УДК 519.21, 530.162

Дубко В.О.;
д.ф.-м.н., професор,
Академія муніципального управління,
Дубко О.В.,
стажер-дослідник,
Науково-навчальний центр прикладної інформатикиІКНАН України.

РІВНЯННЯ ЛАНЖЕВЕНА УЗГОДЖЕНІ З КЛАСИЧНИМИ ТА НЕКЛАСИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ ДИФУЗІЇ

Анотація. Розглянуто рівняння Ланжевена, що узгоджуються з класичними моделями дифузії. Досліждені некласичні модел, повязані з описом руху броунівських частинок з обмеженою швидкістю, стохастичне рівняння динаміки електрона.

Ключові слова: рівняння Ланжевена, дифузійне наближення, самодифузія, , радіаційне тертя.

Дубко В.А.;
д.ф.-м.н., профессор,
Академия муниципального управления
Дубко А.В.;
стажер-исследователь,
Научно-учебный центр прикладной информатики ИК НАН Украины.

УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА СОГЛАСОВАННЫЕ СКЛАССИЧЕСКИМИ И НЕКЛАССИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ ДИФФУЗИИ

Аннотация. Рассмотрены уравнения Ланжевена, согласующиеся с классическими моделями диффузии. Исследованы неклассические модели: описывающие динамику броуновской частицы с конечной скоростью, стохастическое уравнение динамики электрона.

Ключевые слова: уравнение Ланжевена, диффузионное приближение, самодиффузия, радиационное трение.

Doobko V.A.;
D.Sc.,Professor,
Academy of Municipal Management.
Doobko A V.;
trainee researcher,
Scientific and Educational Center of Applied Informatics of IK NAS of Ukraine.

LANGEVIN EQUATIONS CONFORMED WITH THE CLASSICAL AND NON-CLASSICAL DIFFUSION MODELS

Abstract. The Langevin equations consistent with the classical models of diffusion are reviewed in this paper. The following non-classical Langevin models has been investigation: describing the dynamics of a Brownian particle with a finite velocity and the stochastic equation of electron dynamics.

Keywords: Langevin equation, the diffusion approximation, self-diffusion, radiation friction.

Введение. Подход Ланжевена, прежде всего, трактуется как принцип согласованности: требование совпадения осредненных значений микрохарактеристик с соответствующими аналогами на макроуровне. Во-вторых, включение случайности рассматриваем как метод, позволяющий заменить множество взаимодействий с окружающими системами такими эффективными случайными процессами, которые обеспечат выполнение принципа согласованности.

Использование уравнений Ланжевена связано с переходом к более полному моделированию динамики выделенных подсистем. С методической точки зрения, полезно установить соответствие между определенными моделями диффузии и стохастическими уравнениями Ланжевена[2-5], [8].

Для реализации этой цели, последовательность исследуемых моделей выбрана таким образом, чтобы, с учетом предыдущих рассуждений, для каждой последующей модели была видна физическая и математическая мотивировки выбора коэффициентов.

Первоначально рассмотрим различные варианты уравнения Ланжевена, приводящие к классическим распределениям Максвелла, Максвелла - Больцмана. Затем перейдем к неклассическим моделям: диффузия с ограниченной по величине скоростью, модель динамики электрона с учетом радиационного трения.

Поскольку каждая из моделей представляет самостоятельный интерес, то мы используем двойную нумерацию: первая цифра это номер раздела, а вторая нумерация внутри этого раздела.

В работе по индексам, что встречаются дважды, подразумевается суммирование.

1. Распределение Максвелла для броуновских частиц.

Уравнение Ланжевена, моделирующее динамику броуновской частицы в однородной и изотропной среде при винеровских случайных возмущениях, имеет вид:

$$\begin{cases} d\upsilon(t) = -\eta\upsilon(t)dt + b_k dw_k(t) \\ dx(t) = \upsilon(t)dt \end{cases} \tag{1.1}$$

где здесь и далее $x(t),\upsilon(t) \in \mathbb{R}^3$, соответственно, текущие значения координат и скорости броуновской частицы; $\eta > 0$, $b_k \in R^3$- постоянные векторы $w_k(t)$ - независимые винеровские процессы, и $\Delta w_k(t)$- рассматриваются как опережающие по отношению к текущему моменту t приращения.

Уравнение Колмогорова для плотности $\rho(\upsilon;x;t)$, отвечающее (1.1), имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\upsilon;x;t)=\eta\frac{\partial}{\partial \upsilon_j}(\upsilon_j\rho(x;\upsilon;t))+\frac{1}{2}b_{j,k}b_{i,k}\frac{\partial^2}{\partial \upsilon_j\partial \upsilon_i}\rho(x;\upsilon;t)$$

$$-\upsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j}\rho(x;\upsilon;t), \qquad (1.2)$$

$$\rho(x;\upsilon;0)=\rho_0(x;\upsilon)\in C_0^2;\ \lim_{|x|\to\infty}\rho_0(\upsilon;x)=\lim_{|\upsilon|\to\infty}\rho_0(\upsilon;x)=0.$$

При этих начальных условиях, решение существует и единственно. Выполнив в (1.2) свертку по x приходим к уравнению для распределения $\rho(\upsilon;t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\upsilon;t)=\eta\frac{\partial}{\partial \upsilon_j}(\upsilon_j\rho(\upsilon;t))+\frac{1}{2}b_{j,k}b_{i,k}\frac{\partial^2}{\partial \upsilon_j\partial \upsilon_i}\rho(\upsilon;t).$$

Стационарное решение $\rho(\upsilon)$ ищем опираясь на систему равенств:

$$\eta\upsilon_i\rho(\upsilon)+\frac{1}{2}b_{i,k}b_{j,k}\frac{\partial}{\partial \upsilon_j}\rho(\upsilon)=0,\ i=1,2,3\,.$$

При условии $b_{i,k}b_{j,k}=\delta_{i,j}b^2$, где $\delta_{j,k}$ - символ Кронекера, решение этой системы имеет вид:

$$\rho(\upsilon)=C\exp\{-\frac{\eta|\upsilon|^2}{b^2}\}, \qquad (1.2)$$

где C – нормирующая постоянная.

Воспользовавшись уравнением (1.1) и формулой Ито, находим:

$$d\mathrm{M}\,|\upsilon(t)|^2=-2\eta\mathrm{M}\,|\upsilon(t)|^2\,dt+(b_k,b_k)dt\,, \qquad (1.3),$$

С учетом гипотезы Максвелла-Больцмана:

$$\frac{mM[|\upsilon(\infty)|^2]}{2}=\frac{3}{2}k_BT,\quad \lim_{t\to\infty}dM[|\upsilon(t)|^2]=0,, \qquad (1.4),$$

- где k_B - постоянная Больцмана, T°- градусы Кельвина, m- масса диффундирующей частицы.

Поэтому, из (1.3) и (1.4) следует, что

$$\lim_{t\to\infty}m\mathrm{M}\,|\upsilon(t)|^2\,/\,2=\eta^{-1}m(b_k,b_k)/\,4=\frac{3}{2}k_BT^{\circ}$$

С учетом того, что $(b_k,b_k)=3b^2=3m^{-1}2k_BT^{\circ}\eta$, (1.2) заменится на такое:

$$\rho(\upsilon)=C\exp\{-\frac{m|\upsilon|^2}{2k_BT^{\circ}}\}$$

Это распределение Максвелла.

Одним из следствий проведенных рассуждений является то, что

$$b \sim \sqrt{\eta} \tag{1.5}$$

2.Распределение Максвелла-Больцмана.

Рассмотрим более общую модель:

$$\begin{cases} d\upsilon(t) = -\eta(t;x(t))\upsilon(t)dt - \nabla_x Q(x(t);t)dt + b_k(t;x(t))dw_k(t) \\ dx(t) = \upsilon(t)dt \end{cases}, \tag{2.1}$$

где $\eta(t;x) > 0$, $Q(x(t);t)$ - моделирует потенциал внешних сил.

Уравнение Колмогорова соответствующее системе уравнений (2.1), такое:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x;\upsilon;t) = \eta(t;x)\frac{\partial}{\partial \upsilon_j}\upsilon_j\rho(x;\upsilon;t)) + \frac{\partial}{\partial \upsilon_j}\rho(x;\upsilon;t)\frac{\partial}{\partial x_j}Q(t;x) +$$

$$+\frac{1}{2}b_{j,k}(t;x(t))b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial^2}{\partial \upsilon_j \partial \upsilon_i}\rho(x;\upsilon;t) - \upsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j}\rho(x;\upsilon;t).$$

В стационарном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\rho(x;\upsilon) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \upsilon_j}[\upsilon_j\mu(x)\rho(x;\upsilon) + \frac{1}{2}b_{j,k}(x)b_{i,k}(x)\frac{\partial}{\partial \upsilon_i}\rho(x;\upsilon)] - \\ +\frac{\partial}{\partial \upsilon_j}\rho(x;\upsilon)\frac{\partial}{\partial x_j}Q(x) - \upsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j}\rho(x;\upsilon)] = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Опираясь на вывод (1.5), положим , что

$$b_{j,k}(t;x(t))b_{i,k}(t;x(t)) = \delta_{i,j}b^2\mu(x),$$

В этом случае, решение системы (2.2)следующее:

$$\rho(x,\upsilon) = C\exp\{-\frac{|\upsilon|^2 + 2Q(x)}{b^2}\} \tag{2.3}$$

Если выбрать $2Q(x) = g|x_1|$, то приходим к распределению вида Максвелла-Больцмана:

$$\rho(x,\upsilon) = C\exp\{-\frac{|\upsilon|^2 + g|x_1|}{b^2}\} \tag{2.4}$$

Кроме того, видим, что $\mu(x)$ можно выбирать произвольно, но все равно, придем к распределению вида Максвелла-Больцмана (2.4), а проинтегрировав по компонентам υ - к распределению вида Больцмана. Поскольку мы рассматриваем разреженный газ броуновских частицы, слабо влияющих на среду окружения то

$$\mu(x;t) \sim \overline{\rho}(t;x)$$

где $\overline{\rho}(t;x)$ -распределение плотности частиц окружения.

3. Вариант уравнения Ланжевена для процесса самодиффузии в поле внешних сил.

Ситуация меняется, если наблюдаемые - частицы самой среды. В этом случае $\mu(x;t) \sim \rho(t;x)$, где $\rho(t;x)$ распределение или превышение средней плотности γ, тождественных по размерам частиц.

Под уравнением самодиффузии, для выделенной частички из *облака* тождественных по физическим свойствам частиц, будем понимать систему стохастических уравнений Ланжевена вида:

$$\begin{cases} \varepsilon d\upsilon_\varepsilon(t) = -\lambda(\rho(x_\varepsilon(t);t) + \gamma)\upsilon_\varepsilon(t)dt + \\ \qquad\qquad - F(x_\varepsilon(t);t)dt + (\rho(x_\varepsilon(t);t) + \gamma)^{0,5} b_k dw_k(t) \\ dx_\varepsilon(t) = \upsilon_\varepsilon(t)dt \end{cases} \quad (3.1)$$

где параметры $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$; b_k - постоянные ортогональные векторы, $|b_k| = b\sqrt{\lambda}$, $k = 1,2,3$; $F(x;t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор, моделирующий поле внешних сил.

ε рассматривается как малый параметр, и как было показано в [3], появляется при переходе к безразмерным величинам в уравнении Ланжевена для броуновской частицы. Выбор же стоксового торможения связан с тем, что сопротивление «для малых шариков имеющих размеры растворителя снижается лишь на 40% по сравнению с шариками гораздо больших размеров» ([1], с.66).

В данном уравнении, взаимодействие между частичками отображается зависимостью вязкости от решения $\rho(x;t)$ предельного уравнения ($\varepsilon \downarrow 0$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x;t) = (\nabla_x, [\rho(x;t)u(x;t)]) = . \quad (3.2)$$

Вид вектора $u(x;t)$ будет найден далее.

На основании теорем из работы [1], об асимптотическом поведении $x_\varepsilon(t), \varepsilon \downarrow 0$, с учетом вида коэффициентов (3.1), приходим к такому уравнению для аппроксимирующей переменной $x(t)$:

$$\begin{aligned} dx(t) = -0,5[\rho(x(t);t) + \gamma]^{-2}\lambda^{-2}\{(b_k, b_k)\nabla_x[\rho(x(t);t) + \gamma]dt + \\ -\frac{1}{\lambda}[\rho(x(t);t) + \gamma]^{-1}F(x(t);t)\}dt + b_k\lambda^{-1}[\rho(x(t);t) + \gamma]^{-0,5}dw_k(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соответствующее (3.2) уравнение Колмогорова имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x;t) = \{0,5\lambda^{-2}(\nabla_x,(b_k,b_k)(\rho(x;t)+\gamma)^{-2}\rho(x;t)\nabla_x[\rho(x;t)+\gamma])+$$
$$+\frac{1}{\lambda}(\nabla_x\rho(x;t)[\rho(x;t)+\gamma]^{-1},F(x;t))\}+ \tag{3.3}$$
$$+0,5\lambda^{-2}\nabla_x^2\{(b_k,b_k)(\rho(x;t)+\gamma)^{-1}\rho(x;t)\};$$
$$\rho(x;t)|_{t=0} = \rho_0(x)\in C_0^2.$$

Так как,

$$\nabla_x\{(b_k,b_k)(\rho(x;t)+\gamma)^{-1}\rho(x;t)\} = -(b_k,b_k)\rho(x;t)(\rho(x;t)+\gamma)^{-2}\nabla_x(\rho(x;t)+\gamma)+$$
$$+(\rho(x;t)+\gamma)^{-1}(b_k,b_k)\nabla_x(\rho(x;t),$$

то от (3.3) можно перейти к такой записи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x;t) = (\nabla_x,\{0,5\lambda^{-2}(b_k,b_k)(\rho(x;t)+\gamma)^{-1}\nabla_x\rho(x;t)+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\rho(x;t)[\rho(x;t)+\gamma]^{-1}F(x;t))\}),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x;t) = (\nabla_x,u(x;t)\rho(x;t)),\;\; \rho(x;0)=\rho_0(x)\in C_2^0, \tag{3.4}$$

где

$$u(x;t) = (\rho(x;t)+\gamma)^{-1}\{0,5\lambda^{-2}(b_k,b_k)\nabla_x\rho(x;t)+\frac{1}{\lambda}\rho(x;t)F(x;t)\} \tag{3.5}$$

При требовании

$$\lim_{t\to\infty}F(x;t)=F(x),$$

непрерывности по x, существует стационарное решение (3.4):

$$\lim_{t\to\infty}\rho(x;t)=\rho(x),$$

При переходе к стационарному распределению, для вектора $u(x;t)$ должно выполняться требование:

$$\lim_{t\to\infty}u(x;t)=0$$

Обращаясь к уравнению (3.5), и учитывая эти условия, приходим к равенству (см., например, [9], с. 681):

$$0,5\lambda^{-2}(b_k,b_k)\nabla_x\ln\rho(x) = -\frac{1}{\lambda}F(x).$$

Для $F(x)=\nabla_x Q(x)$, решение его имеет вид:

$$\rho(x)=C\exp\{-\frac{2\lambda}{(b_k,b_k)}\,Q(x)\}.$$

Постоянный множитель C выбираем из требования нормировки. Если $2Q(x)=g\,|x_1|$, то это распределение совпадает с видом распределением Больцмана.

Перейдем к неклассическим уравнениям диффузии.

4. Диффузия с детерминированной по величине скоростью частиц

Рассмотрим модель Ланжевена динамики броуновской частицы при ортогональных случайных воздействиях:

$$\begin{cases} d\upsilon(t) = -\lambda\upsilon(t)dt + \dfrac{b}{|\upsilon(t)|}[\upsilon(t)\times dw(t)], \\ dx(t) = \upsilon(t)dt \end{cases} \tag{4.1}$$

где $w_j(t)$ - не обязательно независимые винеровские процессы; $\lambda > 0$, b - постоянные

Обоснование подобной анизотропии, следует из таких рассуждений [8]. Стоксовая сила отображает усредненную разность между импульсами частиц среды набегающих и догоняющих броуновскую частицу. Но перпендикулярно скорости броуновской частицы, воздействия симметричны и не зависят от величины ее скорости. Чем больше скорость, тем больше такая анизотропия должна проявляться.
Воспользовавшись (4.1) и формулой Ито, находим [3]:

$$d|\upsilon(t)|^2 = [-2\lambda|\upsilon(t)|^2 + 2|\upsilon(t)|^2 \frac{b^2}{|\upsilon(t)|^2}]dt =$$
$$= -2\lambda|\upsilon(t)|^2\, dt + 2b^2 dt.$$

Так что,

$$\begin{gathered} |\upsilon(t)| = \sqrt{(1-e^{-2\lambda t})\frac{b^2}{\lambda} + e^{-2\lambda t}|\upsilon(0)|^2} \\ \lim_{t\to\infty}|\upsilon(t)| = b/\sqrt{\lambda} \end{gathered} \tag{4.2}$$

Т.е., происходит стабилизация $|\upsilon(t)|$, и сфера с радиусом $b/\sqrt{\lambda}$ является <u>притягивающим многообразием</u> для стохастического процесса $\upsilon(t)$. Если же с самого начала положить, что $|\upsilon(0)|^2 = \frac{b^2}{\lambda}$, то приходим к уравнениям движения броуновской частицы с постоянной скоростью, но изменяющей во времени свое направление случайным образом.

5. Примеры нахождения точного решения движения с детерминированной по величине скоростью.

Рассмотрим уравнение, подобное (4.1), в матричной форме ([1], с. 137, 151) но в представлении Стратоновича:

$$\begin{cases} d\upsilon(t) = -\lambda\upsilon(t)dt + \dfrac{b^2\upsilon(t)}{|\upsilon(t)|^2} + \dfrac{b\sqrt{3}}{|\upsilon(t)|} d^s w_k(t) \mathrm{B}_k \upsilon(t) \\ dx(t) = \upsilon(t)dt \end{cases} , \qquad (5.1)$$

где

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\Delta^s w_k(t)$ симметричные приращения $w_k(t)$, относительно текущего момента времени t.

Существует дискуссия о том, какое уравнение более адекватно описывает движение броуновской частицы: в представлении Ито или Стратоновича? Отметим, как доказано в [3], диффузионное приближение согласуется со вторым законом Фика, если в качестве исходного берется уравнение Ланжевена в представлении Ито. Опираясь же на требование совпадению в среднеквадратическом решений уравнений Ито и Стратоновича, можно установить взаимосвязь между коэффициентами этих представлений. Так что, проведя исследование для решений в представлении Стратоновича, сможем установить вид уравнений Ито, решения которых обладают теми же свойствами [3].

Вернемся (5.1). Учитывая особенности дифференцирования функций от процессов в представлении Стратоновича, находим:

$$d|\upsilon(t)|^2 = [-2\lambda|\upsilon(t)|^2 + |\upsilon(t)|^2 \frac{2b^2}{|\upsilon(t)|^2}]dt = -2\lambda|\upsilon(t)|^2\, dt + 2b^2 dt,$$

и, следовательно, $|\upsilon(t)|$ имеет вид (4.2).

Рассмотрим уравнение (5.1) когда $w_j(t) = w(t), \forall j = \overline{1,3}$. Тогда уравнение переходит в такое:

$$\begin{cases} d\upsilon(t) = -[\lambda - \dfrac{b^2}{|\upsilon(t)|^2}]\upsilon(t)dt + \dfrac{b\sqrt{3}}{|\upsilon(t)|} d^s w(t) B \upsilon(t) \\ dx(t) = \upsilon(t)dt \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}..$$

Решение (5.2) в матричном представлении имеет вид:

$$\upsilon(t) = \exp\{-[\lambda t - \int_0^t d\tau \frac{b^2}{|\upsilon(\tau)|^2}] + \int_0^t d^s w(\tau) \frac{b\sqrt{3}}{|\upsilon(\tau)|} B\}\upsilon(0) \qquad (5.3)$$

С учетом (4.2),

$$-\lambda t+\lambda\int_0^t d\tau\left(\frac{b^2/\lambda+e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2-\dfrac{b^2}{\lambda}\}}{\dfrac{b^2}{\lambda}+e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2-\dfrac{b^2}{\lambda}\}}\right)-\lambda\int_0^t d\tau\frac{e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2-\dfrac{b^2}{\lambda}\}}{\dfrac{b^2}{\lambda}+e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2-\dfrac{b^2}{\lambda}\}}=$$

$$-=-\lambda\int_0^t d\tau\frac{e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2-\dfrac{b^2}{\lambda}\}}{\dfrac{b^2}{\lambda}+e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2\dfrac{b^2}{\lambda}\}}=\frac{1}{2}\ln[\{\frac{b^2}{\lambda}+e^{-2\lambda t}\{|\upsilon(0)|^2-\frac{b^2}{\lambda}\}/\frac{b^2}{\lambda}],$$

Это позволяет (5.3) заменить выражением:

$$\upsilon(t)=|\upsilon(t)|\frac{\sqrt{\lambda}}{b}\exp\{\int_0^t d^s w(\tau)\frac{b\sqrt{3}}{|\upsilon(\tau)|}B\}\upsilon(0)\,, \qquad (5.4)$$

где $|\upsilon(t)|$ определяется формулой (4.2).

Учитывая детерминированность $|\upsilon(t)|^2$, можно перейти от интегралов с $d^s w(\tau)$ к интегрированию с $dw(\tau)$, и применив формулу Ито к (5.3), получить уравнение для $\upsilon(t)$ в форме Ито, но с коэффициентами зависящими от $|\upsilon(0)|^2$.

Воспользуемся дальше тем, что:

$$B^2=-I+D,\quad D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad BD=DB=0, B^3=-B\ldots$$

$$\ldots B^{2n+1}=(-1)^n B,\quad B^{2(n+1)}=(-1)^{n+2}(-I+D)=(-1)^{n+2}B^2,\quad n=\overline{0,\infty},$$

где I - единичная матрица.

С учетом этих соотношений, решение (5.3) можно представить в виде:

$$\upsilon(t)=|\upsilon(t)|\frac{\sqrt{\lambda}}{b}(I+B\sin\alpha(t)+B^2 2\sin^2\alpha(t))\upsilon(0)\,, \qquad (5.5)$$

где $\alpha(t)=\int^t\dfrac{b\sqrt{3}}{|\upsilon(\tau)|}dw(\tau)$, $|\upsilon(t)|=\sqrt{(1-e^{-2\lambda t})\dfrac{b^2}{\lambda}+e^{-2\lambda t}|\upsilon(0)|^2}$.

Следовательно, уравнение для $x(t)$ переходит в такое:

$$\frac{dx(t)}{dt}=|\upsilon(t)|\frac{\sqrt{\lambda}}{b}(I+B\sin\alpha(t)+B^2 2\sin^2\alpha(t))\upsilon(0)\,.$$

Если $\dfrac{b^2}{\lambda}=|\upsilon(0)|^2$, то $\forall t>0,\quad |\upsilon(t)|^2=\dfrac{b^2}{\lambda}$, и (5.5) приобретает вид:

$$\upsilon(t)=(I+B\sin\alpha(t)+B^2 2\sin^2\alpha(t))\upsilon(0)\,,\quad \alpha=\sqrt{3}w(t)\,.$$

Для этого случая

$$x(t)-x(0)=\int_0^t d\tau(I+B\sin\alpha(\tau)+B^2 2\sin^2\alpha(\tau))\upsilon(0).$$

6. Уравнение динамики электрона

Принцип согласованности, применявшийся при установлении вида уравнений ранее, можно назвать методом "физического смысла".
В качестве примера применения метода "физического смысла", для снятия противоречий при отображении реальных физических процессов, "построим" уравнение динамики электрона с учетом радиационного трения.

В приближении Лоренца [7], обычно, его проводят в следующем виде:

$$-\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}=-\frac{d\upsilon(t)}{dt}+\frac{1}{m}F(t) \qquad (6.1)$$

где $\varepsilon\approx\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc_0^3}\simeq 10^{-22}$ секунд, т.е., играет роль малого параметра, $m=(m_0+\delta m)$ — эффективная масса электрона, m_0 - масса покоя, δm - масса обусловленная инерционностью электромагнитного поля электрона, c_0 - скорость света в вакууме, e - заряд электрона, а

$$\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}$$

носит название силы "радиационного трения".

Появление $\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}$ в (6.1) связано с первым ненулевым слагаемым разложения силы реакции электрона на его же излучение. Последующие слагаемые разложения (см. например, [7], с. 363) порядка

$$\varepsilon^{n-1}\frac{d^n\upsilon(t)}{dt^n} \qquad (6.2)$$

Исследуем поведение решения уравнения (6.1).

1) Если положить в (1) F=0, а $\frac{d\upsilon(0)}{dt}\neq 0$, то решение $\frac{d\upsilon(t)}{dt}$ уравнения (6.1)

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt}=\frac{d\upsilon(0)}{dt}\exp(\varepsilon^{-1}t) \qquad (6.3)$$

- неограниченно возрастает.

Это, так называемый, парадокс самоускорения электрона [6]. Но, как можно убедиться, воспользовавшись (6.3) и (6.2),

$$\varepsilon^{n-1}\frac{d^n\upsilon(t)}{dt^n}=\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}.$$

Следовательно, приходим к заключению, что отбрасывание слагаемых с множителями вида (6.2), появляющихся в точном разложении силы реакции ([7], с. 363), не правомерно: суммарный вклад этих слагаемых, может быть соизмерим с оставленным.

2) Заметим, что от уравнения (6.1), даже при средних скоростях электрона $|\upsilon(t)c_0^{-1}|\ll 1$, невозможно перейти, к дающему хорошее приближение, уравнению динамики:

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt}=\frac{1}{m}F(t) \quad . \tag{6.4}$$

Следуя принципу "физического смысла", указанные противоречия (6.1) и (6.2) можно "устранить", предполагая, что суммарный вклад отбрасываемых слагаемых знакопеременного ряда, используемого в разложении, при нахождении влияния собственного поля электрона на его динамику, по величине соизмерим с первым ненулевым слагаемым $\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}$. Предположим, что это слагаемое в сумме со всеми отбрасываемыми, аппроксимируется - $\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}$. Т.е., (6.1) заменяем таким:

$$\varepsilon\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}=-\frac{d\upsilon(t)}{dt}+\frac{1}{m}F(t) \tag{6.5}$$

Для этого уравнения не возникает парадокса самоускорения электрона. Наоборот,

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt}\to 0,$$

если произведено "отключение" $F(t)$ $(F\left(t>\tau\right)=0)$. Это соответствует представлению, что при отсутствии поля внешних сил, первоначально ускоренный электрон, за счет потери энергии излучения, перейдет к движению с постоянной скоростью.

Переход от уравнения (6.5) к уравнению (6.4) тут уже будет корректен. Более того, такой переход возможен и при наличии случайных сил. Однако наличие случайных сил может привести к появлению дополнительных слагаемых в (6.4). Для пояснения этого, представим уравнение (6.5) в таком виде:

$$\begin{aligned}-\varepsilon d\frac{d^2\upsilon(t)}{dt^2}&=(1-|\upsilon|^2(t)c_0^{-2})^{-0,5}\frac{d\upsilon(t)}{dt}dt-\\&-(1-|\upsilon|^2(t)c_0^{-2})^{-0,5}\frac{1}{m}F(t)dt+\sigma(t)dw(t)\end{aligned} \tag{6.6}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, $F(t) = F(t;\upsilon(t);x(t))$ - поле внешних сил, а слагаемое $\sigma(t)dw(t) = \sigma(t;\upsilon(t);x(t))dw(t)$ моделирует хаотические колебания поля вакуума.

Появление множителей $(1-|\upsilon|^2(t)c_0^{-2})^{-0,5}$ связываем с учетом релятивистских эффектов изменения массы. При условии, что $|\upsilon(t)c_0^{-1}|^2 < 1$, что вполне согласуется с условием невозможности превысить скорость света c_0, решение уравнения (6.6) может быть аппроксимировано [3] (в смысле слабой или среднеквадратической сходимости) решением $\overline{\upsilon}(t)$ уравнения

$$d\overline{\upsilon}(t) = -\overline{\upsilon}(t)\sigma^2 c_0^{-2}dt + \frac{1}{m}F(t)dt + \sigma(t)(1-|\upsilon|^2(t)c_0^{-2})^{0,5}dw(t). \qquad (6.7)$$

Как утверждается в работе [5], уравнение динамики электрона вида:

$$d\upsilon(t) = -\beta\upsilon(t) + \frac{1}{m}F(t)dt + f(t)dt, \qquad (6.8)$$

где $f(t)$ хаотические колебания электромагнитных полей, приводит, при соответствующем выборе $\beta > 0$, к правильному выражению для эффективного сечения рассеяния с учетом радиационного трения. Но, в то же время, не происходит нарушение второго закона термодинамики. Как видим, (6.8), совпадает с полученным нами, на основе уравнения (6.6), уравнением (6.7).

Вполне возможно, что приведенные модели (6.5), (6.6), построенные исходя из физических соображений и математических требований, (первоначально в [2], а затем в [4]), более правильно отражают реальность.

Заключение. Мы не настаиваем на абсолютности приводимых моделей. Рассматриваем их как возможные варианты микроскопического описания динамики частиц броуновских и молекулярных размеров, демонстрирующие эффективность применения принципа Ланжевена для описания и раскрытия явлений микрофизики.

Использованные источники информации:

1. Алдер Б.Ж., Алли У.Э. Обобщенная гидродинамика – М: Мир Физика за рубежом, 86-А, 1986. С. 52-72
2. Дубко В.А. Понижение порядка стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Теор. случ. процессов, - 1980.- №8 С. 35-41.
3. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений - Владивосток: ДВО АН СССР, 1989. 185 с.
4. Дубко В.А. Применение метода "физического смысла" на примере проблемы построения динамики электрона // Педагогический процесс в условиях перехода к новому состоянию общества. Тезисы и докл. науч.-практ. межвуз. конфер. Биробиджан, - 1995 - Ч.1. С.70-72.

5. Климонтович Ю.Л.К статистическому обоснованию уравнения Шредингера // ТМФ. - 1993 - Т.97- №1. С.3-26.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.Теория поля.— М.: Наука, 1973
7. Лоренц Г.А. Теория электронов и ее применение к явлениям светового и теплового излучения - М.: Главное издание технико-теоретической литературы, 1953 . 370 с.
8. Скороход А.В.Стохастические уравнения системы многих частиц // Математические методы в биологии. - Киев: Наук. думка, 1977. С. 33-53
9. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Пер. с нем. Ленинград, Москва: ОНТИ, Гл. ред. общетех. Литературы, 1937. – 996 с.

References:

1. Alder B.Zh., Alli U.Je. Obobshhennaja gidrodinamika – M: Mir Fizika za rubezhom, 86-A, 1986. S. 52-72
2. Dubko V.A Ponizhenie porjadka stohasticheskih differencial'nyh uravnenij s malym parametrom pri starshej proizvodnoj // Teor. sluch. processov, - 1980.- №8 S. 35-41.
3. Dubko V.A. Voprosy teorii i primenenija stohasticheskih differencial'nyh uravnenij - Vladivostok: DVO AN SSSR, 1989. 185 s.
4. Dubko V.A. Primenenie metoda "fizicheskogo smysla" na primere problemy postroenija dinamiki jelektrona // Pedagogicheskij process v uslovijah perehoda k novomu sostojaniju obshhestva. Tezisy i dokl. nauch.-prakt. mezhvuz. konfer. Birobidzhan, - 1995 - Ch.1. S.70-72.
5. Klimontovich Ju.L. K statisticheskomu obosnovaniju uravnenija Shredingera // TMF. - 1993 - T.97- №1. S.3-26.
6. Landau L. D., Lifshic E. M. Teorija polja.— M.: Nauka, 1973
7. Lorenc G.A. Teorija jelektronov i ee primenenie k javlenijam svetovogo i teplovogo izluchenija - M.: Glavnoe izdanie tehniko-teoreticheskoj literatury, 1953 . 370 s.
8. Skorohod A.V. Stohasticheskie uravnenija sistemy mnogih chastic // Matematicheskie metody v biologii. - Kiev: Nauk. dumka, 1977. S. 33-53.
9. Frank F., Mizes R. Differencial'nye i integral'nye uravnenija matematicheskoj fiziki. Per. s nem. Leningrad, Moskva: ONTI, Gl. red. obshheteh. Literatury, 1937. – 996 s.

Рецензент: д.т.н., проф.Лысенко А.И.