

УДК 621.311

**Лебедянцев В.В.,  
Сметанин П.В.,  
Лысенко А.А.**  
НТУУ «КПИ»

### **ТЕНЗОРНАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО КАНАЛА СВЯЗИ**

*Для описания нелинейного канала связи предполагается геометрическая (тензорная) модель в виде криволинейной поверхности, позволяющая свести изучение свойств нелинейного канала к изучению свойств криволинейной поверхности. Описан метод оптимизации сигналов для нелинейного канала, базирующийся на использовании метрического тензора и геодезических линий.*

*Ключевые слова: тензорная модель, нелинейный канал связи*

**Лебедянцев В.В.,  
Сметанин А.В.,  
Лысенко А.А.**  
НТУУ «КПИ»

### **ТЕНЗОРНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ**

*Для опису нелінійного каналу зв'язку передбачається геометрична (тензорних) модель у вигляді криволінійної поверхні, що дозволяє звести вивчення властивостей нелінійного каналу до вивчення властивостей криволінійної поверхні. Описано метод оптимізації сигналів для нелінійного каналу, який базується на використанні метричного тензора та геодезичних ліній.*

*Ключові слова: тензорна модель, нелінійний канал зв'язку*

**Lebedyantsev V.V.,  
Smets A.V.,  
Lysenko A.A.**  
NTU "KPI"

### **THE TENSOR OF THE NONLINEAR MODEL OF THE COMMUNICATION CHANNEL**

*To describe nonlinear communication channel is assumed geometric (tensor) model in the form of a curved surface, which allows to reduce the study of nonlinear properties of the channel to the study of the properties of a curved surface. A method for optimizing the signal for the nonlinear channel, based on the use of the metric tensor and the geodesic lines.*

*Keywords: tensor model, nonlinear communication channel*

В последние годы в некоторых системах связи начинают применять каналы связи, обладающие при достаточной мощности входных сигналов, нелинейно-дисперсионными свойствами. К таким каналам можно отнести, например, гидроакустические, оптоволоконных, каналы на базе кабелей с ферромагнитным покрытием жил. Установлено, что в такого рода каналах возможно существование солитонов - сигналов с особыми свойствами [1]. В частности, при минимальных энергетических потерях скорость распространения солитонов зависит от их энергии, то есть может

регулюються. Солітони при столкновениях ведуть себе подобно частицам - могут обмениваться энергией, в результате чего солітоны с меньшей энергией при попутном взаимодействии начинают двигаться быстрее. Эти и другие свойства солітонов могут быть использованы для решения целого ряда задач в системах передачи информации, что определяет актуальность исследования такого рода каналов.

Традиционный метод описания нелинейно-дисперсионных каналов базируется на использовании нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1]. Однако методы решения этих уравнений весьма сложны и не обладают наглядностью, что затрудняет внедрение результатов теории в практику. Поэтому имеется потребность в разработке других, свободных от указанных недостатков методов описания нелинейных каналов (и вообще нелинейных систем). Рассмотрим один из таких методов, обладающий, с одной стороны, геометрической наглядностью, с другой стороны, использующий хорошо разработанный математический аппарат дифференциальной геометрии и тензорного исчисления, базирующийся на матричной технологии и, следовательно, удобно реализуемый на мультипроцессорных ЭВМ. Основой этого метода является представление модели нелинейно-дисперсионного канала (в общем случае нелинейной системы) в виде криволинейной поверхности, метрические или иные свойства которой отображают физические свойства канала (системы). Описание такой модели начнем с задания физической модели нелинейного канала.

Зададим физическую модель нелинейно-дисперсионного канала в виде нелинейного трансверсального фильтра (рис. 1). Выбор такой модели обусловлен ее универсальностью. Длина линии задержки определяется степенью дисперсии линейного сигнала во времени, то есть памятью канала, нелинейные свойства заданы нелинейными преобразователями в отводах. Экспериментальное определение характеристик преобразователей можно осуществить, например, по семейству откликов канала  $U_{\text{вых}}(U_{\text{вх}}, t)$  на короткие импульсные воздействия  $U_{\text{вх}}(t)$  различной амплитуды и знака в пределах динамического диапазона канала. Длительность импульсных воздействий должна соответствовать интервалу дискретизации входных сигналов  $\Delta t$ , определяемого в соответствии с теоремой Котельникова. Зависимость коэффициента передачи  $i$ -го нелинейного преобразователя от входного напряжения можно определить по семейству  $U_{\text{вых}}(U_{\text{вх}}, t)$  следующим образом:

$$g_i(u_{\text{вх}}) = u_{\text{вых}}(u_{\text{вх}}, i \cdot \Delta t) / u_{\text{вх}}$$

Таким образом, нелинейные преобразователи рассматриваются как множители временных отсчётов входного сигнала на множители  $g_i(u_{\text{вх}})$ , зависящие от их места расположения в модели и от величины входного

отсчета. Количество звеньев в линии задержки определяется количеством временных отсчетов самого продолжительного из импульсных откликов.

С учетом структуры модели канала выражение для отсчетов  $S'_j$  выходного сигнала можно записать через отсчеты  $S_i$  входного сигнала следующим образом:

$$S'_j(j, \Delta t) = \Delta t \sum_{i=1}^j s_i g_j(s_i), \quad (1)$$

что является дискретным аналогом нелинейного интеграла свертки:

$$S'(\tau) = \int_0^{\tau} s(t) \cdot g[s(t), \tau - t] dt$$

Для дальнейших исследований выражение (1) удобно записать в матричной форме

$$\vec{S}'(\vec{S}) = \vec{S} \cdot G(\vec{S}), \quad (2)$$

где  $\vec{S}'$  и  $\vec{S}$  - векторы, элементы которых являются соответственно отсчеты выходного и входного сигналов.

Поскольку (1) представляет собой операцию свертки для дискретных моментов времени, то  $G(\vec{S})$  будет иметь ленточную (теплицеву) структуру с элементами  $g_{j-i}(s_i)$ . Поясним сказанное простейшим примером.

Пусть входной сигнал отображается двумя ( $m=2$ ) временными отсчетами  $s_1$  и  $s_2$ , а количество отсчетов в импульсных откликах  $l = 2$ . Тогда число выходных сигналов  $n = m + l - 1 = 3$ . Следовательно, матрица  $G(\vec{S})$  будет иметь размерность  $m \times n = 2 \times 3$ . Для простоты предположим, что в первом нелинейном преобразователе отсчёты возводятся в квадрат, поэтому  $g_1(u) = s_i^2$ , а во втором умножаются на 1 т.е.  $g_2(u) = 1$ . Тогда связь между отсчетами выходного и входного сигнала в матричной форме можно записать:

$$\vec{S}'(\vec{S}) = \vec{S} \cdot G(\vec{S}) = \|s_1, s_2\| \times \Delta t \cdot \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ 0 & s_2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta t \cdot \begin{vmatrix} s_1^2 & s_1 + s_2^2 & s_2 \end{vmatrix}$$

Перепишем  $\vec{S}'(\vec{S})$  в виде вектор столбца:

$$\vec{S}'(\vec{S}) = \begin{vmatrix} \vec{S}'_1(\vec{S}) \\ \vec{S}'_2(\vec{S}) \\ \vec{S}'_3(\vec{S}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1^2 + 0 \cdot S_2 \\ S_1 + S_2^2 \\ 0 \cdot S_1 + S_2 \end{vmatrix} \Delta t$$

(3)

Как видно из последнего выражения, отсчеты выходного сигнала являются некоторыми функциями вектора входного сигнала.

В общем случае, если  $\vec{S}_i'(\vec{S})$  являются непрерывными и дифференцируемыми функциями  $m$ -мерного векторного аргумента  $S$ , то (2) параметрически задает в  $n$ -мерном пространстве некоторое многообразие  $S$  [2]. Известно также, что многообразие геометрически может быть представлено  $m$ -мерной криволинейной поверхностью погруженной в  $n$ -мерное пространство. В рассматриваемом примере уравнение криволинейной поверхности можно получить из (3), выражая  $S_1$  и  $S_2 s_1'$  и  $s_3'$  и подставляя эти значения в  $s_2'$ :  $\sqrt{s_1'} - s_2' + (s_3')^2 = 0$ . Изображение части этой поверхности для  $s_1 \geq 0$  и  $s_2 \geq 0$  приведено на рис. 2.

Поскольку  $s_i'$  является временными отсчётами выходного сигнала, то, очевидно, ортам  $3^x$ -мерного пространства, в которое погружена криволинейная поверхность, соответствуют функции Котельникова. Это пространство уместно назвать пространством представления и в силу ортогональности функции Котельникова оно будет иметь прямоугольную декартову систему координат, т.е. будет евклидовым.

Важно подчеркнуть, что  $m$ -мерная криволинейная поверхность, погруженная в  $n$ -мерное пространство представления выделяет из  $n$ -мерного множества некоторое  $n < m$ -мерное подмножество возможных выходных сигналов. Другими словами, какой бы ни была форма входных сигналов, соответствующие им выходные сигналы имеют отсчеты, удовлетворяющие единому уравнению криволинейной поверхности. Этот вывод имеет важное практическое значение, поскольку, например, указывает на способ оценки качества сигнала на выходе нелинейного канала: если уравнение для отсчетов не выполняется, то это означает, что сигнал поражен помехой. По расстоянию от точки, отображающей сигнал, до поверхности  $S$  можно судить о величине помехи.

Покажем теперь, что свойства криволинейной поверхности имеют объективный характер, т.е. обусловлены свойствами модели канала и не зависят от базиса, используемого для представления входных и выходных сигналов, выбор которого в известной мере субъективен.

Зафиксировав значения первого отсчёта  $s_1$  и варьируя  $s_2$ , а затем наоборот варьируя  $s_1$  при фиксированных значениях  $s_2$ , на поверхности  $S$  можно построить сеть криволинейных координатных линий  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  (рис. 2). Тогда каждой точке поверхности  $S$  будут соответствовать два набора чисел:

1.  $\{s_1, s_2\}$  - координаты точки в криволинейном (собственном) базисе  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  поверхности;

2.  $\{s'_1, s'_2, s'_3\}$  - координаты точки в декартовой прямоугольной системе координат  $\{\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3\}$  пространства представления.

Следовательно, преобразование каналом связи входного сигнала, задаваемого набором отсчетов  $\{s_1, s_2\}$  в выходной отображаемый отсчетами  $\{s'_1, s'_2, s'_3\}$ , можно рассматривать как операцию пересчета криволинейных координат точки поверхности  $S$  в декартовы прямоугольные координаты. Эту операцию и отображает выражение (2). При такой интерпретации воздействия канала на передаваемые сигналы основным становится понятие «состояние канала», отображаемое точкой поверхности  $S$ , а понятие «входной (выходной) сигналы» становится относительными, производными от используемой для отображения системы координат. В этой связи  $m$ -мерную поверхность пространства выходных сигналов  $S$  уместно назвать «пространство состояний канала» (или системы в общем случае).

Итак, геометрическая модель нелинейно-дисперсионного канала представляет собой  $m$ -мерную криволинейную поверхность (пространство состояний), погруженную в  $n$ -мерное пространство представления.

Теперь перейдем к собственно доказательству независимости свойств криволинейной поверхности от используемого для ее представления базиса. Для этого следует показать, что матрицы касательных базисов в некоторой точке этой поверхности при замене системы координат преобразуются по тензорному закону. Принцип доказательства этого утверждения известен [3]. Остается лишь ввести в него физические понятия, относящиеся к рассматриваемой задаче.

Вначале построим матрицу  $A$ , состоящую из векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  касательного базиса для некоторой рассматриваемой точки поверхности  $S$ . Вектор  $\vec{a}_1$  касается координатной линии  $\varphi_1$  вектор  $\vec{a}_2$  - линии  $\varphi_2$ .

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{s}'}{\partial s_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s'_1}{\partial s_1} \\ \frac{\partial s'_2}{\partial s_1} \\ \frac{\partial s'_3}{\partial s_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial s'_n}{\partial s_1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{s}'}{\partial s_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s'_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial s'_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial s'_3}{\partial s_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial s'_n}{\partial s_2} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_m = \frac{\partial \vec{s}'}{\partial s_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s'_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial s'_m}{\partial s_m} \\ \frac{\partial s'_2}{\partial s_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial s'_n}{\partial s_m} \end{pmatrix};$$

$$A = \|\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_m\| = \frac{\partial \vec{s}'}{\partial \vec{s}^T}$$

Пусть теперь входной сигнал задан вектором спектральных коэффициентов  $\vec{c}$ , например, в базисе гармонических функций кратных частот. Меняя значения спектральных коэффициентов, на поверхности  $S$  можно построить новую криволинейную систему координат  $\{\varphi_1', \varphi_2', \dots, \varphi_m'\}$  с соответствующим касательным базисом в рассматриваемой точке:

$$B = \|\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \dots \quad \vec{b}_m\| = \frac{\partial \vec{s}'}{\partial \vec{c}^T}.$$

Выражая прежние криволинейные координаты  $s_1, s_2$  и  $s_m$  через новые  $c_1, c_2, \dots, c_m$  можно записать, что  $\vec{s}'(\vec{c}) = \vec{s}'[\vec{s}(\vec{c})]$ . Дифференцируя это равенство как сложную векторную функцию векторных аргументов получим:

$$\frac{\partial \vec{s}'}{\partial \vec{c}^T} = \frac{\partial \vec{s}'}{\partial \vec{s}^T} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{c}^T} \quad \text{или} \quad B = A \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{c}^T}.$$

Как видно отсюда, касательный базис при переходе от одной системы координат к другой преобразуется по тензорному закону. Значит, в каждой своей точке рассматриваемая криволинейная поверхность представляет собой тензор, т.е. геометрический объект, свойства которого не зависят от используемой для его представления системы координат [2].

При этом вся поверхность пространства состояний  $\mathcal{S}$  является тензорным полем.

Тензорный характер данной геометрической модели нелинейного канала позволяет существенно упростить анализ свойств канала (системы), сводя его к исследованию только внутренних геометрических свойств поверхности  $S$ , которые выражаются величинами, не зависящими от используемой для отображения состояний канала системы координат.

Как известно, внутренняя геометрия поверхности может быть описана посредством метрического тензора многообразия, который равен произведению прямой и транспонированной матриц касательного базиса в рассматриваемой точке  $\vec{s}$  многообразия  $S$ :  $M(\vec{s}) = A(\vec{s})A^T(\vec{s})$ . Посредством метрического тензора определяется квадрат расстояния  $dr^2$  между бесконечно близкими точками многообразия:  $dr^2 = d\vec{s} \cdot M(\vec{s}) \cdot d\vec{s}^T$ , где  $d\vec{s}$  - вектор разности координат этих точек в криволинейной системе координат.

Таким образом, метрический тензор задает метрику на многообразии, благодаря чему оно превращается в риманово пространство.

В этом пространстве можно вычислить расстояние и между неблизкими точками. В римановом пространстве расстояние определяется длиной кривой минимальной длины, соединяющей заданные точки. Кривые минимальной длины называются геодезическими. Естественно предложить в качестве меры различия состояний канала (сигналов) длиной геодезической кривой, соединяющей точки, отображающие состояния канала. С помощью метрического тензора определяется кривизна поверхности в данной точке [2], характеризующая степень нелинейности канала при заданном входном сигнале. Размерность метрического тензора, разумеется, определяет размерность пространства состояний канала.

Покажем практическое значение метрического тензора и геодезической линии на примере решения задачи определения сигналов, проходящих через нелинейно-дисперсионный канал с минимальными энергетическими потерями. В частности, таким свойством обладают солитоны [1].

Выразим критерий оптимизации в следующем виде:

$$h(\vec{s}) = \frac{E'(\vec{s})}{E(\vec{s})} = \frac{\vec{s}' \cdot \vec{s}'^T}{\vec{s} \cdot \vec{s}^T} = \frac{\vec{s} \cdot G(\vec{s}) \cdot G^T(\vec{s}) \cdot \vec{s}'^T}{\vec{s} \cdot \vec{s}^T} = \frac{\vec{s} \cdot K(\vec{s}) \cdot \vec{s}'^T}{\vec{s} \cdot \vec{s}^T} \quad (4)$$

Здесь  $E$  и  $E'$  представляют собой энергии сигнала соответственно на входе и выходе канала. Энергии определены как суммы квадратов коэффициентов разложения входного выходного сигналов в ортонормированных базисах.

Последняя часть (4) представляет собой «нелинейное» отношение Релея, поскольку матрица  $K$  зависит от  $S$ . Известно, что максимум отношению Релея доставляет первый собственный вектор матрицы  $K$  соответствующий ее наибольшему собственному числу. Однако зависимость матрицы  $K$  от входного сигнала существенно затрудняет поиск первого собственного вектора, который в идеале должен совпадать с входным сигналом. При этом входной сигнал будет изменяться каналом минимально возможным образом [5] (устойчивость формы является вторым свойством солитонов).

Упростить решение поставленной задачи позволяет использование метрического тензора. Действительно, величина  $h(\vec{s})$  представляет собой скалярную функцию векторного аргумента, т.е. скалярное поле. Производная скалярного поля в точке  $S$  по некоторому направлению  $d\vec{s}$  равна:

$$\frac{dh(\vec{s})}{d\vec{s}} = \frac{d\vec{s}' \cdot d\vec{s}'^T}{d\vec{s} \cdot d\vec{s}^T} = \frac{d\vec{s} \cdot A(\vec{s}) \cdot A^T(\vec{s}) \cdot d\vec{s}'^T}{d\vec{s} \cdot d\vec{s}^T} = \frac{d\vec{s} \cdot M(\vec{s}) \cdot d\vec{s}'^T}{d\vec{s} \cdot d\vec{s}^T} \quad (5)$$

Данное выражение также является нелинейным отношением Релея. Значит, первый собственный вектор  $\vec{p}_{1M}(\vec{s})$  матрицы метрического тензора является градиентом скалярного поля  $h(\vec{s})$ , а количественное значение производной  $h(\vec{s})$  вдоль вектора  $\vec{p}_{1M}(\vec{s})$  равно первому максимальному собственному числу  $\lambda_1(\vec{s})$  матрицы метрического тензора указывает направление скорейшего роста скалярного поля  $h(\vec{s})$ . Следовательно, двигаясь из некоторой точки  $\vec{s}$  в направлении, задаваемом вектором  $\vec{p}_{1M}(\vec{s})$  можно кратчайшим путём достигнуть максимума  $h(\vec{s})$ . Очевидно, что данное направление будет соответствовать геодезической линии максимальной длины, проведенной на поверхности многообразия  $S$  через данную точку  $\vec{s}$ . Действительно, вдоль этой линии бесконечно малым приращениям криволинейных координат  $|d\vec{s}|$  будут соответствовать наибольшие приращения расстояния  $dr$ :

$$\frac{dr^2}{|d\vec{s}|^2} = \frac{d\vec{s} \cdot M(\vec{s}) \cdot d\vec{s}^T}{d\vec{s} \cdot d\vec{s}^T} = \frac{d\vec{p}_{1M} \cdot M(\vec{s}) \cdot d\vec{p}_{1M}^T}{d\vec{p}_{1M} \cdot d\vec{p}_{1M}^T} = \lambda_1(\vec{s}_{\text{опт}})$$

Таким образом, приведенный пример показывает, как использование тензорной модели нелинейного канала позволило упростить и сделать наглядным решение сложной нелинейной оптимизационной задачи.

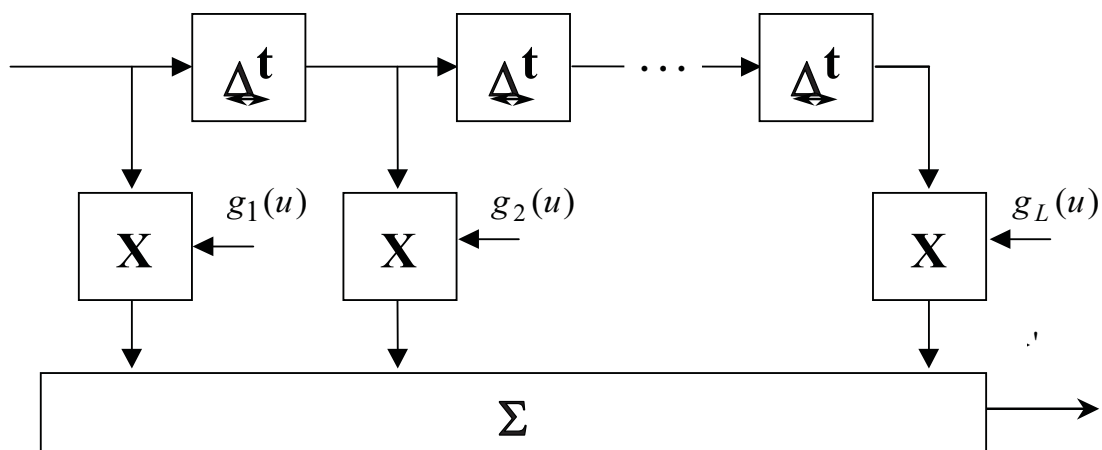


Рис.1. Модель нелинейно-дисперсионного канала в виде трансверсального фильтра



***Использованные источники информации:***

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. пер. с англ, под ред. Л.А.Островского, М.И.Рабиновича. - М.: Сов. радио, 1977. - 368 с.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: Наука, 1964. - 664 с.
3. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. - М.: Наука, гл. ред физ.-мат. Лит. 1988. - 280 с.
4. Ланкастер Л. Теория матриц. - М.: Наука 1978. - 280 с.
5. Лебедев В.В. О некоторых свойствах оптимизированных сигналов // Обработка информации в системах связи: сб. науч. тр. учеб, ин-тов связи / ЛЭИС. - Л., 1981. - С. 71-76.

***References:***

1. Skott E. Volnyv aktyvnykh nelyneynykh sredakh v prylozheny kelektronyke. per. sanhl, podred. L.A.Ostrovskoho, M.Y.Rabynovycha. - M.: Sov. radyo, 1977. - 368 s.
2. Rashevskiy P.K. Rymanova heometrya y tenzorniy analiz. - M.: Nauka, 1964. - 664 s.
3. Velychenko V.V. Matrychno-heometrycheskye metody v mekhanyke s prylozheniyamy k zadacham robototekhnuky. - M.: Nauka, hl. red fyz.-mat. Lyt. 1988. - 280 s.
4. Lankaster L. Teoryia matryts. - M.: Nauka 1978. - 280 s.
5. Lebediantsev V.V. O nekotorykh svojstvakh optymyzyrovannykh syhnalov // Obrabotka ynformatsyy v systemakh sviazy: sb. nauch. tr. ucheb, yn-tov sviazy / LEYS. - L., 1981. - S. 71-76.

*Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Дубко В.О.*