

Мозговой А.А. ИССЛЕДОВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ МАКСИМАЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ЛЬДА ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ В ВОДОХРАНИЛИЩАХ ГИДРОУЗЛОВ ДНЕПРОВСКОГО КАСКАДА. Приведены результаты статистической обработки максимальной толщины льда на р. Днепр по данным наблюдений с 1956 по 1979 гг. Проанализированы и обработаны статистические ряды многолетней максимальной толщины льда р. Днепр в створах гидроузлов Днепровского каскада, исследовано корреляционные связи между максимальной толщиной льда, вычислены статистические характеристики уравнений линейной регрессии. Результаты могут быть использованы при прогнозировании ледовых явлений на р. Днепр, а так же при вычислении вероятности возникновения чрезвычайной ситуации каскада гидроузлов.

Ключевые слова: толщина льда, водохранилище, природные факторы, статистический ряд, корреляционная зависимость, вероятностная оценка надежности, каскад гидроузлов.

Mozgovuy A. STUDY OF THE CORRELATION OF THE MAXIMUM THICKNESS OF ICE ACCORDING TO STATISTICAL DATA OF OBSERVATIONS IN RESERVOIRS AT HYDROPOWER SCHEMES OF THE DNEPHER CASCADE. The results of statistical processing of the maximum thickness of ice on the Dnieper River on the basis of observations from 1956 to 1979 are presented. The statistical series of the long-term maximum thickness of ice on the Dnieper River at sites of the Dnieper cascade of hydropower schemes were analyzed and processed; the correlation between the maximum thicknesses of ice was studied; the statistical characteristics of the linear regression equations were calculated. The results may be used in forecasting ice phenomena on the Dnieper River, as well as in calculating the probability of an emergency at the cascade of hydropower schemes.

Key words: thickness of ice, reservoir, natural factors, statistical series, correlation, probabilistic reliability assessment, cascade of hydropower schemes.

DOI: 10.29295/2311-7257-2018-93-3-155-163

УДК 539.3

Мірошніков В.Ю.

*Харківський національний університет будівництва та архітектури
(вул. Сумська, 40, Харків, 61002, Україна; e-mail: m0672628781@gmail.com)*

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ ТА ДЕЯКИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ КОНТАКТНОГО ТИПУ

Наведено розв'язок тривимірної задачі теорії пружності, коли на межах одних паралельних циліндричних порожнин задані напруження, а на межах інших дотичні зусилля та нормальні переміщення. Розв'язання системи рівнянь Ламе отримано узагальненим методом Фур'є в циліндричних координатах, пов'язаних з циліндрами. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зведена проблема, розв'язуються методом усічення. В результаті були знайдені переміщення та напруження в пружному тілі. Числові результати приведені для випадку двох циліндрів.

Ключові слова: циліндричні порожнини в просторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

Вступ. При проектуванні тунелів, підземних комунікацій або проектуванні, пов'язаному з машинобудуванням і композитними матеріалами, доводиться стикатись з проблемою оцінки міцності та стійкості конструкцій. Ці проблеми тісно пов'язані з розв'язанням задач теорії пружності, коли на межах одних паралельних

циліндричних порожнин в просторі задані дотичні зусилля та нормальне переміщення (умови контактного типу), а на межах інших порожнин задані напруження.

В науковій літературі є аналітичні підходи до розв'язання задач теорії пружності для простору з поодинокими порож-

нинами виключно для крайових умов першої або другої основних задач [1-4]. Умови контактного типу (на межах порожнин задані дотичні зусилля та нормальне переміщення), наскільки відомо автору, раніше не розглядалися.

Динамічні задачі в пружному просторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами або включеннями вивчалися в [5-6]. В роботі [7] розглянуто методику розрахунку статичної задачі для простору з декількома циліндричними порожнинами, а в [8] наведено детальний аналіз напруженого стану для випадку двох порожнин з граничними умовами в переміщеннях. Змішану задачу теорії пружності, коли на межах одних циліндричних порожнин задані напруження, а на інших переміщення розглянуто в [9]. Розв'язок більш загальних задач для циліндра з декількома циліндричними порожнинами або пружними включеннями з заданими напруженнями на межах викладено в статтях [10-14].

Роботи [15,16] присвячені визначенню напруженого стану кінцевого циліндра. Метод заснований на суперпозиції розв'язків і розкладанні їх у ряди Фур'є і Діні.

В роботі [17] розглянуто методику розрахунку статичної задачі для півпростору з декількома циліндричними порожнинами.

В цій статті наведено аналітико – чисельне розв'язання змішаної задачі для простору з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами, коли на межах одних порожнин задані напруження (їх N_2), а на межах інших (їх N_1) задані дотичні напруження та радіальні переміщення. Як приклад подано числовий аналіз напружено деформівного стану простору з двома порожнинами і вивчено взаємний вплив порожнин.

В основі методу розв'язання задачі, як і в [5-17], лежить узагальнений метод Фур'є.

Основний матеріал

Постановка задачі. Метод розв'язання. Пружний ізотропний простір має $N = N_1 + N_2$ кругових непересічних

між собою циліндричних паралельних порожнин. На межах одних порожнин (N_1) задані дотичні напруження та радіальні переміщення, на інших (N_2) тільки напруження.

Потрібно розв'язати рівняння рівноваги Ламе

$$\Delta \vec{U} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{U} = 0, \quad (1)$$

за умов:

- на межах одних циліндричних порожнин задано крайові умови контактного типу

$$\left. \begin{aligned} U_{\rho} (M_p) |_{\rho_p=R_p} &= U_0^{(p)} (\varphi_p, z), \\ \tau_{\rho\varphi} |_{\rho_p=R_p} &= \tau_1^{(p)} (\varphi_p, z), \\ \tau_{\rho z} |_{\rho_p=R_p} &= \tau_2^{(p)} (\varphi_p, z) \end{aligned} \right\} p=1, 2, \dots, N_1, \quad (2)$$

- на межах інших порожнин задано крайові умови першої основної задачі

$$F\vec{U} |_{\rho_p=R_p} = \vec{F}_0^{(p)} (\varphi_p, z), \quad p=N_1+1,$$

$$N_1+2, \dots, N = N_1 + N_2; \quad (3)$$

де

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \operatorname{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{U}) \right] \quad (4)$$

$M_p = (\rho_p, \varphi_p, z)$ – точка простору в циліндричній системі координат, пов'язаної з p -м циліндром, \vec{U} – вектор переміщення, $F\vec{U}$ – вектор напруження, σ – коефіцієнт Пуассона, \vec{n} – орт нормалі до поверхні циліндра, G – модуль зсуву.

На нескінченності переміщення та напруження дорівнюють нулю.

Розв'язок задачі (вектор переміщення \vec{U}) шукаємо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{p=1}^N \vec{U}_p (M_p),$$

$$\vec{U}_p (M_p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[x_m^{(p)} (\lambda) \cdot \vec{S}_{1,m} (M_p; \lambda) + y_m^{(p)} (\lambda) \cdot \vec{S}_{2,m} (M_p; \lambda) + z_m^{(p)} (\lambda) \cdot \vec{S}_{3,m} (M_p; \lambda) \right], \quad (5)$$

де $\vec{U}_p (M_p)$ – загальний розв'язок системи рівнянь (1) зовні p -го циліндру, $x_m^{(p)} (\lambda)$, $y_m^{(p)} (\lambda)$, $z_m^{(p)} (\lambda)$ – невідомі функції, $\vec{S}_{k,m}$ – базисні розв'язки рівняння Ламе зовні циліндра:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{1,m}(M; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \text{grad}(s_m), \\ \bar{S}_{2,m}(M; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \left[\text{grad} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma-1) \left(\bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \bar{e}_\varphi \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \cdot s_m, \\ \bar{S}_{3,m}(M; \lambda) &= i \cdot \lambda^{-1} \cdot \text{rot}[\bar{e}_z \cdot s_m], \\ s_m(\rho, \varphi, z; \lambda) &= (\text{sign}(\lambda))^m \cdot K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda \cdot z)} \end{aligned} \right\} (6)$$

$M = (\rho, \varphi, z)$

При розв'язанні задачі також будуть використані базисні розв'язки рівняння Ламе, регулярні всередині циліндра $\rho < \rho_0$. Вони мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{1,m}(M; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \text{grad}(r_m), \\ \bar{R}_{2,m}(M; \lambda) &= \lambda^{-1} \cdot \left[\text{grad} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma-1) \times \left(\bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \bar{e}_\varphi \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \cdot r_m, \\ \bar{R}_{3,m}(M; \lambda) &= i \cdot \lambda^{-1} \cdot \text{rot}[\bar{e}_z \cdot r_m], \\ r_m(M; \lambda) &= I_m(\lambda \rho) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda \cdot z)}; \end{aligned} \right\} (7)$$

$I_m(x), K_m(x)$ – функції Бесселя [2]

Розв'язання (6), (7) наведені в [13].

При розв'язанні задачі узагальненим методом Фур'є будемо користуватися формулами переходу в базисних розв'язках від однієї циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером p до іншої циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером q . Ці формули мають вигляд [13]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda), \\ \bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(2)}(p, q) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda), \\ \bar{S}_{3,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{3,n}(M_q; \lambda), \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{1,n}(M_q; \lambda) + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{2,n}(M_q; \lambda) + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{3,n}(M_q; \lambda) \right] + \right. \\ &+ \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(x_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(2)}(p, q) \right) \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda) + \right. \\ &\left. \left. + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{3,n}(M_q; \lambda) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

де $H_{m,n}^{(1)}(p, q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}$,
 $H_{m,n}^{(2)}(p, q) = \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} (-1)^{n+1} \times$
 $\times e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \left[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right],$
 $\tilde{K}(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|),$
 ℓ_{pq}, α_{pq} – позначені на рис. 1

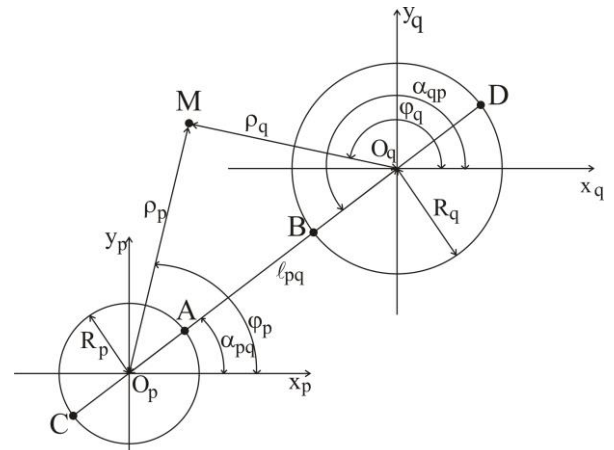


Рис.1. Циліндричні порожнини в пружному просторі

Для знаходження переміщення чи напруження на поверхні циліндра з номером q запишемо (5) у вигляді

$$\bar{U} = \bar{U}_q + \sum_{p=1, p \neq q}^N \bar{U}_p, \quad (9)$$

З метою реалізації крайових умов (9) перепишемо (9), застосувавши формули переходу (8). В системі координат (ρ_q, φ_q, z) для циліндра з номером q (9) має вигляд:

Обчислимо $U_\rho, \tau_{\rho\varphi}, \tau_{\rho z}$ від вектора \vec{U} в формі (10) та прирівняємо ці величини заданим згідно (2), тобто функціям $U_0^{(q)}(\varphi_q, z), \tau_1^{(q)}(\varphi_q, z), \tau_2^{(q)}(\varphi_q, z)$. Після звільнення в отриманих рівностях від інтегралів по λ і рядів по m знайдемо:

$$\begin{aligned} & -x_n^{(q)}(\lambda) \cdot (K_{n-1} + K_{n+1}) + y_n^q(\lambda)(\chi - D)(K_{n-1} - K_{n+1}) + z_n^{(q)}(\lambda)(K_{n-1} - K_{n+1}) = \\ & = 2 \cdot \alpha_n^{(q)} - \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot x_m^{(p)}(\lambda) + B_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot y_m^{(p)}(\lambda) + C_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot z_m^{(p)}(\lambda)] \\ & x_n^{(q)}(\lambda) \cdot D(K_{n+1} - K_{n-1}) + y_n^q(\lambda)[(b_n + \gamma D)K_{n+1} - (a_n + \gamma D)K_{n-1}] + \\ & + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot [D(K_{n-1} + K_{n+1}) + (n-1)K_{n-1} - (n+1)K_{n+1}] \frac{1}{2} = \beta_n^{(q)} - \\ & - \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{m,n}^{(2)}(p, q) \cdot x_m^{(p)}(\lambda) + B_{m,n}^{(2)}(p, q) \cdot y_m^{(p)}(\lambda) + C_{m,n}^{(2)}(p, q) \cdot z_m^{(p)}(\lambda)] \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & 2x_n^{(q)}(\lambda) \cdot DK_n + 2y_n^q(\lambda)(c_n + \delta D)K_n - z_n^{(q)}(\lambda)nK_n = \gamma_n^{(q)} - \\ & - \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{m,n}^{(3)}(p, q) \cdot x_m^{(p)}(\lambda) + B_{m,n}^{(3)}(p, q) \cdot y_m^{(p)}(\lambda) + C_{m,n}^{(3)}(p, q) \cdot z_m^{(p)}(\lambda)] \end{aligned}$$

$$\alpha_n^{(q)}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi_q} d\varphi_q \int_{-\infty}^{\infty} U_0^{(q)}(\varphi_q, z) \cdot e^{-i\lambda z} dz,$$

$$\beta_n^{(q)}(\lambda) = -i \frac{R}{G} (\text{sign}(\lambda))^{n+1} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi_q} d\varphi_q \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1^{(q)}(\varphi_q, z) \cdot e^{-i\lambda z} dz,$$

$$\gamma_n^{(q)}(\lambda) = -i \frac{R}{G} (\text{sign}(\lambda))^n \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi_q} d\varphi_q \int_{-\infty}^{\infty} \tau_2^{(q)}(\varphi_q, z) \cdot e^{-i\lambda z} dz,$$

$$\chi = 3 - 4\sigma, \quad K_m = K_m(|\lambda|R_q), \quad \gamma = 2\sigma - 3, \quad \delta = 2(\sigma - 1), \quad D = \rho \frac{d}{d\rho}, \quad DK_m = xK'_m(x),$$

$$x = |\lambda|R_q, \quad a_m = (m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2, \quad b_m = (m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2, \quad c_m = m^2 + \lambda^2 R^2,$$

$A_{m,n}^{(k)}(p, q), B_{m,n}^{(k)}(p, q), C_{m,n}^{(k)}(p, q), k=1, 2, 3$ – коефіцієнти, які знаходимо в результаті застосування формул переходу (8) до другого доданку в (9).

Зауваження 1. Система рівнянь (11) дає $3N_1$ сукупностей нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $x_n^{(q)}, y_n^{(q)}, z_n^{(q)}$. Якщо покласти усі $\ell_{pq} = \infty$, то система (11) в цьому випадку вироджується в систему трьох рівнянь відносно трьох невідомих $x_n^{(q)}, y_n^{(q)}, z_n^{(q)}$, так як усі $H_{m,n}^{(k)}(p, q) = 0$ і усі $A_{m,n}^{(k)} = B_{m,n}^{(k)} = C_{m,n}^{(k)} = 0$

Ця система відповідає задачі для однієї порожнини з умовами контактного типу на її межах.

Для визначника Δ_n цієї виродженої системи має місце нерівність $|n| \geq 2$ (цю нерівність автору статті повідомив В.С.Проценко), більш того

$$\begin{aligned} & \text{для } n = 0 \quad |\Delta_0| = 8(1-\sigma) \cdot x^2 \cdot K_1^2(x) \cdot K_2(x), \\ & \text{для } n \geq 1 \quad |\Delta_n| > 4n \cdot K_{n-1}(x) K_n(x) K_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{12}$$

$x = |\lambda|\rho, \lambda \neq 0$, яке гарантує її однозначну розв'язуваність при $\lambda \neq 0$.

В цьому випадку невідомі $x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, z_n^{(1)}$ знаходяться точно. Крім цього, існують границі добутоків $x_n^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{1,n}(M; \lambda), y_n^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{2,n}(M; \lambda), z_n^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{3,n}(M; \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Отже, маємо точний розв'язок задачі для однієї порожнини з умовами контакт-ного типу на її межі. Воно представлено формулою (5), якщо в неї підставити найдені з виродженої системи функції $x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, z_n^{(1)}$.

Якщо $N_2=0$, тобто немає порожнин, на яких задані напруження, то маємо нескінчену систему, відповідну задачі для N_1 порожнин з крайовими умовами тільки контакт-ного типу. Її за допомогою простої заміни невідомих можна привести до такої системи, для якої можна довести, використовуючи нерівність (12), однозначну розв'язуваність.

Для того, щоб задовольнити крайовим умовам (3), до вектора \vec{U} , записаному в вигляді (10), застосуємо оператор напруження (4) з $\vec{n} = -\vec{e}_{\rho_q}$ та прирівняємо результат його дії на межі порожнини заданому вектору напруження $\vec{F}_0^{(q)}(\varphi_q, z)$.

Останній представимо в вигляді розкладу

$$\vec{F}_0^{(q)}(\varphi_q, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{h}_n^{(q)}(\lambda) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad (13)$$

де

$$\vec{h}_n^{(q)}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_q \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_0^{(q)}(\varphi_q, z) e^{-i(n\varphi_q + \lambda z)} dz$$

, $q = N_1+1, N_1+2, \dots, N_1+N_2$.

Далі, як і в першому випадку, звільняємось в отриманій векторній рівності від інтегралів та рядів і проектуємо її на орти $\vec{e}_{\rho_q}, \vec{e}_{\varphi_q}, \vec{e}_z$.

В результаті цій дій прийдемо до $3N_2$ сукупностям нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь, аналогічним системі (11).

Зауваження 2. Якщо в останній системі покласти усі $\ell_{\rho_q} = \infty$, то прийдемо до системи для однієї ізольованої порожнини в пружному просторі з крайовими умовами першої основної задачі теорії пружності.

Для визначника отриманої виродженої системи маємо при $|n| \geq 2$ нерівність [14]:

$$|\widehat{\Delta}_n^{(0)}| > C(n^2 + x^2) \cdot K_{n-1}(x) \cdot K_n(x) \cdot K_{n+1}(x), \quad (14)$$

$x = |\lambda| R, \lambda \neq 0, C > 0$ – залежить від G, σ, R .

Наведена нерівність гарантує однозначну розв'язуваність задачі теорії пружності для однієї порожнини. В цьому випадку, так як і раніше, маємо точний розв'язок задачі.

В загальному випадку маємо $3N=3(N_1+N_2)$ сукупностей нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих $x_n^{(q)}, y_n^{(q)}, z_n^{(q)}, q=1,2,\dots,N$. Для цієї розв'язувальної системи можна показати, використовуючи заміни невідомих і оцінки визначників (12), (14), що вона має однозначний розв'язок при будь-якому $\lambda \neq 0$. Її єдиний розв'язок може бути знайдено методом усічення (редукції), причому, наближені значення невідомих при такому методі рішення прямують до точного зі збільшенням порядку усічених систем.

Зауваження 3. Запропонований метод дозволяє досліджувати та розраховувати задачі з різними комбінаціями граничних умов. Наприклад, на одних межах порожнин задані переміщення, на других напруження, на третіх умови контакт-ного типу.

Чисельний аналіз задачі для двох циліндрів. Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у просторі (рис. 1).

$R_p = 10\text{см.}, R_q = 15\text{см.}, \ell_{\rho_q} = 35\text{см.}, \alpha_{\rho_q} = 0$. Простір – ізотропний матеріал, $E = 2\text{кН/см}^2, \sigma = 0,35$.

Задача 1. На межах циліндру p задано умови контакт-ного типу $U_0^{(p)} = u \cdot a^4 / (z^2 + a^2)^2, \tau_1^{(p)} = \tau_2^{(p)} = 0, u=1, a=10$. Застосувавши для заданої функції $U_0^{(p)}$ перетворення Фурьє отримаємо ненульову проекцію на вісь ρ у вигляді $(u \cdot a \cdot e^{-a \cdot |\lambda|} \cdot (a \cdot |\lambda| + 1)) / 4$. На межах циліндра q задані напруження $\sigma_{\rho}^{(q)} = \tau_{\rho\varphi}^{(q)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0$, тобто $\vec{h}_n^{(q)}(\lambda) = 0$

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої ($-10 \leq m \leq 10$). Для обчислення інтегралів використано квадратурну формулу Філона. В результаті розв'язання цієї системи рівнянь були знайдені невідомі функції та перевірено вико-

нання крайових умов, точність яких досягає 0,01% в місцях, де навантаження відізняється від нуля.

Найбільший вплив заданих умов на переміщення U_p (рис. 2,а) на циліндрі q відбувається в частині наближеної до «навантаженого» циліндру. За рахунок цього впливу напруження σ_ϕ (рис. 2,б) в цій області є розтягуючими та максимальними. Щодо σ_z (рис. 2,в), то на циліндрі q відбуваються лише розтягнення в зоні, що наближена до циліндра p .

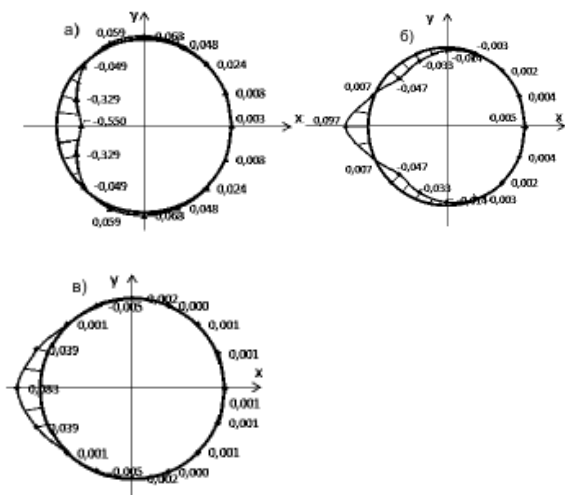


Рис. 2. Переміщення U_p , епюри σ_ϕ та σ_z на циліндрі q в перерізі $z = 0$

На рис.3 відображені нормальні напруження вздовж осі z в точках А, В, С, D (рис.1)

Нормальні напруження σ_p (рис.3) на циліндрі p (точки С і А) змінюються не тільки відповідно до хвилі переміщення, а ще мають ділянки з розтягуювальними зусиллями.

Максимальні напруження σ_ϕ на циліндрі p виникають при $z = \pm 6$ см., натомість на циліндрі q навпроти максимального переміщення.

Напруження σ_z на циліндрі p , крім стискаючих (в зоні $z=0$), мають розтягуювальні значення (в зоні $z=10$).

При наближенні, чи віддаленні циліндрів збільшується чи зменшується їх вплив друг на друга. На рис.4 представлений на-

пружений стан на перехідку між циліндрами від т.А до т.В (рис 1.), $\Delta l = (R_p + R_q) / \ell_{pq}$. З рис. 4 можливо побачити, що при зближенні циліндрів напруження σ_ϕ та σ_z зростає, втім σ_p зменшується.

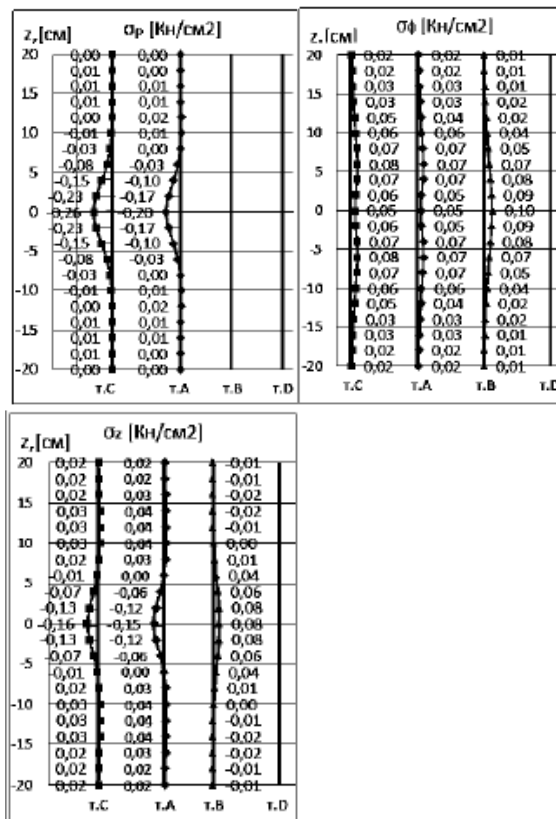


Рис. 3. Нормальні напруження вздовж осі z (при $y=0$)

Задача 2. Задамо на циліндрі p переміщення $U_p = 0$ та дотичні зусилля приймемо нульовими, а на циліндрі q задамо $\sigma_p^{(q)} = -1 \text{ кН/см}^2 \Big|_{|z| \leq 20}$, $\sigma_p^{(q)} = 0 \Big|_{|z| > 20}$, $\tau_{p\phi}^{(q)} = 0$, $\tau_{p_z}^{(q)} = 0$. Застосувавши перетворення Фурье отримаємо $\bar{h}_n^{(q)}(\lambda) = 0$, $n \geq 1$, $\bar{h}_0^{(q)} = (-\sin(\lambda h) / \pi\lambda, 0, 0)$, $h = 20$ см.

В результаті розв'язання системи рівнянь отримаємо епюри нормальних напружень (рис.5), які показують вплив навантаженого циліндра q на циліндр p , який має крайові умови контактного типу (2). За рахунок відсутності нормальних переміщень U_p на циліндрі p та малої відстані між ци-

ліндрами, напруження σ_p на ненавантаженому циліндрі в точці А (рис.1) стискаюче та більше ніж задане на циліндрі q .

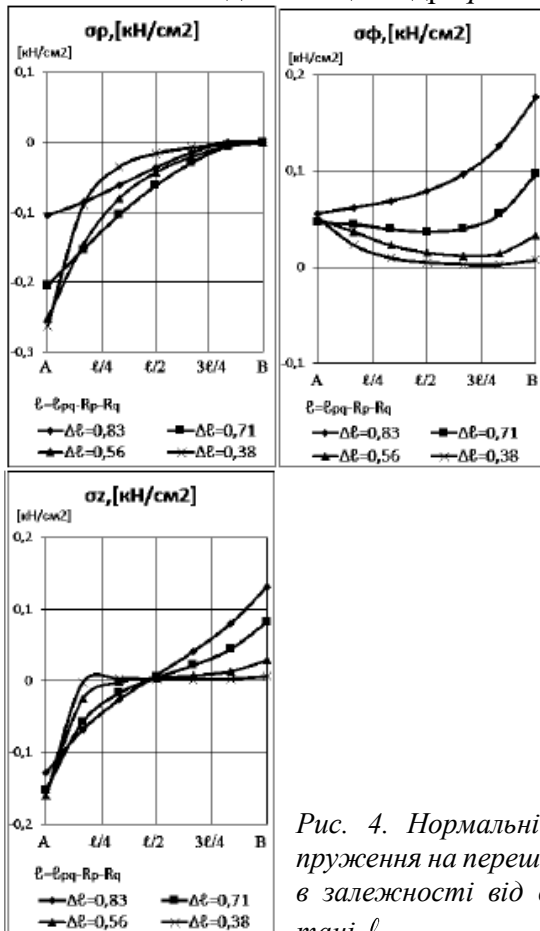


Рис. 4. Нормальні напруження на перехийку в залежності від відстані l_{pq}

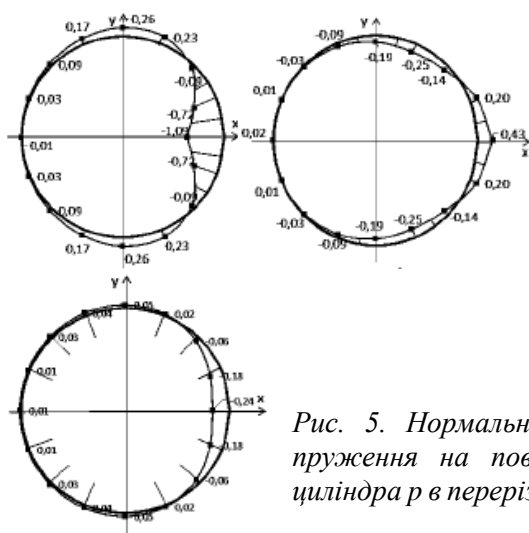


Рис. 5. Нормальні напруження на поверхні циліндра p в перерізі $z=0$

На рис.6 відображені нормальні напруження вздовж осі z в точках А, В, С, D.

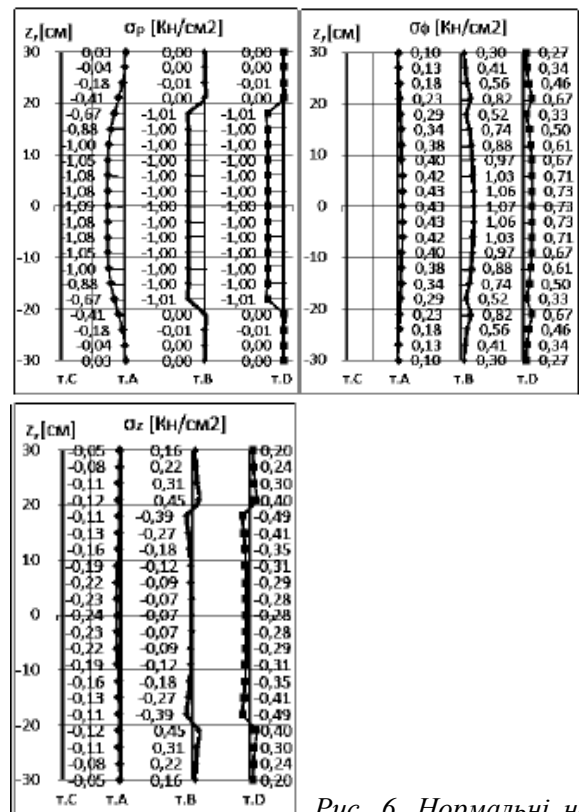


Рис. 6. Нормальні напруження σ_p вздовж осі z (при $y=0$)

Нормальні напруження σ_p на циліндрі q (точки В і D) відображають задані крайові умови, при яких на циліндрі p в т.А виникають стискаючі напруження, які з ростом z наближається до нуля.

Епюра σ_ϕ при $z=0$ см., має максимальні напруження та незначний скачок при $z = 20$ (де закінчується дія навантаження).

Напруження σ_z на циліндрі q , на відміну від циліндра p , мають максимальне значення на межі прикладення навантаження.

При наближенні, чи віддаленні циліндрів збільшується чи зменшується їх вплив один на одного. З рис.7 можливо побачити, що при наближенні циліндра q до циліндра p напруження зростають.

Висновки. Запропоновано метод розв'язання змішаної задачі для декількох паралельних кругових циліндричних порожнин в пружному просторі, коли на межах одних порожнин задано крайові умови контактного типу (нормальні переміщення і дотичні зусилля), а на інших напруження.

Метод має обґрунтування, що дає можливість стверджувати однозначну розв'язність нескінченної системи лінійних

алгебраїчних рівнянь, а також те, що розв'язок цієї системи з будь-яким ступенем точності може бути знайдено методом редукції.

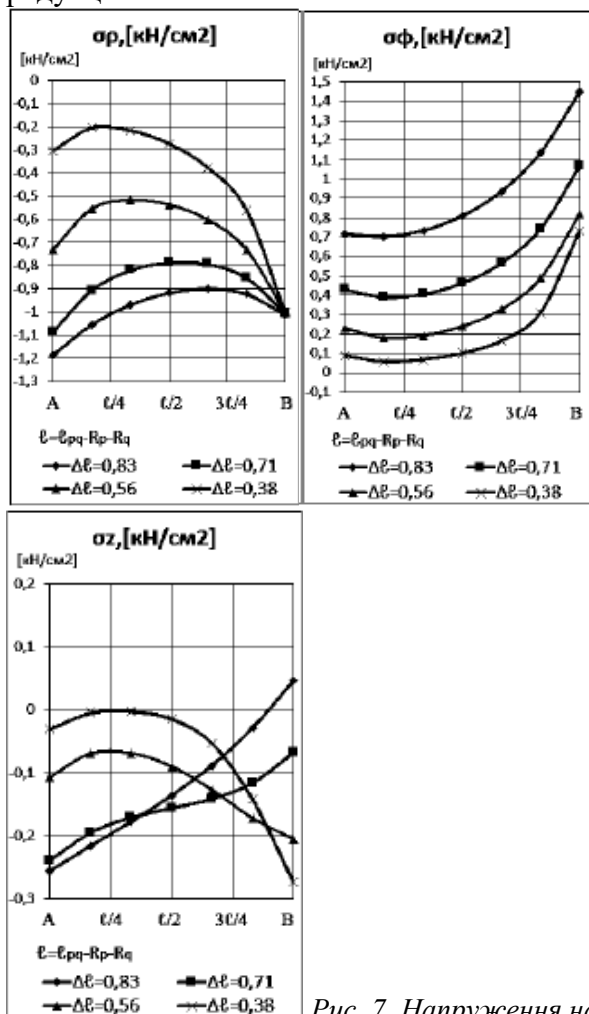


Рис. 7. Напруження на

перешийку в залежності від відстані ℓ_{rq}

Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндричних порожнин підтверджують ці обґрунтування, так як дозволяють задовольнити крайові умови задачі з заданою ступінню точності.

Наведені графіки дають уявлення про особливості розподілу переміщення і напружень в пружному тілі у найбільш цікавих зонах і про взаємний вплив циліндричних порожнин.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости [Текст]: А.И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492с.
2. Подильчук, Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости [Текст]: Ю. Н. Подильчук. – К.: Наук. Думка, 1979. – 240с.

3. Соляник-Краса, К. В. Осесимметричная задача теории упругости [Текст]: К. В. Соляник-Краса. – М.: Стройиздат, 1987. – 336с.
4. Гузь, А. Н. О решении второй плоской динамической задачи теории упругости для многосвязных областей [Текст]: А.Н. Гузь. – Прикладная механика, 1966. – Т.2., №8. – С.126 – 132.
5. Головчан, В. Т. Дифракция волны сдвига на бесконечном ряде цилиндрических полостей [Текст]: В. Т. Головчан. – Прикладная механика, 1971. – Т.7, №3. – С.41 – 46.
6. Гузь, А. Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах [Текст]: А. Н. Гузь, В. Т. Головчан. – К: Наукова Думка, 1972. – 254с.
7. Мирошников, В.Ю. Определение тензора напряжений в пространстве с цилиндрическими полостями, на которых заданы перемещения [Текст]: В. Ю. Мирошников, В. С. Проценко. – Х.: Науковий вісник будівництва. – 2005. – Вып. 34. – С.151 – 156.
8. Мірошніков, В. Ю. Друга основна задача теорії пружності в просторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст]: В. Ю. Мірошніков. – Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – 2017. – № 1(50). – С. 92 – 96.
9. Мірошніков, В. Ю. Третя основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст]: В. Ю. Мірошніков. – Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2017. – Вып. 2 (90). – С. 89 – 103
10. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями [Текст]: А. Г. Николаев, Е. А. Танчик. – Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2013. – вып.4. – С.40 – 49.
11. Николаев, А. Г. Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами [Текст]: А. Г. Николаев, Е. А. Танчик. – Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 6 (103). – С.32 – 38.
12. Николаев, А. Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами [Текст]: А. Г. Николаев, Е. А. Танчик. – Одесса: Вісник Од. Нац. Ун-ту. Мат. І мех. – 2013. – Т.18. вип. 4(20). – С. 101 – 111.

13. Николаев, А. Г. Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с N цилиндрическими полостями [Текст]: А. Г. Николаев, Е. А. Танчик. – Сибирский журнал вычислительной математики. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 177 – 189.
14. Николаев, А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст]: А. Г. Николаев, В. С. Проценко. – Х.: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2011. – 344с.
15. Meleshko, V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings [Text]: V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy. – J.Eng. Math. – 2013.– V. 78. – P.143 – 166.
16. Khoroshun, L. P. Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites [Text]: L. P. Khoroshun. – International Applied Mechanics. – 2000. – V.36, №10. – P.1284 – 1316.
17. Мирошников, В. Ю. Визначення НДС в пружньому напівпросторі з циліндровими порожнинами, які задані в циліндричних системах координат та межею напівпростору, яка задана в декартовій системі координат [Текст]: В. Ю. Мірошніков, А. В. Медведєва, С. О. Ворончїхіна, С. В. Олешкевич. – Науковий вісник будівництва. – 2014. – Вип. 2. – С.81 – 85.

Мирошников В.Ю. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ И НЕКОТОРЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНТАКТНОГО ТИПА.

Приведено решение трехмерной задачи теории упругости, когда на границах одних параллельных цилиндрических полостей заданы напряжения, а на границах других касательные усилия и нормальные перемещения. Решение системы уравнений Ламе получено обобщенным методом Фурье в цилиндрических координатах, связанных с цилиндрами. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, к которым сведена проблема, решаются методом усечения. В результате были найдены перемещения и напряжения в упругом теле. Числовые результаты приведены для случая двух цилиндров.

Ключевые слова: цилиндрические полости в пространстве, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье.

Miroshnikov V.Yu. THE MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A SPACE WITH CYLINDRICAL CAVITIES AND CERTAIN BOUNDARY CONDITIONS OF CONTACT TYPE. The solution of the three-dimensional problem of the theory of elasticity is given, when stresses are given at the boundaries of some parallel cylindrical cavities, and tangential forces and normal displacements on the boundaries of others. The solution of the Lamé system of equations is obtained by the generalized Fourier method in cylindrical coordinates connected with cylinders. Infinite systems of linear algebraic equations, to which the problem is reduced, are solved by truncation. As a result, displacements and stresses in the elastic body were found. Numerical results are given for the case of two cylinders.

Keywords: cylindrical cavities in space, Lamé equations, generalized Fourier method.

DOI: 10.29295/2311-7257-2018-93-3-163-167

УДК 539.3

Семененко Н.В., Бессмертный С.И., Лылка А.М., Нечволод О.О.

*Харківський національний університет будівництва та архітектури
(вул. Сумська, 40, Харків, 61002, Україна; e-mail: strojneh_kstuca@gmail.com)*

ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР ТЕОРИЙ РАСЧЕТА ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Задача определения напряженно-деформированного состояния торовых оболочек под действием внутреннего давления и радиальных сил приложенных по внешнему и внутреннему экватору является актуальной, имеет практическое значение. Решается в постановке на основе безмоментной теории осесимметричной деформации оболочек с использованием дифференциальных уравнений краевого эффекта. Получены значения внутренних усилий и деформаций. Определены соответствующие напряжения, которые позволяют аналитически определить запас прочности рассматриваемой такого вида комбинированной конструкции.