

гражданские объекты, расположенные в городской застройке. При этом неиспользуемые земельные участки в городах открывают резервы для их оживления.

**Ключевые слова:** особенности, ревитализация, подземные коммуникации, специфичность работ, восстановление, территории, модификация, редевелопмент.

**Karzhnerova T., Karzhnerova O. MODERN EXPERIENCE OF THE REVITALIZATION OF URBAN AREAS.** The article highlights the is-

sues of reliable functioning of the city space, modern tendencies of renovation and industrial buildings for civilian objects located in urban development. At the same time, unused land plots in the cities open up reserves for their revitalization.

**Key words:** particular qualities, revitalization, underground communications, specificity of works, restoration, territories, modification, redevelopment.

DOI: 10.29295/2311-7257-2018-94-4-82-94  
УДК 539.3

**Мірошніков В.Ю., Олешкевич С.В., Савін О.Б., Медведєва А.В.**

*Харківський національний університет будівництва та архітектури*

(вул. Сумська, 40, Харків, 61002; e-mail: [m0672628781@gmail.com](mailto:m0672628781@gmail.com), [oleshkoc@ukr.net](mailto:oleshkoc@ukr.net),  
[sint1@3s.kharkov.ua](mailto:sint1@3s.kharkov.ua), [nursus@ukr.net](mailto:nursus@ukr.net); [orcid.org/0000-0002-9491-0181](https://orcid.org/0000-0002-9491-0181); [orcid.org/0000-0001-6670-4754](https://orcid.org/0000-0001-6670-4754);  
[orcid.org/0000-0002-2664-0255](https://orcid.org/0000-0002-2664-0255); [orcid.org/0000-0002-7681-2190](https://orcid.org/0000-0002-7681-2190))

### ЗМІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ ТА ДЕЯКИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ КОНТАКТНОГО ТИПУ

Для півпростору з циліндричними порожнинами розраховано тривимірну задачу теорії пружності зі змішаними крайовими умовами. На межах одних циліндричних порожнин задані напруження, на межах інших порожнин переміщення, на межі півпростору задані нормальні переміщення та дотичні зусилля. За допомогою узагальненого методу Фур'є знайдено розв'язок системи рівнянь Ламе. Циліндричні порожнини розглядаються в циліндричних координатах, півпростір в декартових координатах. Проблему зведено до нескінченної системи рівнянь, яка була усічена. В результаті розрахування системи рівнянь знайдені невідомі функції, за допомогою яких було отримано переміщення та напруження в пружному тілі. Числові результати наведено для випадку півпростору та двох циліндрів. Проведений аналіз напруженого стану дає уявлення про вплив на нього граничних умов різного типу та розподіл напружень навколо порожнин при різних відстанях між границями тіла.

**Ключові слова:** циліндричні порожнини в півпросторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є, крайові умови контактного типу.

**Вступ.** При проектуванні конструкцій з круговими циліндричними порожнинами та різними крайовими умовами на їх межах, у тому числі крайових умов контактного типу, необхідно мати уявлення про виникаючий в тілі напружено – деформований стан. Таку інформацію можна отримати, розв'язавши відповідну задачу теорії пруж-

ності. В даній роботі запропоновано аналітико – чисельний метод розв'язання задачі для півпростору з порожнинами паралельними між собою і поверхнею півпростору, якщо на межі півпростору задані нормальні переміщення та дотичні зусилля, на межах одних циліндричних порожнин задані напруження, на межах інших порожнин переміщення.

В науковій літературі є наближені до цієї проблеми роботи.

В [1-5] розглядається дифракція хвиль в просторі або в півпросторі з однією циліндричною порожниною. Ці роботи базуються на методі розділення змінних, методі Фур'є, застосовується комформне перетворення та коллокаційна схема найменшого квадрату. Однак ці методи дозволяють розрахувати задачі фактично тільки в площині та для однієї циліндричної порожнини.

Для розрахунку напружено – деформованого стану півпростору з циліндричними порожнинами в більшості наукових робіт застосовується метод кінцевих елементів [6-7], що є наближеним методом розрахунку та не враховує нескінчених границь пружного тіла.

Аналітичні методи задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями, вивчалися в роботах [8-11]. В цих роботах розв'язки отримані методом розділення змінних і методом Фур'є, але цей метод не дозволяє розв'язувати задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями. Для таких задач необхідно використовувати узагальнений метод Фур'є [12], який і був покладений в основу підходу до розв'язку розглянутої задачі в цій роботі.

На основі узагальненого методу Фур'є також було розв'язано першу основну задачу теорії пружності для простору [13], першу основну задачу теорії пружності для трансверсально - ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями в циліндричних і параболоїдних координатах [14 – 18], першу та другу основну задачу теорії пружності для півпростору з однією циліндричною порожниною [19 – 21], першу та другу основну задачу теорії пружності для півпростору з декількома циліндричними порожнинами [22 – 23]. Але алгоритми розрахунку цих робіт не дозволяють розв'язати задачу зі змішаними умовами та умовами контактного типу.

Задачу для простору з циліндричними порожнинами, на яких задані граничні умови контактного типу [24] та змішану задачу для простору [25], в якій на поверхні однієї з циліндричних порожнин прикладені граничні умови контактного типу розв'язано також за допомогою метода Фур'є. Але ці алгоритми не дозволяють розв'язати задачу для півпростору.

Метою цієї роботи є розрахунок змішаної задачі для півпростору з циліндричними порожнинами, паралельними між собою і межею півпростору, коли на межах одних циліндричних порожнин задані напруження, на межах інших порожнин переміщення, на межі півпростору задані умови контактного типу (радіальні переміщення та дотичні напруження). Необхідно провести аналіз напружено – деформованого стану півпростору при окремо «навантажених» елементах (межі півпростору, або межі циліндрів), провести аналіз впливу на напружений стан відстані між циліндрами та межею півпростору.

**Основний матеріал. Постановка задачі.** Маємо пружний однорідний півпростір, який будемо розглядати у декартовій системі координат  $(x, y, z)$ . В цьому півпросторі, у циліндричній системі координат  $(\rho_p, \varphi_p, z)$ , де  $p$  – номер циліндра), розташовано  $N$  кругових циліндричних порожнин. Циліндричні порожнини паралельні між собою і межею півпростору, яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра з номером  $p=1$  (рис.1).

Межа півпростору розташована на відстані  $y=h$ , рівняння поверхні циліндрів  $\rho_p = R_p, p = 1, 2, \dots, N$ . На межах одних порожнин (їх кількість  $N_1$ ) задані напруження  $\vec{f}_q(x, z)$ , на межах інших порожнин (їх кількість  $N_2$ ) задані переміщення  $\vec{U}_p^0(x, z)$ ,  $N_1 + N_2 = N$ . На межі півпростору задані умови контактного типу

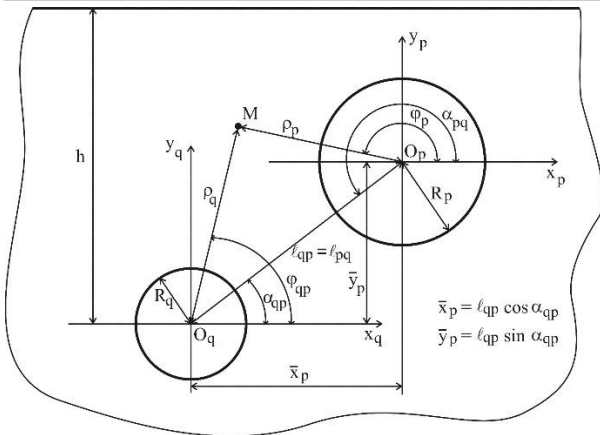


Рис. 1. Півпростір із циліндричними порожнинами

$$\left. \begin{aligned} U_y(x, z)|_{y=h} &= U_0^{(d)}(x, z), \\ \tau_{yx}|_{y=h} &= \tau_1^{(d)}(x, z), \\ \tau_{yz}|_{y=h} &= \tau_2^{(d)}(x, z) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де праві частини цих рівностей відомі функції.

Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе  $\Delta \bar{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \text{div} \bar{u} = 0$ .

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті  $z$  для циліндрів та по координатах  $x$  і  $z$  для півпростору.

Метод розв'язання. Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [12]:

$$\bar{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu); \quad (2)$$

$(k = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{k,m}(M_p; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)}; \\ \bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) &= N_k^{(p)} [s_m(\rho_p; \lambda) \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)}], \end{aligned} \quad (3)$$

$k = 1, 2, 3;$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot);$$

$$N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(1)} \cdot);$$

$$u^\pm(M_d; \lambda, \mu) = e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]$$

$$N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(2)} \cdot);$$

$$s_m(\rho_p; \lambda) = (\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho_p);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де  $M_d = (x, y, z)$ ,  $M_p = (\rho_p, \phi_p, z)$  – точки простору, відповідно в декартовій системі координат та в циліндричній системі координат, пов'язаній з  $p$  – м циліндром;  $\bar{e}_j^{(k)}$ , ( $j = 1, 2, 3$ ) – орти декартової ( $k=1$ ) і циліндричної ( $k=2$ ) систем координат;  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона;  $I_m(x)$ ,  $K_m(x)$  – модифіковані функції Бесселя;

$\bar{R}_{k,m}$ ,  $\bar{S}_{k,m}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра;  $\bar{u}_k^{(-)}$ ,  $\bar{u}_k^{(+)}$  – розв'язки рівняння Ламе для півпростору.

Розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$  і  $\bar{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu)$  базисні розв'язки, які задані формулами (2) і (3), а невідомі функції  $H_k(\lambda, \mu)$  і  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу між системами координат (рис.1) скористаємось формулами:

- для переходу від координат циліндра з номером  $p$  до координат півпростору узагальнено формулу [19, ф-ла (4)]

$$\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \text{sign}(\lambda))^m}{2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \bar{u}_k^{(-)} \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3;$$

$$\bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \text{sign}(\lambda))^m}{2} \times \quad (5)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \left( \left( m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} + \lambda^2 y_p \right) \bar{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \bar{u}_2^{(-)} + 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(-)} \right) \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},$$

де  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ ,  $\omega(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda}$ ,  $y > 0$ ,

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

- для переходу від координат півпростору до координат циліндра  $p$  узагальнено формулу [19, ф-ла (5)]

$$\bar{u}_k^{(+)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega)^m \bar{R}_{k,m}(M_p) \cdot e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p},$$

( $k=1, 3$ );

$$\bar{u}_2^{(+)} = e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (i \cdot \omega)^m \cdot \lambda^{-2} \quad (6)$$

$$\left( (m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m}(M_p) + \gamma \cdot \bar{R}_{2,m}(M_p) + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m}(M_p) \right) \right],$$

де  $\bar{R}_{k,m}(M_p) = \bar{b}_{k,m}(\rho_p, \lambda) \cdot e^{i(m\phi_p + \lambda z)}$ ;

$\bar{x}_p, \bar{y}_p$  – координати циліндра  $p$  відносно циліндра під номером 1.

$$\bar{b}_{1,n}(\rho_p, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda \rho_p) + i \cdot I_n(\lambda \rho_p) \cdot \left( \bar{e}_\phi \frac{n}{\lambda \rho_p} + \bar{e}_z \right);$$

$$\bar{b}_{2,n}(\rho_p, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot \left[ (4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda \rho_p) + \lambda \rho_p I''_n(\lambda \rho_p) \right] + \bar{e}_\phi \cdot i \cdot m \left( I'_n(\lambda \rho_p) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho_p} I_n(\lambda \rho_p) \right) + \bar{e}_z \cdot i \lambda \rho_p I'_n(\lambda \rho_p);$$

$$\bar{b}_{3,n}(\rho_p, \lambda) = - \left[ \bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda \rho_p) \frac{n}{\lambda \rho_p} + \bar{e}_\phi \cdot i \cdot I'_n(\lambda \rho_p) \right];$$

, де  $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\phi, \bar{e}_z$  – орти в циліндричній системі координат;

- для переходу від координат циліндра  $p$  до координат циліндра 1 [12]

$$\bar{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_{k,p1}^{mn}(\rho_1) \cdot e^{i(n\phi + \lambda z)},$$

$k=1, 2, 3$

$$\bar{b}_{1,p1}^{mn}(\rho_1) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{p1}) \times$$

$$\times e^{i(m-n)\alpha_{p1}} \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_1, \lambda)$$

$$\bar{b}_{3,p1}^{mn}(\rho_1) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{p1}) \times$$

$$\times e^{i(m-n)\alpha_{p1}} \cdot \bar{b}_{3,n}(\rho_1, \lambda) \quad (7)$$

$$\bar{b}_{2,p1}^{mn}(\rho_1) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{p1}) \cdot \bar{b}_{2,n}(\rho_1, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{p1} \cdot \left[ \tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{p1}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{p1}) \right] \cdot \bar{b}_{1,n}(\rho_1, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{p1}},$$

де  $\alpha_{p1}$  – кут між віссю координат  $x_1$  та від-

різком  $\ell_{1p}$ ,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$ .

Для виконання граничних умов на межі півпростору  $y=h$ , праву частину (4) за допомогою формул переходу (5) перепишемо у декартовій системі координат через

базисні розв'язки  $\bar{u}_k^{(-)}$ . Отриманий вектор

прирівняємо (при  $y=h$ ) заданому (1). Функції  $U_0^{(d)}(x, z)$ ,  $\tau_1^{(d)}(x, z)$ ,  $\tau_2^{(d)}(x, z)$ , та век-

тори  $\bar{f}_q(\varphi, z) = \tau_{\rho\phi}^{(q)} \bar{e}_1^{(2)} + \sigma_\rho^{(q)} \bar{e}_2^{(2)} + \tau_{\rho z}^{(q)} \bar{e}_3^{(2)}$  і

$$\bar{U}^0(\varphi, z) = U_\rho^{(p)} \bar{e}_1^{(2)} + U_\phi^{(p)} \bar{e}_2^{(2)} + U_z^{(p)} \bar{e}_3^{(2)}$$

попередньо представимо подвійним інтегралом Фур'є. В результаті з отриманих рівнянь знайдемо функції  $H_k(\lambda, \mu)$  через

$$B_{k,m}^{(p)}(\lambda).$$

Користуючись формулами переходу, від декартової системи до циліндричної (6), а також від одного циліндра до іншого (7), перепишемо (4) в координатах циліндра з номером  $p$  через базисні розв'язки  $\bar{R}_{k,m}$ ,  $\bar{S}_{k,m}$ . Якщо тепер знайти  $\bar{U}_p^0(x, z)$  (при заданих на межі циліндра переміщеннях) або  $\bar{f}_q(x, z)$  (при заданих на межі циліндра напруженнях) для правої частини рівності (4) на поверхні кожної циліндричної порожнини і врахувати граничні умови (1), то отримаємо систему рівнянь для коефіцієнтів  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ , в яку входять функції  $H_k(\lambda, \mu)$ , для кожної порожнини  $p$ . Авторами було доведено, що визначник цієї системи не дорівнює нулю, більш того для  $m=0$   $|\Delta_0| = 8(1-\sigma) \cdot x^2 \cdot K_1^2(x) \cdot K_2(x)$ , для  $m \geq 1$   $|\Delta_m| > 4m \cdot K_{m-1}(x) K_m(x) K_{m+1}(x)$ ,  $x = |\lambda| \rho$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Функції  $H_k(\lambda, \mu)$ , виражені через  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ , підставимо у рівняння для виразів  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ . В результаті отримаємо сукупність із  $N \cdot 3$  нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Для отриманих систем, використовуючи нерівність (8), доведено їх однозначну розв'язність. Більш того, ці системи можна вирішувати методом усічення і має місто збіжність наближених рішень до точного. Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції  $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$  підставимо у вирази для  $H_k(\lambda, \mu)$ . Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

**Числові результати для двох циліндрів.** Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у півпросторі, які розташовані на горизонтальній осі ( $\alpha_{qp} = 0$ ), радіусами

$R_q = R_p = 10 \text{ см}$ . (рис. 1). Півпростір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона  $\sigma = 0,35$ , модуль пружності  $E = 2 \text{ кН} / \text{см}^2$ .

Було розраховано декілька варіантів задач з різними граничними умовами та різними геометричними характеристиками. Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої по параметру  $m$  – порядок системи. Вплив значення параметра  $m$  досліджено у [19]. Межі інтеграції для заданих граничних функцій були узяті від  $-1 \dots 1$ . Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Точність виконання граничних умов при заданих геометричних параметрах була доведена до  $10^{-3}$  (за рахунок параметру  $m$ ).

**Варіант 1.** На межі півпростору задано умови контактного типу  $U_y^{(d)} = 0$ ,  $\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$ . На межі циліндра  $q$  задано напруження  $\sigma_{\rho}^{(q)}(\varphi_q, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$ ,  $\tau_{\rho\varphi}^{(q)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0$ , на межі циліндра  $p$  задані переміщення  $U_{\rho}^{(p)}(\varphi_p, z) = U_{\varphi}^{(p)}(\varphi_p, z) = U_z^{(p)}(\varphi_p, z) = 0$ .

На рис.2 представлений графік нормальних напружень на прямій  $x=0$  між циліндром  $q$  і межею півпростору, при геометричних параметрах: на рис.2а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40 \text{ см}$ ., циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 50 \text{ см}$ ; на рис.2б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20 \text{ см}$ ., циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 30 \text{ см}$ .

Найбільш напружений стан знаходиться на поверхні «навантаженого» циліндра  $q$  та наближаючись до півпростору напруження затухають. Зважаючи на те, що на межі півпростору задано  $U_y^{(d)} = 0$ , при  $h=40 \text{ см}$ , напруження  $\sigma_{\rho} = 0,102 \text{ кН} / \text{см}^2$  (рис 2а). Наближаючи граничні поверхні

одна до одній (рис.2б) напруження  $\sigma_r$  та  $\sigma_\phi$  зростає, а  $\sigma_z$  навпаки зменшується.

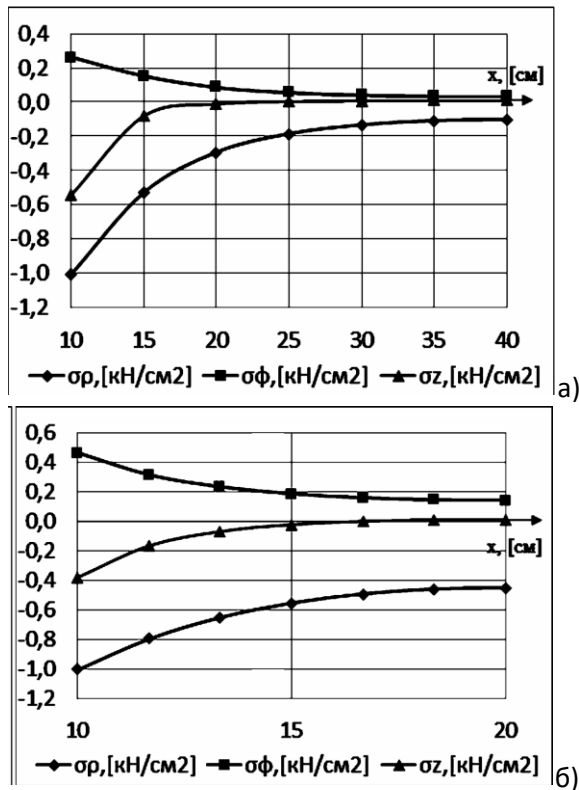


Рис.2. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$  в площині  $z = 0$  на прямій  $x=0$  між циліндром  $q$  і межею півпростору: а – при  $h=40$  см.,  $l_{qp} = 50$  см.; б – при  $h=20$  см.,  $l_{qp} = 30$  см.

На рис.3 представлений графік нормальних напружень на відрізку  $O_q O_p$  між циліндрами, при геометричних параметрах: на рис.3а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см, циліндри на відстані  $l_{qp} = 50$  см; на рис.3б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $l_{qp} = 30$  см.

На перехийку між циліндрами напруження  $\sigma_r$  майже не відрізняються від напруження  $\sigma_\phi$  на перехийку між циліндром  $q$  та межею півпростору. Напруження  $\sigma_\phi$  тепер мають на поверхні циліндра  $p$  стискаючі зусилля, напруження  $\sigma_z$  також не дорівнюють нулю та мають стискаючі

зусилля (рис.3а). Якщо наблизити граничні поверхні одна до одній ( $l_{qp} = 30$  см.), в цьому випадку на поверхні циліндра  $p$  всі нормальні напруження збільшуються (рис.3б).

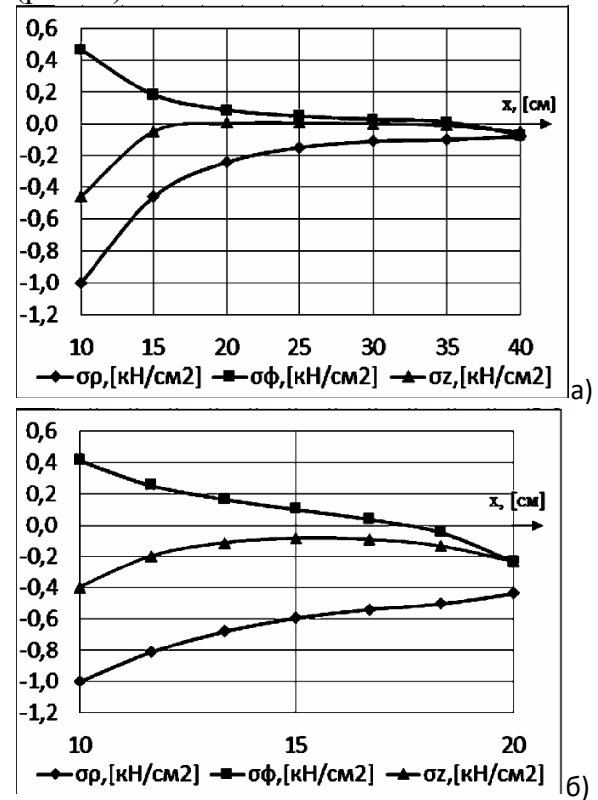


Рис.3. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$  в площині  $z = 0$  на відрізку  $O_q O_p$  між циліндрами: а – при  $h = 40$  см.,  $l_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см.,  $l_{qp} = 30$  см.

На рис.4 представлений графік нормальних напружень на прямій  $x = \bar{x}_p$  між циліндром  $p$  і межею півпростору, при геометричних параметрах: на рис.4а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см., циліндри на відстані  $l_{qp} = 50$  см.; на рис.4б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см., циліндри на відстані  $l_{qp} = 30$  см.

На перехийку між циліндром  $p$  та межею півпростору максимальні напруження виникають на межі циліндра  $p$ , та наближа-

ючись до півпростору напруження згортаються. Наближаючи граничні поверхні одна до одній (рис. 4б) напруження  $\sigma_r$  та  $\sigma_\varphi$  зростає на всьому перешійку, а  $\sigma_z$  навпаки зменшується.

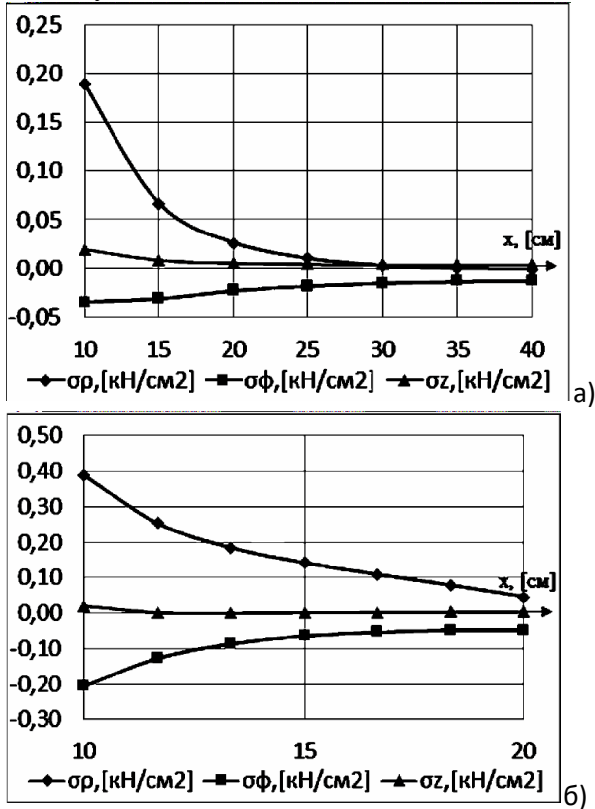


Рис.4. Нормальні напруження в координатах циліндра  $p$  в площині  $z = 0$  на прямій  $x = \bar{x}_p$  між циліндром  $p$  і межею півпростору: а – при  $h = 40$  см.,  $l_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см.,  $l_{qp} = 30$  см.

**Варіант 2.** На межі півпростору задано умови контактного типу  $U_y^{(d)} = 0$ ,  $\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$ . На межі циліндра  $q$  задано напруження  $\sigma_r^{(q)} = \tau_{r\varphi}^{(q)} = \tau_{rz}^{(q)} = 0$ , на межі циліндра  $p$  задані переміщення  $U_\rho^{(p)}(\varphi_p, z) = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$ ,  $U_\varphi^{(p)}(\varphi_p, z) = U_z^{(p)}(\varphi_p, z) = 0$ .

На рис. 5 представлений графік нормальних напружень на прямій  $x=0$  між циліндром  $q$  і межею півпростору, при геометричних параметрах: на рис. 5а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см, циліндри на відстані  $l_{qp} = 50$  см; на рис. 5б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $l_{qp} = 30$  см.

На цьому перешійку напруження достатньо малі у зв'язку з тим, що «навантаженим» є інший циліндр. Найбільший вплив позначається на  $\sigma_\varphi$  (рис. 5а), яке є максимальним на циліндрі  $q$  та з наближенням граничних поверхонь одна до одної зростає (рис. 5б).

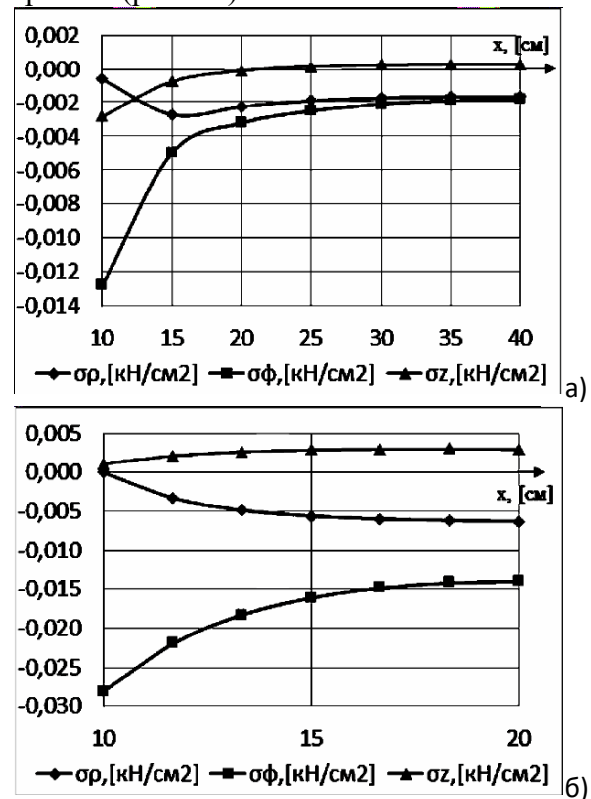
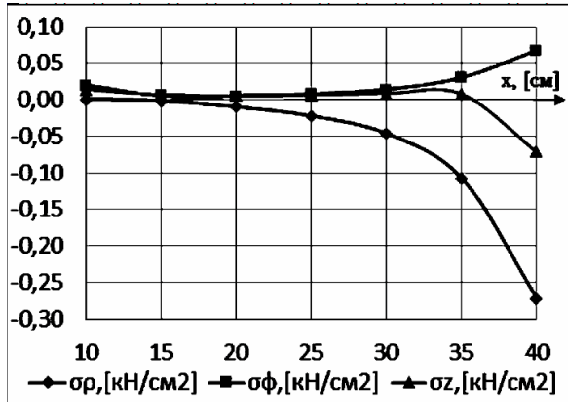


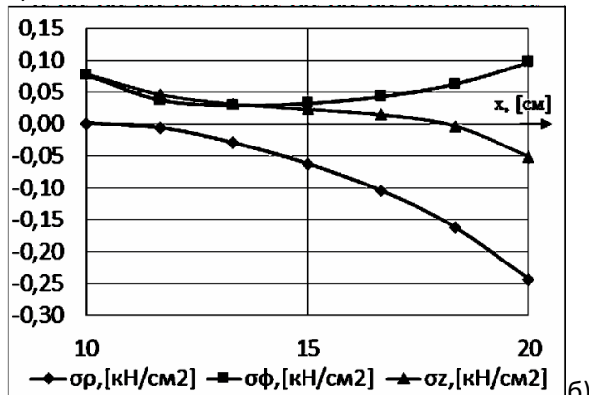
Рис. 5. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$  в площині  $z = 0$  на прямій  $x=0$  між циліндром  $q$  і межею півпростору: а – при  $h = 40$  см.,  $l_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см.,  $l_{qp} = 30$  см.

На рис.6 представлений графік нормальних напружень на відрізку  $O_q O_p$  між

циліндрами, при геометричних параметрах: на рис. 6а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 50$  см; на рис. 6б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 30$  см.



а)

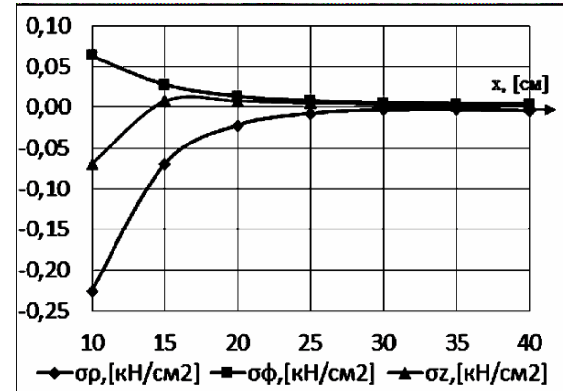


б)

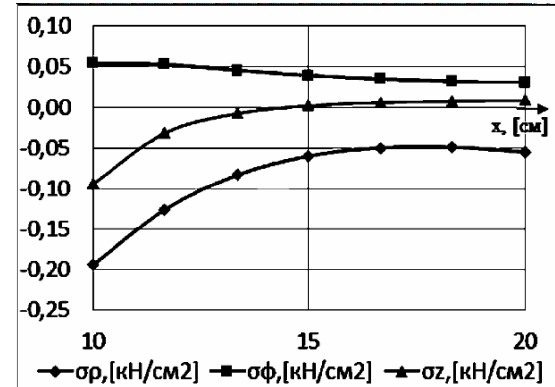
Рис.6. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$  в площині  $z = 0$  на відрізку  $O_q O_p$  між циліндрами: а – при  $h = 40$  см,  $\ell_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см,  $\ell_{qp} = 30$  см.

Найбільш напружений стан знаходиться на поверхні «навантаженого» циліндра  $p$ . На поверхні циліндра  $\sigma_\rho = -0,271$  кН/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = 0,066$  кН/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,071$  кН/см<sup>2</sup>. З наближенням граничних поверхонь одна до одної (рис. 6б) напруження  $\sigma_\phi = 0,097$  кН/см<sup>2</sup> (зростають), напруження  $\sigma_\rho = -0,243$  кН/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,051$  кН/см<sup>2</sup> (зменшуються), що є наслідком наближення незакріпленого циліндра.

На рис. 7 представлений графік нормальних напружень на прямій  $x = \bar{x}_p$  між циліндром  $p$  і межею півпростору, при геометричних параметрах: на рис. 7а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 50$  см; на рис. 7б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 30$  см.



а)



б)

Рис.7. Нормальні напруження в координатах циліндра  $p$  в площині  $z = 0$  на прямій  $x = \bar{x}_p$  між циліндром  $p$  і межею півпростору: а – при  $h = 40$  см,  $\ell_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см,  $\ell_{qp} = 30$  см.

Найбільш напружений стан знаходиться на поверхні «навантаженого» циліндра  $p$ . На поверхні циліндра  $\sigma_\rho = -0,226$  кН/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\phi = 0,064$  кН/см<sup>2</sup>,  $\sigma_z = -0,069$  кН/см<sup>2</sup>. З наближенням граничних поверхонь одна до одної (рис. 7б) напруження



$\sigma_z = -0,094$  КН/см<sup>2</sup> (зростають), напруження  $\sigma_p = -0,195$  КН/см<sup>2</sup>,  $\sigma_\varphi = 0,054$  КН/см<sup>2</sup> (зменшуються), що характеризує вплив граничних умов контактного типу на закріплений циліндр. На поверхні півпростору з наближенням граничних поверхонь напруження  $\sigma_p$  зростають з  $\sigma_p = -0,005$  КН/см<sup>2</sup> до  $\sigma_p = -0,055$  КН/см<sup>2</sup>, напруження  $\sigma_\varphi$  зростають з  $\sigma_\varphi = 0,003$  КН/см<sup>2</sup> до  $\sigma_\varphi = 0,031$  КН/см<sup>2</sup>, напруження  $\sigma_z$  зростають з  $\sigma_z = 0,003$  КН/см<sup>2</sup> до  $\sigma_z = 0,009$  КН/см<sup>2</sup>.

**Варіант 3.** На межі півпростору задано умови контактного типу  $U_y^{(d)} = -\left(10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2\right) \cdot \left(10^{-4} \cdot ((x - \ell_{qp}/2)^2 + 10^2)^2\right)$ , яке, при  $h = 40$  см.,  $\ell_{qp} = 50$  см. візуально зображене на рис. 8,  $\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$ . На межі циліндра  $q$  задано напруження  $\sigma_p^{(q)} = \tau_{p\varphi}^{(q)} = \tau_{pz}^{(q)} = 0$ , на межі циліндра  $p$  задані переміщення  $U_p^{(p)}(\varphi_p, z) = U_\varphi^{(p)}(\varphi_p, z) = U_z^{(p)}(\varphi_p, z) = 0$ .

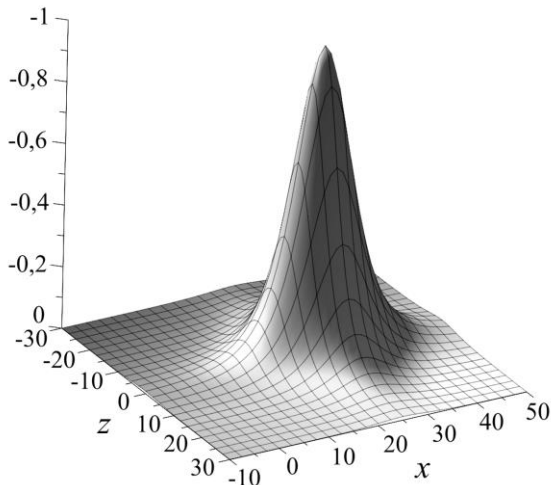


Рис.8. Функція нормального переміщення, що задана на поверхні півпростору

На рис.9 представлений графік нормальних напружень на прямій  $x=0$  між ци-

ліндром  $q$  і межею півпростору, при геометричних параметрах: на рис.9а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 50$  см.; на рис. 9б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 30$  см.

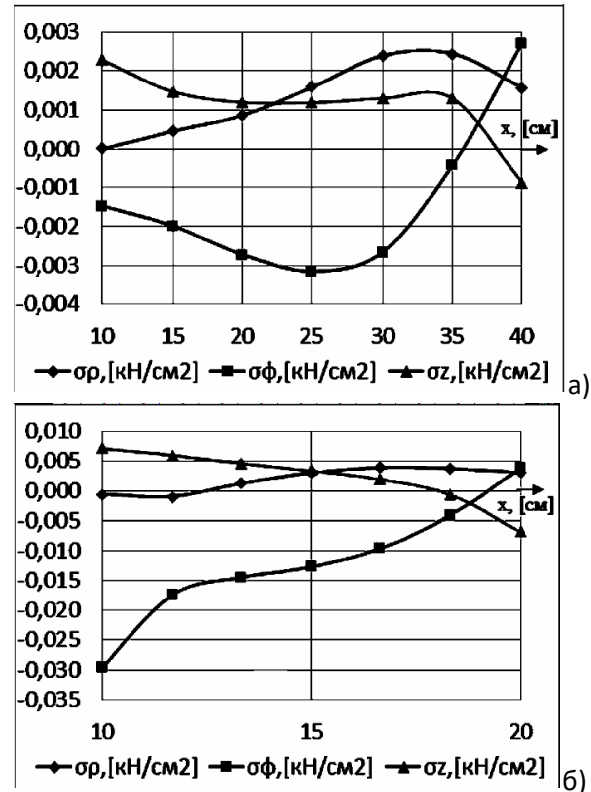


Рис.9. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$  в площині  $z = 0$  на прямій  $x=0$  між циліндром  $q$  і межею півпростору: а – при  $h=40$  см,  $\ell_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см,  $\ell_{qp} = 30$  см.

На межі півпростору прикладені ненульові переміщення, але як видно з рис.8 переміщення при  $x=0$  на межі півпростору дуже малі, тому нормальні напруження на прямій  $x=0$  мають не великі значення (рис. 9а). Посередині між циліндром  $q$  та межею півпростору має місце збільшення напруження  $\sigma_\varphi$  (рис. 9а) за рахунок суттєво зростаючого переміщення з максимумом в  $x=25$  см. З наближенням граничних

поверхонь одна до одної напруження  $\sigma_\varphi$  та  $\sigma_z$  суттєво зростають (рис. 9б).

На рис. 10 представлений графік нормальних напружень на відрізку  $O_q O_p$  між циліндрами, при геометричних параметрах: на рис. 10а межа півпростору розташована на відстані  $h = 40$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 50$  см.; на рис. 10б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 30$  см.

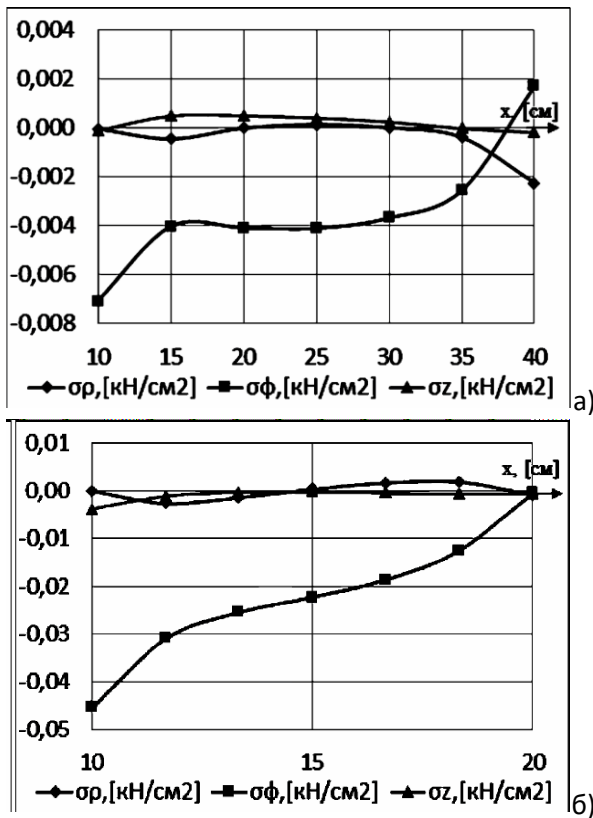


Рис.10. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$  в площині  $z = 0$  на відрізку  $O_q O_p$  між циліндрами: а – при  $h = 40$  см,  $\ell_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см,  $\ell_{qp} = 30$  см.

На перешийку між циліндрами найбільшими напруженнями є  $\sigma_\varphi$  (рис. 10а), з наближенням граничних поверхонь одна до одної  $\sigma_\varphi$  суттєво зростає. Особливо зріст

$\sigma_\varphi$  відчувається на циліндрі  $q$ , що є наслідком відсутності його закріплення, на відміну від циліндра  $p$ .

На рис. 11 представлений графік нормальних напружень на прямій  $x = \bar{x}_p$  між циліндром  $p$  і межею півпростору, при геометричних параметрах: на рис. 11а межа півпростору розташована на відстані  $h=40$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 50$  см.; на рис. 11б межа півпростору розташована на відстані  $h = 20$  см, циліндри на відстані  $\ell_{qp} = 30$  см.

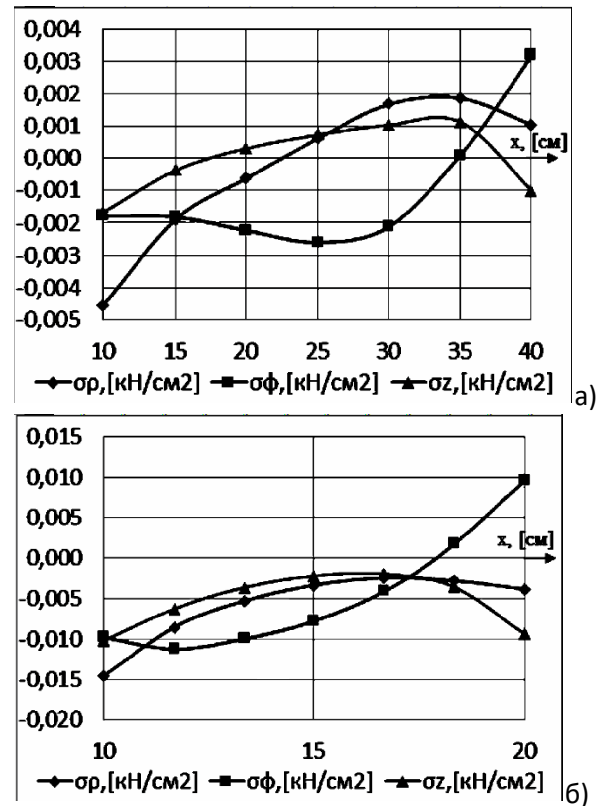


Рис.11. Нормальні напруження в координатах циліндра  $p$  в площині  $z = 0$  на прямій  $x = \bar{x}_p$  між циліндром  $p$  і межею півпростору: а – при  $h = 40$  см,  $\ell_{qp} = 50$  см.; б – при  $h = 20$  см,  $\ell_{qp} = 30$  см.

Напруження на перешийку між циліндром  $p$  та межею півпростору також мають не великі значення у зв'язку з віддале-

ністю «навантаження». Найбільшим напруженням на циліндрі  $p$  є напруження  $\sigma_p = 0,0045$  КН/см<sup>2</sup>, на межі півпростору  $\sigma_\varphi = 0,0032$  КН/см<sup>2</sup> (рис. 11а). При наближенні граничних поверхонь одна до одної всі напруження зростають (рис.11б), при цьому  $\sigma_p$  стає стискаючим.

**Обговорення отриманих результатів.** На основі узагальненого методу Фур'є розроблений аналітико-чисельний алгоритм розрахунку просторової задачі теорії пружності. Алгоритм передбачає наступні граничні умови: на межі півпростору умови контактного типу у вигляді нормальних переміщень та дотичних напружень, на межах одних паралельних циліндричних порожнинах – переміщення, на межах інших паралельних циліндричних порожнинах – напруження. Розроблений алгоритм дозволяє розраховувати задачі з подібними граничними умовами із наперед заданою точністю (в залежності від параметра  $m$ ) та може використовуватись для проектування різного роду конструкцій.

Числові дослідження алгебраїчної системи для півпростору і двох циліндрів дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов. Для геометричних параметрів розв'язаної задачі ( $R_1/h=0,25$ ;  $(R_1+R_2)/l_{12}=0,4$ ) при  $m=8$  граничні умови виконуються з точністю  $10^{-3}$ . При збільшенні порядку системи  $m$  точність розрахунків буде збільшена.

В порівнянні з роботами [1–11] запропонований алгоритм дає можливість отримати точний розв'язок подібної задачі, а в порівнянні з [13–24] урахувати граничні умови контактного типу а також межу півпростору.

Серед недоліків слід зазначити, що зі зменшенням відстані між границями тіла

алгоритм стає менш ефективним, так як потребує збільшення порядку системи  $m$  і відповідно збільшення часу на обчислення інтегралів матричних елементів. Також алгоритм не дає можливості розв'язати задачі, коли границі тіла дотикаються або перетинаються.

**Висновки.** Необхідний подальший розвиток дослідження з цього напрямку для розв'язання подібних задач з іншими недослідженими крайовими умовами. Наприклад, періодичні функції або зосереджене навантаження за відсутності алгоритмів з точними аналітичними методами зовсім не досліджені, але при проектуванні конструкцій зустрічається в розрахункових схемах.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гузь, А.Н. Дифракция упругих волн [Текст] / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко // К.: Наук. Думка. – 1978. – С. 307.
2. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах [Текст] / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // К.: Наук. Думка. – 1981. – 284 с.
3. Zhao, M. Semi-analytical Solution for the Dynamic Response of a Cylindrical Structure Embedded in a Homogeneous Half-Space [Text] / M. Zhao, K. N. van Dalen, J. M. Barbosa, A. V. Metrikine // International Symposium on Environmental Vibration and Transportation Geodynamics Environmental Vibrations and Transportation Geodynamics. – 2017. – P. 369 – 388.
4. Coskun, I. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity [Text] / Coskun I., Enginb H., Ozmutlu A. // Shock and Vibration. – 2011. – P. 827–838.
5. Yang, Z. Dynamic analysis of a cylindrical cavity in inhomogeneous elastic half-space subjected to SH waves [Text] / Z. Yang, G. Jiang, H. Tang // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2017. – P. 1081286517739520.
6. Haktan Karadeniz Z. A numerical study on the coefficients of thermal expansion of fiber reinforced composite materials [Текст]/ Z. Haktan Karadeniz and Dilek Kumlutas //

- Composite Structures. – V. 78, Issue 1. – 2007. – P. 1 – 10.
7. Nao-Aki Noda Two-dimensional and axisymmetric unit cell models in the analysis of composite materials [Текст] / Nao-Aki Noda, Yasushi Takase, Yasu-Aki Shukuwa // Composite Structures. – V. 79, Issue 2. – 2007. – P. 163 – 173 3
  8. Подильчук, Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости/ Ю.Н. Подильчук. – Київ: Наук.думка, 1979. –240 с.
  9. Гринченко, В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы/ В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – Київ: Наук.думка, 1985. –280 с.
  10. Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости/ А.Ф. Улитко.- Київ: Наук.думка, 1979. –265 с.
  11. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости/ Я.С. Уфлянд. – Ленинград:Наука, 1967. –402 с.
  12. Николаев, А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. – Х: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
  13. Мірошніков В. Ю. Перша основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст] / В. Ю. Мірошніков // Проблеми машиностроєння. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 45–52.
  14. Щербакова, Ю. А. Сравнительный анализ НДС многосвязных трансверсально-изотропных тел с различными упругими характеристиками [Текст] / Ю. А. Щербакова, Е. М. Шехватова // Вісник Запорізького національного університету. – 2015. – Вып. 2. – С. 253-261.
  15. Николаев, А. Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения [Текст] / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 160-169.
  16. Николаев, А. Г. Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида [Текст] / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2010. – Вып. 48. – С. 180-190.
  17. Николаев, А. Г. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением [Текст] / А. Г. Николаев, А. Ю. Щербакова, А. И. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2006. – Вып. 2(45). – С. 47-51.
  18. Николаев, А. Г. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью [Текст] / А. Г. Николаев, Е. М. Орлов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип.20. – С. 253-259.
  19. Проценко, В. С. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью [Текст] / В. С. Проценко, Н. А. Украинец // Вісник Запорізького національного університету. –2015 г. – Вып. 2. – С. 193-202.
  20. Проценко, В. С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью [Текст] / В. С. Проценко, Н. А. Попова // Доп. НАН України. – 2004. – №12. – С. 52-58.
  21. Мірошніков, В. Ю. Визначення НДС в пружному півпросторі з циліндровими порожнинами [Текст] / В. Ю. Мірошніков, А. В. Медведєва, С. О. Ворончїхіна, С. В. Олешкевич // Науковий вісник будівництва. – 2012. – Вип. 68. – С. 156-162.
  22. Мирощников, В. Ю. Первая основная задача теории упругости в полупространстве с несколькими параллельными круговыми цилиндрическими пустотами [Текст] / В. Ю. Мирощников // Проблеми машиностроєння. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 12-18.
  23. Мірошніков, В.Ю. Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст] / Мірошніков //

- Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2018. – Вып. 79. – С. 88 – 99.
24. Мірошніков, В.Ю. Змішана задача теорії пружності для простору з циліндричними порожнинами та деякими крайовими умовами контактного типу [Текст] / В. Ю. Мірошніков // Науковий вісник будівництва. – 2018. – Вип. 93/3. – С. 155-163.
25. Miroshnikov, V. Yu. On computation of the stress-strain state of a space weakened by a system of parallel circular cylindrical cavities with different edge conditions [Text]/ 4th International Conference «Science and practice: a new level of integration in the modern world». Scope academic house. - Sheffield, UK. – 2017. - P. 77-83.

**Мирошников В.Ю., Олешкевич С.В., Савин А.Б., Медведева А.В. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ И НЕКОТОРЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНТАКТНОГО ТИПА.** Для полупространства с цилиндрическими полостями приведено решение трехмерной задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями. На границах одних цилиндрических полостей заданы напряжения, на границах других полостей перемещения, на границе полупространства заданы нормальные перемещения и касательные напряжения. С помощью обобщенного метода Фурье найдено решение системы уравнений Ламе. Цилиндрические полости рассматриваются в цилиндрических координатах, полупространство в декартовых координатах. Проблему сведено к бесконечной системе уравнений, которая была усечена. В результате расчета системы уравнений найдены неизвестные функции, с помощью которых были получены перемещения и напряжения в упругом теле. Числовые результаты приведены для случая

полупространства и двух цилиндров. Проведенный анализ напряженного состояния дает представление о влиянии на него граничных условий разного типа и распределение напряжений вокруг полостей при различных расстояниях между границами тела.

**Ключевые слова:** цилиндрические полости в полупространстве, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, граничные условия контактного типа.

**Miroshnikov V.Yu, Oleshkevich S.V, Savin O.B., Medvedeva A.V. THE MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A HALF-SPACE WITH CYLINDRICAL CAVITIES AND CERTAIN BOUNDARY CONDITIONS OF CONTACT TYPE.** For a half-space with cylindrical cavities, the solution of the three-dimensional problem of the theory of elasticity with mixed boundary conditions is given. On the boundaries of some cylindrical cavities voltages are given, at the boundaries of other displacement cavities, normal displacements and tangential stresses are specified at the boundary of the half-space. With the help of the generalized Fourier method, a solution of the system of Lamé equations is found. Cylindrical cavities are considered in cylindrical coordinates, half-space in Cartesian coordinates. The problem is reduced to an infinite system of equations, which was truncated. As a result of calculating the system of equations, unknown functions were found, with the help of which the displacements and stresses in the elastic body were obtained. Numerical results are given for the case of a half-space and two cylinders. The analysis of the stressed state gives an idea of the influence of different types of boundary conditions on it and the distribution of stresses around the cavities at various distances between the boundaries of the body.

**Keywords:** cylindrical cavities in a half-space, Lamé equations, generalized Fourier method, boundary conditions of contact type.