтому каждый допустимый процесс задачи (1)-(4) будет допустимым и в задаче (8)-(13) [3, 5].

Зафиксируем N и с использованием постоянных скалярных $\xi^N, \xi_{0j}^N(j=\overline{1,r^{(0)}}),\, \xi_{fj}^N(j=\overline{1,r^{(f)}}), \nu_i^N, \mu_{ij}^N(j=\overline{1,r^{(k)}})$ и функциональных векторных $\lambda^N(t), \lambda_i^{0N}(\eta)$ множителей Лагранжа записываем расширенный критерий оптимизации новой задачи [1, 5]

$$I = \xi^N \left\{ S(x(t_0),t_0); x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x,u,t)dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^{NT}(t)\left[f(x,u,t) - \dot{x} \right] dt \right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N \varphi_j^{(0)}(x(t_0),t_0) + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{fj}^N \varphi_j^{(f)}(x(t_f),t_f) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \nu_i^N \left[\begin{array}{l} S^0(x^0(t_i),t_i); x^0(t_k^i),t_k^i) + \int_{t_i}^{t_k^i} \Phi^0(x^0,u^0,\eta)d\eta + \\ +^N \int_{t_i}^{t_k^i} \lambda^{0NT}(\eta)\left[f^0(x^0,u^0,\eta) - \dot{x}^0 \right] d\eta \end{array} \right] + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} \mu_{ij}^N \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^i),t_k^i \right\},$$

где $\xi^N + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{fj}^N + \sum_{i=1}^{N} \left[\nu_i^N + \sum_{j=1}^{r^{(k)}} \mu_{ij}^N \right] = 1,\ \xi^N \geq 0, \xi_{0j}^N \geq 0, \xi_{fj}^N \geq 0, \nu_i^N \geq 0, \mu_{ij}^N \geq 0,$

$$\xi_{0j}^N \varphi_j^{(0)}(x(t_0),t_0) = 0, (j = \overline{1, r^{(0)}}),\ \xi_{fj}^N \varphi_j^{(f)}(x(t_f),t_f) = 0, (j = \overline{1, r^{(f)}}),$$

$$\mu_{ij}^N \varphi_j^{(k)}(x^0(t_k^i),t_k^i) = 0 (j = \overline{1, r^{(k)}}),\ \hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta) \hat{t}_0, \hat{t}_f, \hat{t}_k^i.$$

Согласно [1] процесс $\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}^0(\eta), \hat{u}^0(\eta) \hat{t}_0, \hat{t}_f, \hat{t}_k^i$ доставляет минимум функционалу (8) в смысле необходимых условий, если существуют решения $\lambda^N(t), \lambda_i^{0N}(\eta)$ сопряженных векторных уравнений

$$\xi^N \left[\dot{\lambda}^N(t) + \partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)/\partial x\big|_{\wedge} \right] = 0, \tag{14}$$

$$\nu_i^N \left[\dot{\lambda}_i^{0N}(\eta) + \partial H^0(x^0(\eta),u^0(\eta),\lambda_i^{0N}(\eta),\eta)/\partial x^0\big|_{\wedge} \right] = 0, \tag{15}$$

Такие, что справедливы следующие условия.

(1^0) Трансверсальности:

$$\xi^N \left[\partial S / \partial x(t_0)_{\wedge} + \lambda^N(\hat{t}_0) \right] + \partial\varphi^{(0)T} / \partial x(t_0)\big|_{\wedge} \xi_0^N = 0, \tag{16}$$

$$\xi^N \left[\partial S / \partial x(t_0)_{\wedge} - H(\hat{x}(\hat{t}_0), \hat{u}(\hat{t}_0), \lambda^N(\hat{t}_0), \hat{t}_0 \right] + \sum_{j=1}^{r^{(0)}} \xi_{0j}^N \partial\varphi_j^{(0)} / \partial t_0\big|_{\wedge} = 0, \tag{17}$$

$$\xi^N \left[\partial S / \partial x(t_f)_{\wedge} - \lambda^N(\hat{t}_f) \right] + \partial\varphi^{(f)T} / \partial x(t_f)\big|_{\wedge} \xi_f^N = 0, \tag{18}$$

$$\xi^N \left[\partial S / \partial t_f\big|_{\wedge} + H(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{u}(\hat{t}_f), \lambda^N(\hat{t}_f), \hat{t}_f \right] + \sum_{j=1}^{r^{(f)}} \xi_{fj}^N \partial\varphi_j^{(f)} / \partial t_f \Big| = 0, \tag{19}$$

$$\nu_i^N \left[\partial S^0 / \partial x^0(t_0^i)\big|_{\wedge} - \lambda_k^{0N}(\hat{t}_k^i) \right] + \partial\varphi^{(k)T} / \partial x(t_k^i)\big|_{\wedge} \mu_i^N = 0, \tag{20}$$

$$\nu_i^N\left[\partial S^0/\partial t_k^i\Big|_{\wedge}+H^0(\hat{x}^0(\hat{t}_k^i),\hat{u}^0(\hat{t}_k^i),\lambda^{0N}(\hat{t}_k^i),\hat{t}_k^i)\right]+\sum_{j=1}^{r^{(k)}}\mu_{ij}^N\partial\varphi_j^{(k)}/\partial t_k^i=0, \quad (21)$$

(2^0) Скачка:

$$\xi^N\left[\lambda^N(t_i+0)-\lambda^N(t_i-0)\right]+\nu_i^N\left[\lambda_i^{0N}(t_i+0)+\partial S^0/\partial x^0(t_i)\Big|_{\wedge}\right]=0, \quad (22)$$

(3^0) Минимума гамильтониана :

$$H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\lambda^N(t),t)=\min_{u(t)\in\Omega,\,t\in\left[t_0,t_f\right]}H(\hat{x}(t),u(t),\lambda^N(t),t) \quad (23)$$

$$H^0(\hat{x}^0(\eta),\hat{u}^0(\eta),\lambda^{0N}(\eta),\eta)=\min_{u^0(\eta)\in\Omega^0,\,\eta\in\left[t_i,t_k^i\right]}H^0(\hat{x}^0(\eta),u^0(\eta),\eta). \quad (24)$$

(4^0) Нетривиальности, неотрицательности, дополняющей нежесткости:

$$\xi^N+\sum_{j=1}^{r^{(0)}}\xi_{0j}^N\sum_{j=1}^{r^{(f)}}\xi_{fj}^N+\sum_{i=1}^{N}\left[\nu_i^N+\sum_{j=1}^{r^{(k)}}\mu_{ij}^N\right]=1, \quad (25)$$

$$\xi^N\ge 0,\xi_{0j}^N\ge 0,\xi_{fj}^N\ge 0,\nu_i^N\ge 0,\mu_{ij}^N\ge 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}&\xi_{0j}^N\varphi_j^{(0)}(\hat{x}(\hat{t}_0),\hat{t}_0)=0,(j=\overline{1,r^{(0)}}),\\ &\xi_{fj}^N\varphi_j^{(f)}(\hat{x}(\hat{t}_f),\hat{t}_f)=0,(j=\overline{1,r_f^{(f)}}),\end{aligned} \quad (27)$$

$$\nu_i^N=\begin{cases}=0,\\ \ge 0,\end{cases}\mu_{ij}^N\varphi_j^{(k)}(\hat{x}^0(\hat{t}_k^i),\hat{t}_k^i)=0\ (j=\overline{1,r_k^{(k)}}), \quad (28)$$

где “^” означает оптимальные переменные и параметры;

$\xi_0^{NT}=\left[\xi_{01},\ldots,\xi_{0N}\right],\ \xi_f^{NT}=\left[\xi_{f1},\ldots,\xi_{fN}\right],\ \mu_i^{NT}=\left[\mu_{i1},\ldots,\xi_{iN}\right],$

$H(x(t),u(t),\lambda(t),t)=\Phi(x(t),u(t)+\lambda^{NT}(t)f(x(t),u(t),t),$

$H^0(x^0(\eta),u^0(\eta),\lambda^0(\eta),\eta)=\Phi^0(x^0(\eta),u^0(\eta),\eta)+\lambda^{0NT}(\eta)f^0(x^0(\eta),u^0(\eta),\eta).$

Таким, образом, для оптимальности процесса $x(t)$, $u(t)$, $x^0(\eta)$, $u^0(\eta)$, t_0, t_j, $t_k^\tau, t\in[t_0,t_f], \eta\in[\tau,t_k^\tau], \tau\in[t',t'']\subset[t_0,t_f]$ необходимо существование: неотрицательных мер $\tau\in[t',t'']\subset[t_0,t_f]$, неотрицательных чисел $\xi\ ,\xi_{0j}(j=\overline{1,r^{(0)}}),\xi_{fj}(j=\overline{1,r^{(f)}})$, неотрицательных мер $\nu(\tau)$ и $\mu_j(\tau)(j=\overline{1,r^{(k)}})$, сосредоточенных на множестве $N=\{\tau:\tau\in[t',t'']\}$, векторной функции $\lambda(t)$ ограниченной вариации, являющейся решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{\lambda}(t)=-\partial H/\partial x\Big|_{\wedge}$$

для $t\in[t_0,t_f]/[t',t'']$ и векторной функции $\lambda_\tau^0(t)$ ограниченной вариации, являющейся решением уравнения

$$\dot{\lambda}_\tau^0(\eta)=-\partial H^0/\partial x^0\Big|_{\wedge},\ \eta\in[\tau,\tau_k^\tau],\quad \tau\in[t',t''],$$

Выводы. Таким образом, в данной статье изложены необходимые условия построения оптимальной траектории группы БПЛА с возможным изменением цели движения в любой момент времени в заданном интервале. Предложенный подход к построению оптимальной траектории обладает той особенностью, что представляет группе БЛА альтернативный вариант движения по траектории в любой текущий момент времени, принадлежащий некоторому заданному интервалу с соблюдением заданных критериев в случае изменения динамики ее движения и конфигурации.

Использованные источники информации:
1. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. –.М.: Радио и связь, 1987.–400 с.
2. Лысенко А.И. Оптимизация траектории составной динамической системы с текущим моментом разделения// Техническая кибернетика. – Киев: Высшая школа. 1990. – Вып.. – С. 24-31.
3. Лысенко А.И. Моделирование оптимального движения составной системы// Электронное моделирование. – 1989. – Т. 11. № 4. – 80-83.
4. Лысенко А.И. Модельная задача выбора оптимальной программы движения составной транспортной системы// Автоматика. – 1988, № 6, - С. 62-64.
5. Лысенко А.И. Необходимые условия оптимальности траектории составной динамической системы// Авиационные приборы, навигационные системы жизнедеятельности экипажей Л.А. – М.: ВВИА им. проф. Жуковского, 1988. –С. 82-95.

References:
1. D. Bertsekas. Conditional optimization and Lagrange multipliers method. -.M .: Radio and Communications, 1987.- 400 p.
2. Lysenko A.I. Trajectory optimization component of a dynamic system with the current moment of separation // Technical Cybernetics. - Kiev: Graduate School. 1990. - Vol .. - P. 24-31.
3. Lysenko A.I. Simulation of optimal motion component system // Electronic simulation. - 1989. - T. 11. № 4. - 80-83.
4. Lysenko A.I. A model problem of choosing the optimal program of motion of the transport system // Automation. - 1988, № 6, - P. 62-64.
5. Lysenko A.I. Necessary conditions for the optimality of the trajectory integral dynamic system // Aviation devices, navigation systems crew life LA - M .: VVIA them. prof. Zhukovsky, 1988. P. 82-95.

Рецензент: Лисенко О.І.