

Кузьменко В.М., Епоян С.М., Шилін В.В., Філатов С.В.

Харківський національний університет будівництва та архітектури

(вул. Сумська, 40, м. Харків, 61002, Україна; e-mail: [vkgnuca@ukr.net](mailto:vkgnuca@ukr.net); <https://orcid.org/0000-0003-4390-8222>; <http://orcid.org/0000-0003-4551-1309>; <https://orcid.org/0000-0002-7300-7460>; <https://orcid.org/0000-0002-5042-0623>)

## МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Передаточну характеристику вимірювального приладу (частотна характеристика) визначено за допомогою одиночного імпульсу. Доведено, що частотна характеристика відповідає частотній характеристиці вихідного сигналу. Аналітичний вираз вихідного сигналу отримано з використанням сплайн-функції. Аналітичний вираз апроксимований рядом Фур'є.

**Ключові слова:** частотна характеристика, система вимірювання, функція імпульсу; сплайн-функція; ряд Фур'є.

**Вступ.** Будь яка зміна режимів роботи напірних трубопроводів (вода, газопостачання; теплові мережі) завжди супроводжується динамічною зміною швидкості, тиску та іноді температури [1-3].

Можливо нагадати, що рух рідини та електричного струму описується однаково рівняннями. Прилади для виміру напруги та сили електричного струму мало інерційні і їх частотні характеристики (величина параметра відповідність, який вимірюють частотні зміни, так звана тарирована крива) відомі та легко встановлюються експериментально. В той час як прилади для виміру швидкості, температури, тиску мають тільки статичну тарировку [4, 5].

Таким чином параметри перехідних динамічних процесів вимірюють с деякою похибкою, величина якої невідома. І якщо для експлуатації інженерних споруд це не критично, то для наукових досліджень це не припустимо.

Щоб ліквідувати цей недолік запропоновано наступне.

**Мета.** Визначення дійсного значення параметрів перехідних процесів (тиску, швидкості, температури) в залежності від їх частотної характеристики.

**Основна частина.** Вимірювання, будь-якої фізичної величини, наприклад тиску, можливе уявити такою схемою (рис. 1).

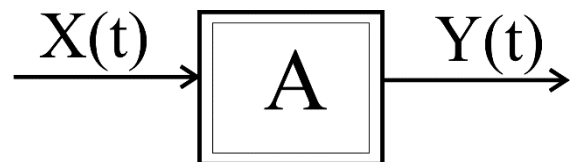


Рис. 1 Схема вимірювання тиску  
 $X(t)$  – тиск, який вимірюють;  $A$  – вимірювальний комплекс, який перетворює тиск в електричний сигнал і його підсилює;  $Y(t)$  – прилад для реєстрації електричного сигналу (аналогового або цифрового)

Відомо, що тиск в перехідних процесах залежить від часу так, що він є випадковою функцією. Яким би не було перетворення (оператор ( $A$ )) вихідна величина  $Y(t)$  те ж випадкова функція. Символічно це записується так:

$$Y(t)=A \{X(t)\} \quad (1)$$

Таким чином, якщо відомо оператор ( $A$ ) і випадкова функція  $Y(t)$  також відома. Зворотна операція також має місце. Однак, в цьому випадку відома тільки перетворена функція  $Y(t)$ . В загальному випадку залежність між фізичною величиною і вихідним електричним сигналом встановлюють так [6]:

$$Y(t)=\Phi(\omega) X(t), \quad (2)$$

де  $\Phi(\omega)$  передаточна характеристика, яку називають частотною характеристикою вимірюваної системи.

Для визначення частотної характеристики потрібна інформація о входному та вихідному сигналах.

Попередньо встановимо, якщо мова йде про частотну характеристику, то це тожко спектральної характеристики, для визначення якої використовуються перетворення Фур'є. Вважають, якщо амплітуда сигналу по будь-яким частотам не викривляється, тобто енергія спектра по всім частотам величина стала, то такий випадок називають «білий шум».

Нагадаємо, що спектром називають розподіл енергії по окремим частотам гармонічної функції (це така функція яка розкладається рядом Фур'є). Енергію уявляють амплітудою коливань, а залежність амплітуди гармонічної функції від частоти називають спектром функції.

Якщо амплітуда коливань для будь-яких частот однакова, то таке явище називають білий шум. Поняття «білий шум» аналогічне поняттю «білий колір», який отримують при рівномірному змішуванні всіх кольорів видимого світла. Як вказано вище для білого шуму характерно рівномірний розподіл енергій за всіма частотами від нуля до нескінченості. Таке твердження протирічить тому, що енергія будь-якого сигналу кінцева.

Такі процеси не існують, тому що енергія такого сигналу повинна бути не скінченною. В той же час реальний процес має частоти в обмеженому інтервалі частот і якщо амплітуди коливань мають сталі значення в межах певної полоси частот, то такий процес відносять до білого шуму.

Ввімкнення, вимкнення систем водопостачання, теплопостачання супроводжується перехідними процесами. Наприклад, вимкнення насоса на напірному трубопроводі, яке обумовлено припиненням електропостачання, закриття засувки на вільному кінці напірного трубопроводу супроводжується явищем, яке називають гідравлічний удар. Відомо що гідравлічний удар це коливальний процес. При експериментальному дослідженні зміни тиску в часі, необхідно щоб апаратура, яка вимірює тиск не викривляла дійсне значення. Цього можливо досягти якщо відомо спектральна характеристика вимірювальної системи.

Для вимірюваної системи, яка має властивості «білого шуму», яку форму сигнал має на вході, таку і на виході, змінюється тільки амплітуда сигналу, яка залишається сталою для будь-якої частоти.

Якщо вимірювана система не відповідає вимогам «білого шуму», то форма сигналу на виході залишається такою ж як на виході, але змінюється в різній кількості величина амплітуди по частотам.

Запропоновано в якості вхідного сигналу використати одиничну імпульсну функцію (функція Дірака) [7,8].

$$\int_a^b f(\xi) \cdot \delta(\xi - t) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } t < a \text{ або } t > b; \\ \frac{1}{2} f(t) & \text{при } t = a \text{ або } t = b; \\ f(t) & \text{при } a < t < b. \end{cases} \quad (3)$$

при  $t < a$  або  $t > b$ ; при  $t = a$  або  $t = b$ ; при  $a < t < b$ .

Для нашого випадку потрібне, щоб  $a \rightarrow b$ . Для приладу вимірювання тиску це досягають ударом металевої кульки по датчику тиску.

Імпульсної функції відповідає з точки зору випадкових величин причинний розподіл [7]:

$$p(t) = \delta^t \begin{cases} Input = 0 \\ Output \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Спектр причинного розподілу (одиничної імпульсної функції) є дискретний з одним значенням при  $t=0$  [6].

Якщо оператор  $A$  викривлює амплітуди на деяких частотах, то на виході з'явиться типична картина, приведена на рис. 2.

Графічне зображення вихідного сигналу потрібно описати аналітично. Це можливо зробити декількома способами. Найбільш раціонально використати сплайн-функції [9,10].

Попередньо графік (рис. 2) розділяють з постійним шагом  $\Delta t$  і знімаються в точках  $t_i = 0, 1, \dots, i$  значення вихідної величини  $y_0, y_1, \dots, y_i$ . Сплайн-функції є кусочно-гладка кубічна парабола, яка безпосередньо проходить крізь точку  $y_i$ . Крім цього на суміжних ділянках співпадають перша та друга похідна.

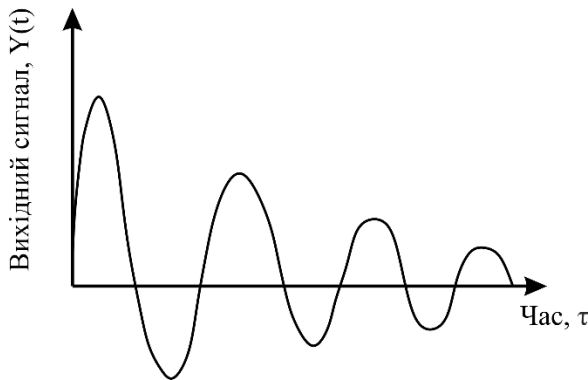


Рис. 2. Реакція вимірюваної системи на одиничний імпульс.

Апроксимуюча функція  $S(t)$  має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} S(t) &= M_{i-1} \frac{(t_i-t)^3}{6\Delta t} + M_i \frac{(t-t_{i-1})^3}{6\Delta t} + \\ &+ \left( Y_{i-1} - \frac{M_{i-1}(\Delta t)^2}{6} \right) \cdot \frac{t_i-t}{\Delta t} + \\ &+ \left( Y_i - \frac{M_i(\Delta t)^2}{6} \right) \cdot \frac{t-t_{i-1}}{\Delta t} \\ S'(t) &= M_{i-1} \frac{(t_i-t)^2}{2\Delta t} + M_i \frac{(t-t_{i-1})^2}{2\Delta t} + \\ &+ \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta t} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} \\ S''(t) &= \frac{M_{i-1}\Delta t}{6} + \frac{M_i 2\Delta t}{3} + \frac{M_{i+1}\Delta t}{6} = \\ &= \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta t} - \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta t} \end{aligned} \right\} (5)$$

Останні рівняння системи (5) перетворюють так:

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6(Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1})}{(\Delta t)^2}, (6)$$

де  $i$  – пробігає значення від 1 до  $n$  – кількості точок.

Граничні умови при  $t=0$

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{\Delta t} \left( \frac{Y_1 - Y_0}{\Delta t} - Y_0' \right) (7)$$

Система (5) з урахуванням залежності (7) визначена. Її рішення приведено в сертифікованій програмі на MatCad.

Для отримання передаточної характеристики вимірюваної системи  $\Phi(\omega)$  потрібно апроксимуючу функцію  $S(t)$  представити рядом Фур'є [7].

$$S(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T} \cdot t\right) \right], (8)$$

де  $T = \Delta t \cdot i_{\text{кін}}$  (рис. 2)

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T S(\tau) \cos\left(\frac{k\pi}{T} \cdot \tau\right) \cdot d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T S(\tau) \sin k\omega_0 \tau \cdot d\tau (9)$$

$$k \geq 1$$

Позначим  $\frac{k\pi}{T} = k\omega_0$

Інтеграли в залежності (9) є добуток тригонометричної функції на багаточлен 3 ступеня. Такі інтеграли беруть по частинам.

Для прикладу визначим інтеграл в залежності (9)  $a_k$  при  $k=1$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T \left[ M_{i-1} \frac{(t_i - \tau)^3}{6\Delta t} + M_i (\tau - t_{i-1})^3 \right. \\ &+ \left. \left( Y_{i-1} - \frac{M_{i-1}(\Delta t)^2}{6} \right) \cdot \frac{t_i - \tau}{\Delta t} \right. \\ &+ \left. \left. \left( Y_i - \frac{M_i(\Delta t)^2}{6} \right) \cdot \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t} \right] \cdot \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau \end{aligned}$$

Нагадаємо, що  $M_{i-1}, M_i, Y_{i-1}, Y_i, t_{i-1}, t_i, \Delta t$  – величини сталі і відомі.

Розглянемо останній інтеграл:

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{2}{T} \int_0^T \left( Y_i - \frac{M_i(\Delta t)^2}{6} \right) \cdot \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t} \\ &\cdot \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau \\ &= \frac{2}{T} \left( Y_i - \frac{M_i(\Delta t)^2}{6} \right) \\ &\cdot \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_0^T \tau \cdot \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau \right. \\ &+ \left. t_{i-1} \int_0^T \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau \right] \end{aligned}$$

Інтеграл  $\int_0^T \tau \cdot \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau$  беруть по частинам  $\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$ ;

Вважають  $\tau = U, dU = d\tau, dV = \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau, V = \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{\omega_0}$

$$\begin{aligned} \int_0^T \tau \cdot \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau &= \tau \cdot \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{\omega_0} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\sin(\omega_0 \tau)}{\omega_0} \cdot d\tau = \frac{T \cdot \sin \omega_0 T}{\omega_0} + \\ \frac{\cos(\omega_0 \tau)}{\omega_0^2} \Big|_0^T &= \frac{T}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 T) + \frac{\cos(\omega_0 T)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -t_{i-1} \int_0^T \cos(\omega_0 \tau) \cdot d\tau &= \\ -\frac{t_{i-1} \sin(\omega_0 \tau)}{\omega_0} \Big|_0^T &= -\frac{t_{i-1}}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 T); \end{aligned}$$

Остаточо

$$a_1^* = \frac{2}{T} \left( Y_i - \frac{M_i(\Delta t)^2}{6} \right) \cdot \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{T}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) + \frac{\cos(\omega_0 T)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{t_{i-1}}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \right].$$

Зазвичай значення «К» обмежують 1,2,3, тобто  $\omega_0 T, 2\omega_0 T, 3\omega_0 T$  ( $\frac{\pi}{T}; \frac{2\pi}{T}; \frac{3\pi}{T}$ ).

Таким чином апроксимуюча функція S(t) вихідного сигналу представлена сумою постійного члена 0,5a<sub>0</sub> (середнього значення) функції S(t) і деякого числа тригонометричних членів (синусів і косинусів) з частотами  $V_0 = \frac{\pi}{T}$  (головна частота),  $2V_0 = \frac{2\pi}{T}$  (друга гармонічна частота),  $3V_0 = \frac{3\pi}{T}$  (третя гармонічна частота).

При вимірюванні перехідних процесів отриманий сигнал апаратно розкладають по частотам. Добуток амплітуди сигналу на коригуючі коефіцієнти відповідних частот (залежність 8 і 9) дозволяє отримати виправлений сигнал по частотам.

**Висновки.** Метод дозволяє встановити динамічну характеристику вимірювального пристрою (наприклад, тиску) за допомогою одиночного імпульсу. Динамічна характеристика (відповідність амплітуди вимірювання при будь-яких частотах) дозволяє встановити експериментально істинне значення тиску.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах // XVII Міжнар. наук.-техн. кон.: 8 – 17 червня 2017 р. м. Одеса (Затока), матер. конф.- Одеса – Хмельницький: ХНУ, 2017. – 220 с.
2. Озгович А. Методи і засоби вимірювання розподілу температури / А. Озгович, О. Панчук // Вимірювальна техніка та метрологія. – Львів: ЛПТ, 2017. – С.34-41.
3. Поліщук Є.С.. Засоби та методи вимірювання неелектричних величин / Є.С. Поліщук та ін. - Львів: Бескид Біт, 2008 - 618 с.
4. Кривенчук Ю. Аналітичний огляд методів та засобів вимірювання температури об'єктів малих розмірів / Ю. Кривенчук, У. Кривенчук // Вимірювальна техніка та метрологія. – Львів: ЛПТ, 2017. - Вип. 78. – С. 25 – 33.

5. Гасанов А.С. Интегрированная система анализа и прогнозирования нестационарных процессов; системні дослідження та інформаційні технології / А.С. Гасанов // Системи дослідження та інформаційні технології. – К.: НТУУ «КПІ», 2016 - №4. – С. 108-119.
6. Гурский Е.И., Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е.И. Гурский. - М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.
7. Корн Г. Справочник по математика / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1974. – 832 с.
8. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В.В. Ершова. - М.: Высш. шк., 1976. - 252 с.
9. Стечкин С.Б. Сплаины в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. - М.: Наука, 1976. - 248 с.
10. Вершинин В.В. Экспериментальные свойства сплайнов и задача сглаживания / В.В. Вершинин, Ю.С. Завьялов, Н.Н. Павлов. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1988. - 374 с.

**Кузьменко В.М., Эпоян С.М., Шилин В.В., Филатов С.В. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.** Передаточную характеристику измерительного прибора (частотная характеристика) определена с помощью одиночного импульса. Доказано, что частотная характеристика соответствует частотной характеристики выходного сигнала. Аналитическое выражение выходного сигнала получено с использованием сплайн-функции. Аналитическое выражение аппроксимировано рядом Фурье.

**Ключевые слова:** частотная характеристика, система измерений, функция импульса, сплайн-функция, ряд Фурье.

**Kuzmenko V.M., Epoyan S.M., Shilin V.V., Filatov S.V. METHOD FOR DETERMINING THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE MEASURING SYSTEM.** The transfer characteristic of the measuring device (frequency response) is determined by using a single pulse. It is proved that the frequency response corresponds to the frequency response of the output signal. The analytical expression of the output signal is obtained using the spline function. Analytical expression approximated by Fourier series.

**Keywords:** frequency response, measurement system, pulse function, spline function, Fourier series.