

УДК 519.85:629.735(043.2)

Лысенко А. И.,

д.т.н., профессор,

Национальный технический университет Украины «КПИ»

Тачинина Е.Н.,

к.т.н., доцент,

Национальный Авиационный Университет

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
КВАДРОКОПТЕРА**

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы математического моделирования движения квадрокоптера. Предложены расчетная схема и математическая модель пространственного движения квадрокоптера, учитывающая кинематические связи, механические процессы в системе вращающихся винтов квадрокоптера, а также алгоритмы выработки управляющих воздействий.

Ключевые слова: квадрокоптер, управление, математическая модель.

Лисенко О. І.,

д.т.н., професор,

Національний технічний університет України «КПІ»

Тачиніна О.М.,

к.т.н., доцент,

Національній Авіаційний Університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ КВАДРОКОПТЕРА

Анотація. В роботі розглянуті питання математичного моделювання руху квадрокоптера. Запропоновані розрахункова схема і математична модель просторового руху квадрокоптера, що враховує кінематичні зв'язки, механічні процеси в системі обертових гвинтів квадрокоптера, а також алгоритми вироблення керуючих впливів.

Ключові слова: квадрокоптер, управління, математична модель.

Lysenko O.,

Doctor of Science, engineer, professor

Natsionalny Tehnichny Universitet Ukraine «KPI»

Tachinina H.,

PhD, associated professor,

National Aviation University.

MATHEMATICAL MODELING OF QUADCOPTER MOTION

Abstract. The paper considers the problem of quadcopter motion mathematical modeling. The design diagram and mathematical model of quadcopter spatial motion with regard to kinematic relations, mechanical processes in the system of quadcopter rotating propellers, as well as the algorithms of generating the control actions are proposed.

Keywords: quadcopter, control, mathematical model

Введение. В последние десятилетия, в связи с успешным развитием области микромеханики и микроэлектроники возрос интерес к использованию компактных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА)

– квадрокоптеров, линейные размеры и масса которых составляют 0,1 - 0,5 метра и 0,1 - 0,5 кг соответственно.

Такие преимущества квадрокоптеров, как дешевизна, высокая грузоподъемность (соизмерима с массой самого аппарата), простота управления открывают широкие перспективы по применению этих аппаратов для дистанционного видеонаблюдения, картографирования, радиоразведки и радиоподавления, а также других гражданских и военных применений.

Квадрокоптер является разновидностью летательного аппарата с четырьмя несущими винтами, у которого два противоположных винта вращаются в одном направлении, и два других – в обратном, при этом маневры осуществляются путем изменения скорости вращения винтов.

Управляемый четырьмя разнесенными винтами квадрокоптер представляет собой нестабильную динамическую систему, которая в силу нелинейности математической модели должна быть стабилизирована соответствующими управляющими алгоритмами. В связи с этим, построение математической модели управления квадрокоптером, которая в высокой степени точности соответствует реальному объекту, являются чрезвычайно актуальной задачей.

Математическая модель квадрокоптера.

Рассмотрим квадрокоптер с известными физическими параметрами, движением, которого можно управлять, изменяя скорости вращения винтов. Для формального описания динамики движения квадрокоптера как твердого объекта в трёхмерном пространстве необходимо ввести в рассмотрение две системы координат (СК):

1. Неподвижную систему координат (НСК), в качестве которой выступает нормальная земная система координат с заданными перпендикулярными друг другу координатными осями $O_g X_g$, $O_g Y_g$, и $O_g Z_g$, причем ось $O_g Z_g$ направлена противоположно вектору силы тяжести.

2. Связанную с квадрокоптером систему координат (ССК), центр которой размещен в центре масс аппарата, а оси $O X$, $O Y$, и $O Z$ параллельны и сонаправлены с осями неподвижной системы. Угловое положение аппарата зададим тремя углами Эйлера: углами крена φ , тангажа θ и рыскания ψ , определяющими вращение вокруг осей $O X$, $O Y$, и $O Z$ соответственно.

Основываясь на ранее рассмотренных системах координат можно утверждать о том, что квадрокоптер имеет шесть степеней свободы, а именно три линейных координаты $[x; y; z]$ и три угловых $[\theta, \varphi, \psi]$. В качестве управляющих каналов выступают скорости вращения роторов (рис. 1), которые создают динамику движения БПЛА в пространстве. Согласно [1–3], возникающие в результате подачи управляющих воздействий силы и моменты пропорциональны квадрату угловых скоростей винтов Ω^2 . Поэтому, для достижения желаемого режима работы

БПЛА, необходимо связать совокупность управляющих воздействий со степенями свободы БПЛА, через уравнения связи, которые определяют основные режимы движения квадрокоптера в пространстве.

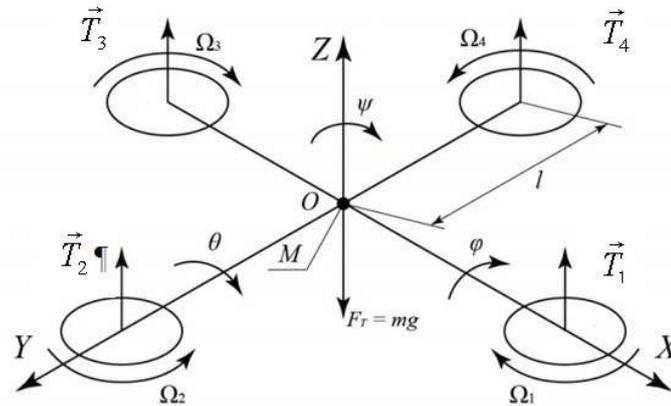


Рис. 1. Связанная система координат квадрокоптера.

В качестве первого режима БПЛА U_1 рассмотрим движение вдоль оси OZ , принадлежащей ССК. Данное движение обеспечивается одновременным увеличением скоростей винтов на одинаковое значение угловой скорости Δ_a . Полученное при этом движение (рис. 1) характеризуется взлетом или посадкой квадрокоптера (при нулевых значениях тангажа и крена) и описывается следующим выражением:

$$U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \quad (1)$$

где b – аэродинамическая составляющая тяги винта.

В качестве второго режима движения БПЛА U_2 необходимо взять поворот вокруг оси OX , принадлежащей ССК. Данное движение достигается путем увеличения/уменьшения на величину Δ_a значения Ω_4 левого винта и уменьшением/увеличением на величину Δ_b значения Ω_2 правого. Полученное при этом движение характеризуется изменением угла крена φ (рис. 2) и описывается следующим выражением:

$$U_2 = lb(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2), \quad (2)$$

где l – расстояние между центром квадрокоптера и центром винта.

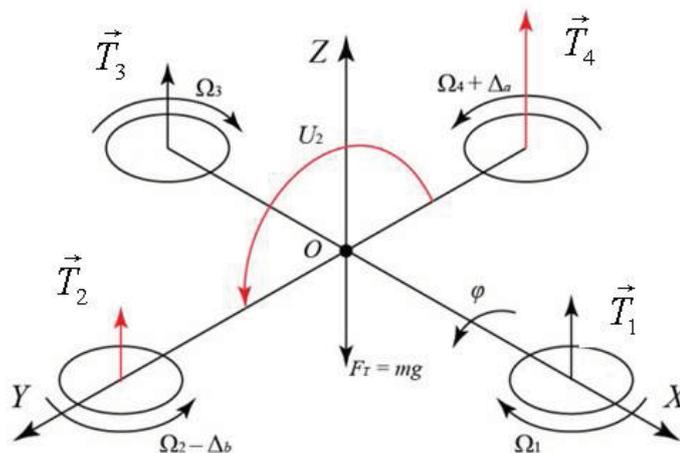


Рис. 2. Режим движения квадрокоптера вокруг оси OX .

В качестве третьего режима движения U_3 необходимо взять поворот БПЛА вокруг оси OY , принадлежащей ССК. Данное движение достигается путем уменьшения/увеличения на величину Δ_a значения Ω_1 фронтального винта и увеличения/уменьшения на величину Δ_b значения Ω_3 заднего. Полученное при этом движение характеризуется изменением угла тангажа θ (рис. 3, а) и описывается следующим выражением:

$$U_3 = lb(-\Omega_1^2 - \Omega_3^2), \quad (3)$$

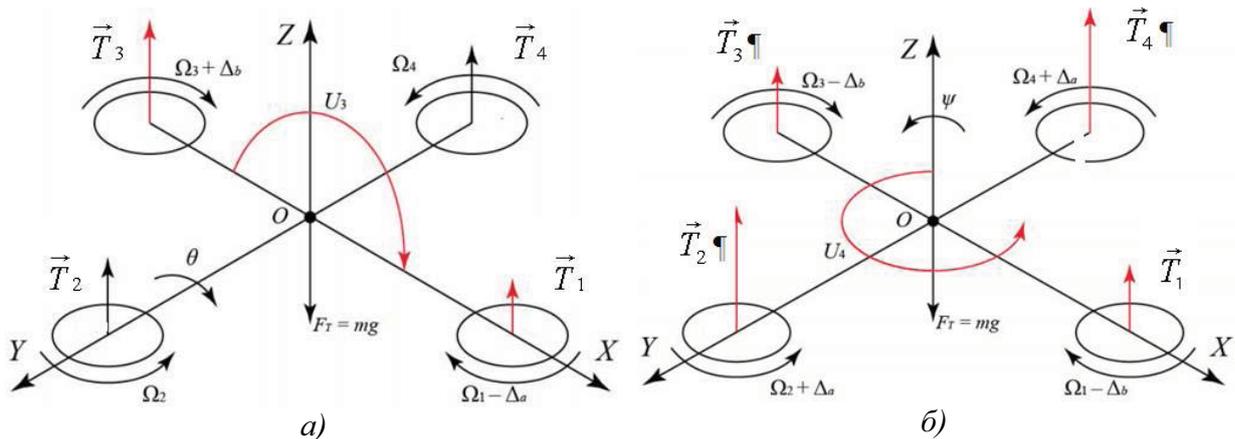


Рис.3. Режимы движения квадрокоптера:

а) режим движения вокруг оси OY ; б) режим движения вокруг оси OZ .

В качестве последнего, четвертого, режима движения U_4 необходимо взять поворот БПЛА вокруг оси OZ , принадлежащей ССК. Данное движение достигается путем одновременного увеличения/уменьшения на величину Δ_a значений Ω_4 левого и Ω_2 правого винтов, а также одновременного уменьшения/увеличения на величину Δ_b значений Ω_1 фронтального и Ω_3 заднего винтов. Благодаря вращению роторов в диагонально противоположных направлениях, полученное движение характеризуется изменением угла рыскания ψ (рис. 3, б) и описывается следующим выражением:

$$U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \quad (4)$$

где d – аэродинамическая составляющая коэффициента сопротивления среды.

Введенное, с учетом (1) – (4), множество U , характеризующее режимы движения квадрокоптера можно записать следующим образом:

$$U = \begin{cases} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2); \\ U_2 = lb(-\Omega_2^2 - \Omega_4^2); \\ U_3 = lb(-\Omega_1^2 - \Omega_3^2); \\ U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2). \end{cases}$$

Множество U определяет связь между системой исполнительных приводов и платформой БПЛА. Поэтому, при дальнейшем рассмотрении математической модели динамики движения квадрокоптера, режимы движения (1-4) будут использоваться как задающие воздействия для платформы БПЛА.

Положение квадрокоптера в пространстве относительно НСК представляется с помощью векторов положения и скорости. Этими векторами являются: вектор положения квадрокоптера \vec{P} , вектор поступательной скорости квадрокоптера \vec{g} , вектор угловой скорости квадрокоптера \vec{W} и вектор ориентации квадрокоптера \vec{E} .

Вектор положения квадрокоптера \vec{P} можно представить уравнением:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5)$$

где i, j, k - проекции вектора положения в связанной системе координат.

Вектор поступательной скорости квадрокоптера \vec{g} имеет вид:

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

где u, v и w - проекции поступательной скорости квадрокоптера в связанной системе координат.

Вектор угловой скорости квадрокоптера \vec{W} будет иметь следующий вид:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (7)$$

где p, q и r являются проекциями вращательной скорости квадрокоптера в связанной системе координат.

Вектор ориентации квадрокоптера \vec{E} в зависимости от фиксированной системы координат имеет вид:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Эти векторы являются состояниями квадрокоптера в любом интервале времени и используются для управления квадрокоптером. Обобщенный вектор \vec{X} состояния будет иметь вид:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{\vartheta} \\ \vec{W} \\ \vec{E} \\ \vec{P} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Для нахождения законов движения квадрокоптера используем выражение закона Ньютона:

$$\sum \vec{F} = m \left(\frac{d}{dt} \vec{\vartheta} + \vec{W} \times \vec{\vartheta} \right) \quad (10)$$

Действующими силами на квадрокоптер при отсутствии влияния возмущающих воздействий являются сила веса \vec{G} и силы тяги \vec{T} :

$$\sum \vec{F} = \vec{G}_g + \vec{T}_g \quad (11)$$

где $\vec{G}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$, $\vec{T}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}$, $\vec{T}_g = \sum_{n=1}^4 \Omega_n$, m - масса квадрокоптера и g - ускорение

свободного падения и Ω_n - скорость вращения ротора.

Следовательно, силы \vec{G} и \vec{T} можно записать в связанной системе координат с помощью матрицы вращения [4]:

$$\vec{G} = mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}; \vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}. \quad (12)$$

С учетом уравнений (7)-(8), (12), уравнение (11) принимает следующий вид:

$$\vec{G} + \vec{T} = m \left(\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} + \vec{W} \times \vec{\vartheta} \right). \quad (13)$$

Откуда

$$\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{1}{m} \left(mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Следовательно, с помощью алгебры матриц получим

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta - qw + rv \\ g \cos \theta \sin \theta - ru + pw \\ g \cos \theta \cos \varphi + \frac{T}{m} - pv + qu \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= rw - qw - g \sin \theta; \\
 \dot{v} &= pw - ru + g \cos \theta \sin \varphi; \\
 \dot{w} &= qu - pv + g \cos \theta \cos \varphi + \frac{T}{m}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Линеаризуем выражение (10), используя следующие равенства при нулевых начальных условиях:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \Delta u; \\
 v &= v_0 + \Delta v; \\
 w &= w_0 + \Delta w; \\
 q &= q_0 + \Delta q; \\
 r &= r_0 + \Delta r; \\
 \varphi &= \varphi_0 + \Delta \varphi; \\
 \theta &= \theta_0 + \Delta \theta.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Следовательно, при линеаризации система (16) примет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= (r_0 + \Delta r)(v_0 + \Delta v) - (q_0 + \Delta q)(w_0 + \Delta w) - g \sin(\theta_0 + \Delta \theta); \\
 \dot{v} &= (p_0 + \Delta p)(w_0 + \Delta w) - (r_0 + \Delta r)(u_0 + \Delta u) + g \cos(\theta_0 + \Delta \theta) \sin(\varphi_0 + \Delta \varphi); \\
 \dot{w} &= (q_0 + \Delta q)(u_0 + \Delta u) - (p_0 + \Delta p)(v_0 + \Delta v) + g \cos(\theta_0 + \Delta \theta) \cos(\varphi_0 + \Delta \varphi) + \frac{T}{m}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Используя законы тригонометрии

$$\begin{aligned}
 \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b; \\
 \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

и с учетом, что при нулевых начальных условиях и малых углах

$$\begin{aligned}
 \sin a &= \sin(a + \Delta a) = \sin \Delta a = \Delta a; \\
 \cos a &= \cos(a + \Delta a) = \cos \Delta a = 1,
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

уравнение (18) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \Delta r \Delta v - \Delta q \Delta w - g \Delta \varphi; \\
 \dot{v} &= \Delta p \Delta w - \Delta r \Delta u + g \Delta \theta; \\
 \dot{w} &= \Delta q \Delta u - \Delta p \Delta v + g \frac{T}{m},
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

где Δp , Δq и Δr - изменения проекций вектора вращательной скорости; Δu , Δv и Δw - изменения проекций вектора поступательной скорости; $\Delta \varphi$ и $\Delta \theta$ - изменения углов крена и тангажа.

Так как значения изменений параметров очень малы, то их умножение приведет к малому числу, которым можно пренебречь при рассмотрении уравнения (20) с помощью закона тригонометрии (19):

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= -g \Delta \varphi; \\
 \dot{v} &= g \Delta \theta; \\
 \dot{w} &= g \frac{T(\psi)}{m}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Следовательно, получим отношения ускорений по крену $\ddot{\varphi}$, тангажу $\ddot{\theta}$ и рысканию $\ddot{\psi}$, которые рассмотрены ранее (рисунки 2, 3)

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{lb(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{I_{xx}}; \\ \ddot{\theta} &= \frac{lb(-T_1 + T_2 - T_3 + T_4)}{I_{yy}}; \\ \ddot{\psi} &= \frac{d(-T_1 + T_2 - T_3 + T_4)}{I_{zz}}.\end{aligned}\quad (23)$$

Подставив выражения (22) в (23) получим:

$$\dot{i} = -g \iint \frac{lb(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{I_{xx}} \quad (24)$$

Подставив в выражение (24) $\dot{i} = dx/dt$ и заменив интеграл оператором Лапласа получим уравнение движения квадрокоптера относительно оси OX :

$$\frac{dx}{dt} = -g \left(\frac{lb(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{p^2 I_{xx}} \right). \quad (25)$$

Подобным образом получим уравнение движения квадрокоптера относительно оси OY :

$$\frac{dy}{dt} = g \left(\frac{lb(-T_1 + T_2 - T_3 + T_4)}{p^2 I_{yy}} \right). \quad (26)$$

Для реализации законов движения в трёхмерном пространстве получим уравнение контура изменения высоты полета или зависания квадрокоптера:

$$\frac{dz}{dt} = g \left(\frac{l(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{p^2 m} \right). \quad (27)$$

Контур управления высотой не включает в себя вращение вокруг оси OZ .

При линейном моделировании контур угла рыскания ψ является отдельным контуром управления и имеет следующий вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = g \left(\frac{d(-T_1 + T_2 - T_3 + T_4)}{p^2 I_{zz}} \right). \quad (28)$$

Для определения желаемой траектории движения и ориентации объекта в пространстве необходимо знать зависимость координат центра масс квадрокоптера от времени. Решение системы дифференциальных уравнений (23) - (27) осуществляется путем численного интегрирования, что позволяет найти зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, и провести соответствующее моделирование движения БПЛА.

Таким образом, полученные в результате анализа основных закономерностей движения квадрокоптера, дифференциальные уравнения

(23) - (27) представляют собой математическую модель, описывающую пространственное движение БПЛА.

Вывод. В работе предложены расчетная схема и математическая модель пространственного движения квадрокоптера, учитывающая кинематические связи, гироскопические эффекты, взаимосвязанные механические процессы в системе вращающихся винтов квадрокоптера, а также алгоритмы выработки управляющих воздействий.

Использованные источники информации:

1. *Ian Cowling*. Toward autonomy of quadrotors as UAV., 2008, Cranfield University.
2. *M. Kemper and S. Fatikow*. "Impact of center of gravity in quadrotor helicopter controller design," in Proc. 4th IFAC-Symposium on Mechatronic Systems, (Heidelberg, Germany), 2006.
3. *C. Balas*. Modeling and linear control of a quadrotor. Msc Thesis. 2007.
4. *H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin* Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3277–3282, May 2009.

References:

1. *Ian Cowling*. Toward autonomy of quadrotors as UAV., 2008, Cranfield University.
2. *M. Kemper and S. Fatikow*. "Impact of center of gravity in quadrotor helicopter controller design," in Proc. 4th IFAC-Symposium on Mechatronic Systems, (Heidelberg, Germany), 2006.
3. *C. Balas*. Modeling and linear control of a quadrotor. Msc Thesis. 2007.
4. *H. Huang, G. M. Hoffmann, S. L. Waslander, and C. J. Tomlin* Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering / IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3277–3282, May 2009.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Дубко В.О.