

Мірошніков В.Ю.

Харківський національний університет будівництва та архітектури
(вул. Сумська, 40, м. Харків, 61002, Україна; e-mail: m0672628781@gmail.com;
orcid.org/0000-0002-9491-0181)

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару з нескінченним круглим циліндричним включенням. На верхній межі шару задані напруження, на нижній – переміщення. Циліндричне пружне включення розташовано паралельно межах шару та жорстко з ним зчеплене. Рішення просторової задачі отримано узагальненим методом Фур'є, стосовно системи рівнянь Ламе. До отриманих нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовано метод редукції. В результаті визначені переміщення і напруження в пружному тілі. Проведено аналіз напруженого стану шару при жорсткому закріпленні його нижньої межі та заданих дотичних навантаженнях на верхній межі.

Ключові слова: композит, циліндричне включення в шарі, узагальнений метод Фур'є.

Вступ. При проектуванні конструкцій та комунікацій з композиційного матеріалу у вигляді поздовжньо армованого шару, виникає необхідність визначення напруженого стану в проектуваному пружному тілі. Для досягнення цієї мети необхідно мати метод розрахунку, який би дозволяв отримати результат з необхідною точністю.

Так для шару з поздовжньою циліндричною порожниною або включенням розглянуті стаціонарні задачі дифракції хвиль та визначення напружень на основі методу розкладання в ряди Фур'є [1–3]. Також для шару з циліндричною порожниною або включенням, за допомогою методу зображень, в роботі [4], розв'язана крайова задача дифракції симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву. Але для задач в суттєво просторовому вигляді ці методи не можуть бути застосовані.

В даній роботі розглядається аналітично – числовий метод розв'язання просторової задачі теорії пружності для шару на основі узагальненого методу Фур'є [5].

На основі цього методу також розв'язані задачі для шару зі сферичною порожниною, який розтягується радіальними зусиллями на нескінченності [6], задачі в напруженнях для простору або півпростору з циліндричними порожнинами [7–11], змішані задачі для простору або півпростору з циліндричними порожнинами

[12–14], в переміщеннях для шару з циліндричною порожниною [15], а також для циліндру з циліндричними включеннями [16].

Постановка задачі. У пружному однорідному шарі розташоване поздовжнє циліндричне включення радіусом R з матеріалу відмінного від матеріалу шару.

Шар будемо розглядати в декартовій системі координат (x, y, z) , включення будемо розглядати в циліндричній системі координат (ρ, ϕ, z) , поєднаної з системою координат шару. Межі шару розташовані на відстані $y = h$ і $y = -\tilde{h}$.

Необхідно знайти розв'язок рівняння Ламе, за умови, що на верхній межі шару задані напруження $F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z)$, на нижній межі шару переміщення $\vec{U}_1(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{U}_h^0(x, z)$, на межі включення та шару умови сполучення

$$\vec{U}_1(\phi, z)|_{\rho=R} = \vec{U}_2(\phi, z)|_{\rho=R}, \quad (1)$$

$$F\vec{U}_1(\phi, z)|_{\rho=R} = F\vec{U}_2(\phi, z)|_{\rho=R}, \quad (2)$$

де \vec{U}_1 — переміщення в шарі; \vec{U}_2 — переміщення в циліндричному включенні;

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2\cdot\sigma} \vec{n} \cdot \overline{\text{div}} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \overline{\text{rot}} \vec{U}) \right] - \text{оператор напруження};$$

$$\vec{U}_h^0(x, z) = U_x^{(h)} \vec{e}_1 + U_y^{(h)} \vec{e}_2 + U_z^{(h)} \vec{e}_3,$$

$$\vec{U}_h^0(x, z) = U_x^{(\tilde{h})} \vec{e}_1 + U_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_2 + U_z^{(\tilde{h})} \vec{e}_3, \quad (3)$$

відомі функції, які будемо вважати швидко спадними від начала координат по осі

z для цилиндру та по осі z і x для меж шару; $\vec{e}_j, j = 1, 2, 3$ – орти декартової системи координат.

Метод розв'язання. Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для декартових і циліндричних систем координат у вигляді [5]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\ \vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)}; \\ \vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) &= N_k^{(p)} [(sign \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)}]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} k &= 1, 2, 3; \\ N_1^{(d)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla; \\ N_2^{(d)} &= \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \\ N_3^{(d)} &= \frac{i}{\lambda} rot(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \\ N_2^{(p)} &= \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \\ N_3^{(p)} &= \frac{i}{\lambda} rot(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \end{aligned}$$

$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, -\infty < \lambda, \mu < \infty$, де $I_m(x), K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}, \vec{S}_{k,m}$ – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра; $\vec{u}_k^{(-)}, \vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару.

Розв'язок задачі подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{U}_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) d\lambda, \quad (6)$$

де $\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda), \vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda), \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ – базисні розв'язки, які задані формулами (4), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu), \tilde{H}_k(\lambda, \mu), B_{k,m}(\lambda), A_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти з граничних умов (3) та умов сполучення (1) і (2).

Для переходу між системами координат скористаємось формулами:

- для переходу від розв'язків $\vec{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв'язків шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) і $\vec{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \vec{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma} \quad k = 1, 3;$$

$$\vec{S}_{2,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left((\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma}) \vec{u}_1^{(\mp)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1 - \sigma) \vec{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2}, \quad (7)$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- для переходу від розв'язків $\vec{u}_k^{(+)}$ та $\vec{u}_k^{(-)}$ шару до розв'язків $\vec{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \vec{R}_{k,m}, \quad (k = 1, 3);$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \vec{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1 - \sigma) \vec{R}_{3,m} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\vec{R}_{k,m} = \vec{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}$, $\vec{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot I_n'(\lambda \rho) + i \cdot I_n(\lambda \rho) \cdot \left(\vec{e}_\phi \frac{n}{\lambda \rho} + \vec{e}_z \right)$; $\vec{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot [(4\sigma - 3) \cdot I_n'(\lambda \rho) + \lambda \rho_p I_n''(\lambda \rho)] + \vec{e}_\phi i \cdot m \left(I_n'(\lambda \rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho} I_n(\lambda \rho) \right) + \vec{e}_z i \lambda \rho I_n'(\lambda \rho)$; $\vec{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\vec{e}_\rho \cdot I_n(\lambda \rho) \frac{n}{\lambda \rho} + \vec{e}_\phi \cdot i \cdot I_n'(\lambda \rho) \right]$; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

Для виконання граничних умов на межах шару, базисні розв'язки $\vec{S}_{k,m}$ в (5), за допомогою формул переходу (7), переписемо в декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}$ при $y = h$ і $\vec{u}_k^{(+)}$ при $y = -h$. Отриманий вектор, при $y = -h$, прирівняємо заданому $\vec{U}_h^0(x, z)$, а при $y = h$ знайдемо напруження та прирівняємо $\vec{F}_h^0(x, z)$. Вектори $\vec{U}_h^0(x, z)$ і $\vec{F}_h^0(x, z)$ задалегідь подамо через подвійні інтеграли Фур'є.

Система з шести рівнянь має визначник [16]

$$\frac{4 \cdot e^{-x} \cdot \gamma^2 \cdot (e^{2x} - 1)(x^2 - \bar{\sigma}^2 \cdot sh^2 x)}{\lambda^4} > 0, \text{ при } x > 0,$$

де $x = \gamma(h + \tilde{h})$, $\bar{\sigma} = 3 - 4\sigma$.

Із отриманої системи рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Враховуючи умови сполучення шару і включення, можемо записати три рівняння для переміщень (1). При цьому, записуючи вираз $\vec{U}_1(\phi, z)|_{\rho=R}$, необхідно скористатися формулами переходу від розв'язків $\vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ до розв'язків $\vec{R}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda)$ (8). Застосувавши до отриманого виразу оператор напруження можемо записати ще три рівняння для напружень (2).

Якщо з рівнянь (1) і (2) виключити знайдені раніше $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$, звільнитися від рядів за m і інтегралів за λ , то отримаємо шість нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$ і $A_{k,m}(\lambda)$.

Визначник цієї системи має громіздкий вигляд, внаслідок чого тут не представлений. Вивчення визначника показало, що його значення не дорівнюють нулю.

До отриманих нескінченних систем рівнянь будемо застосовувати метод зрізань.

Знайдені з нескінченної системи рівнянь коефіцієнти $B_{k,m}(\lambda)$ підставимо у вирази $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. Таким чином будуть знайдені всі невідомі виразів (5) і (6).

Числові дослідження напруженого стану. На верхню межу шару, який лежить на жорсткій основі, діє навантаження від гальмуючого колеса автомобіля. Коефіцієнт Пуассона шару (бетон класу В30) $\sigma_1 = 0,18$, модуль пружності $E_1 = 3,25 \cdot 10^6$ Н/см², включення (арматура, сталь) $\sigma_2 = 0,25$, $E_2 = 2 \cdot 10^7$ Н/см². Радіус циліндричного включення $R = 7$ мм. Товщина шару $h + \tilde{h} = 19$ см. Відстань від верхньої межі шару до центру циліндричного включення $h = 2$ см.

Колесо шириною $b = 31,5$ см. тисне довжиною $a = 10$ см. на шар, з розширенням

прикладання навантаження в кожному сторону $c = 0,5$ см., загальною масою 4800 кг.

Під час гальмування автомобіля навантаження розкладається на вертикальне та горизонтальне. Необхідно проаналізувати напружено-деформований стан шару та поперечної арматури від дії горизонтальної складової частини навантаження – дотичного зусилля, яке враховується з коефіцієнтом 0,7 від загальної маси.

Для розв'язку задачі теорії пружності граничні умови мають наступний вигляд: на нижній межі шару задані переміщення $U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0$; на верхній межі – напруження $\sigma_y^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, $\tau_{yx}^{(h)} = -F \cdot \tau_1(z) \cdot \tau_2(x)$, де $F = 100$ Н – розподілене навантаження,

$$\tau_1(z) = \begin{cases} |z| \geq b/2 + c, & \tau_1(z) = 0 \\ b/2 \leq |z| \leq b/2 + c & \tau_1(z) = \frac{b/2 + c - |z|}{c}, \\ |z| \leq b/2 & \tau_1(z) = 1 \end{cases}$$

$$\tau_2(x) = \begin{cases} |x| \geq a/2 + c, & \tau_2(x) = 0 \\ a/2 \leq |x| \leq a/2 + c & \tau_2(x) = \frac{a/2 + c - |x|}{c}, \text{ що} \\ |x| \leq a/2 & \tau_2(x) = 1 \end{cases}$$

графічно показано на рис.1 (розріз проведено при $z=0$, тому вздовж осі z видно тільки половину навантаження).

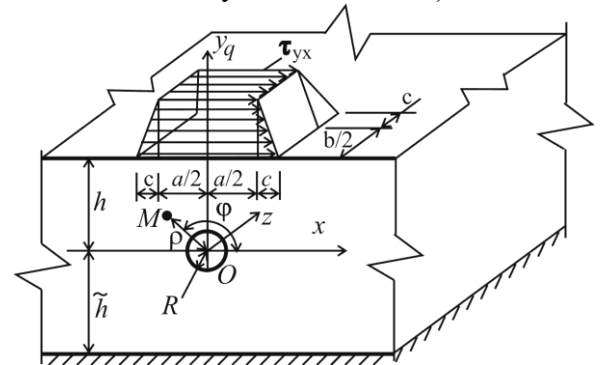


Рис. 1. Розрахункова схема шару з повздовжнім циліндричним включенням.

Нескінченна система була зрізана – $m=10$. Обчислення інтегралів виконано квадратурними формулами Філона (для коливних функцій) і Сімпсона (для функцій без коливань). Точність виконання граничних умов за вказаних значень геометричних параметрів 10^{-3} для значень, які

повинні бути нуль, або 0,1% для значінь відмінних від нуля.

На рис.2 представлені напруження на межі сполучення шару та включення по куту ϕ , при $z=0$. На рис.2а відображені напруження в тілі шару, на рис.2б – в тілі включення. Зважаючи на те, що, з умов (2), напруження σ_ρ і $\tau_{\rho\phi}$ на межі сполучення (напруження в зчепленні) однакові для шару і включення, відображені вони тільки на рис.2а.

Найбільші напруження на межі сполучення в тілі шару – це дотичні $\tau_{\rho\phi}$ та нормальні σ_ρ (рис.2а, лінія 4 та лінія 1). Максимальні дотичні $\tau_{\rho\phi}$ виникають навпроти верхньої межі шару ($\phi=\pi/2$), максимальні нормальні σ_ρ між осями $Ox - Oy$ (при $\phi=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$).

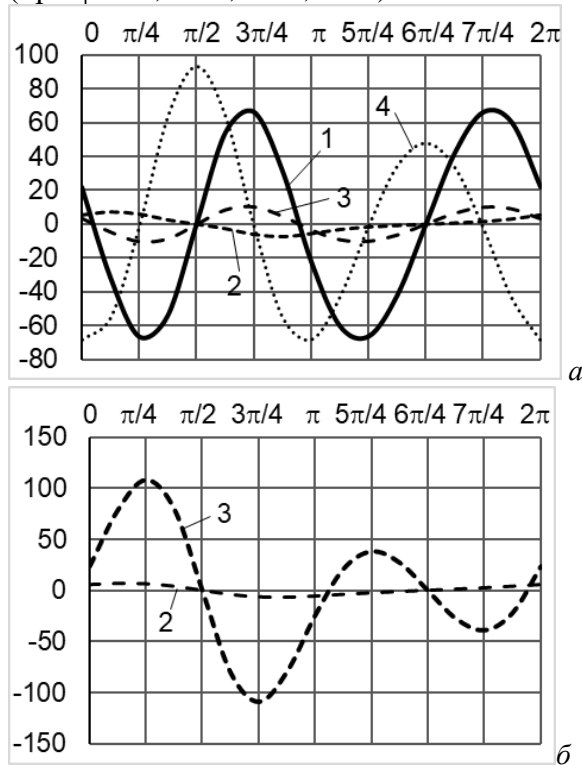


Рис. 2. Напруження на межі сполучення шару та включення в H/cm^2 : а – в тілі шару; б – в тілі включення; 1 – σ_ρ ; 2 – σ_ϕ ; 3 – σ_z ; 4 – $\tau_{\rho\phi}$.

На межі сполучення в тілі включення найбільші напруження – це σ_ϕ (рис. 2б, лінія 3), які є максимальними між осями $Ox - Oy$ (при $\phi=\pi/4, 3\pi/4$).

На рис.3 представлені напруження $\tau_{\rho\phi}$ на лінії між верхньою точкою включення та верхньою межею шару вздовж осі y , при $z=0$.

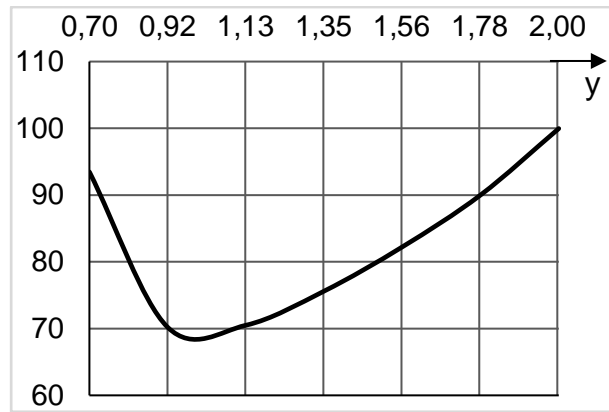


Рис. 3. Напруження $\tau_{\rho\phi}$ на перехідку між включенням та верхньою межею шару в H/cm^2 .

Із рис.2 видно, що на поверхні шару (при $y=2cm$) напруження $\tau_{\rho\phi}$ відповідають заданим τ_{yx} . Наближаючись до включення напруження спочатку зменшуються, а на поверхні включення (при $y=0,7cm$) зростають. Цей ефект має схожість з результатами дослідження перехідків в роботах [9, 14].

Напруження вздовж осі x , при $z=0$, представлені на рис.4.

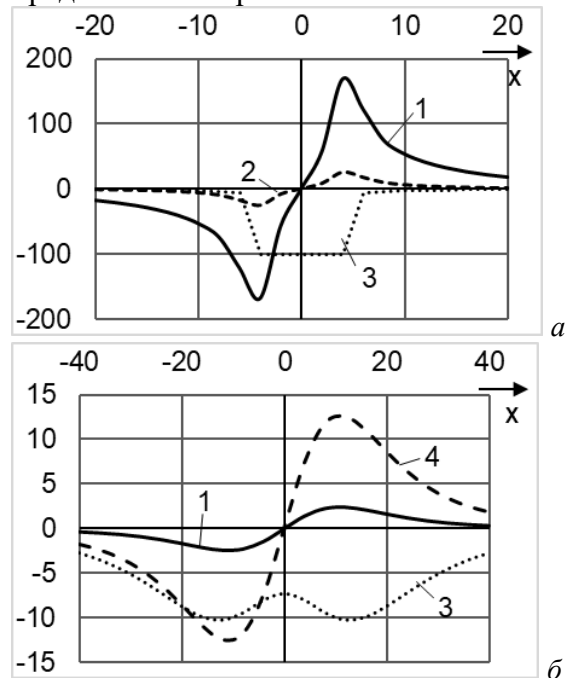


Рис. 4. Напруження на межах шару вздовж осі x в H/cm^2 : а – на верхній межі шару; б – на нижній межі шару; 1 – σ_x ; 2 – σ_z ; 3 – τ_{yx} ; 4 – σ_y .

На верхній межі шару (рис.4а) відображено задане дотичне напруження τ_{yx} (лінія 3). Напруження σ_x (лінія 1) та

напруження σ_z є максимальними в точках $x = \pm 5\text{см}$. (де навантаження спадає).

Щодо нижньої межі шару (рис.4б), напруження σ_x , τ_{yx} та σ_y – є також максимальними в місці спаду навантаження.

Вздовж осі z максимальні напруження виникають тільки при $z=0$. При віддаленні від початку координат по осі z – напруження спадають. Тому всі максимальні напруження представлені на рис. 2–4.

Висновки. На основі узагальненого методу Фур'є запропонований метод розрахунку третьої основної просторової задачі теорії пружності для шару з поздовжнім круговим нескінченним циліндричним включенням. Задача зведена до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування до неї методу редукції. Числові дослідження дають підстави стверджувати, що її рішення може бути з будь-якою точністю знайдено запропонованим методом, що підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Метод розрахунку можна використовувати при проектуванні композитних матеріалів, розрахунковою схемою яких є армований шар із змішаними граничними умовами у вигляді переміщень на нижній межі шару та напружень на верхній.

В числовому дослідженні представлений аналіз напруженого стану шару та включення від дотичних зусиль, які утворені від гальмування автомобіля, визначені напруження, що виникають в зчепленні арматури з бетоном. Аналіз напруженого стану показує, що найбільший вплив від заданого навантаження припадає на ділянки розриву навантаження (на початку та на при кінці заданого дотичного напруження) вздовж його осі, а пружне включення (арматура) зазнає складного напруженого стану.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гузь, А.Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракція упругих волн. К.: Наук. думка. 1978. 307 с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка. 1981. 284 с.
3. Grinchenko, V. T., Ulitko A. F. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer. *Soviet Applied Mechanics*. 1968. № 10. P. 31- 37.
4. Волчков В. В., Вуколов Д. С., Сторожев В. И. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями. *Механика твердого тела*. 2016. Вып. 46. С. 119-133.
5. Николаев, А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.
6. Проценко В. С., Николаев, А. Г. Пространственная задача Кирша. *Математические методы анализа динамических систем*. 1982. Вып. 6. С. 3-11.
7. Проценко В. С., Украинец Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью. *Вісник Запорізького національного університету*. 2015. Вып. 2. С. 193-202.
8. Мірошніков, В. Ю. Перша основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами. *Проблеми машиностроєння*. 2017. Т. 20. № 4. С. 45-52.
9. Мірошніков В. Ю. Первая основная задача теории упругости в полупространстве с несколькими параллельными круговыми цилиндрическими пустотами. *Проблеми машиностроєння*. 2018. Т. 20. № 2. С. 12-18.
10. Николаев, А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сферoidalной полостью. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип.20. С. 253-259.
11. Miroshnikov V. Yu. Evaluation of the stress-strain state of half-space with cylindrical cavities. *Вісник Дніпровського університету*. Серія: Механіка. 2018. Vol. 26, № 5. P. 109-118.
12. Мірошніков, В.Ю. Змішана задача теорії пружності для простору з циліндричними порожнинами та деякими крайовими умовами контактного типу. *Науковий вісник будівництва*. 2018. Том 94. №3.

- С. 155-163. doi.org/10.29295/2311-7257-2018-93-3-155-163
13. Мірошніков В.Ю., Олешкевич С.В., Савін О.Б., Медведєва А.В. Змішана задача теорії пружності для півпростору з циліндричними порожнинами та деякими крайовими умовами контактного типу. *Науковий вісник будівництва*. 2018. Том 94, №4. С. 82-94. doi.org/10.29295/2311-7257-2018-94-4-82-94
 14. Protsenko V., Miroshnikov V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied mechanics*. 2018. Vol. 4. №7. P. 43-50. doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567
 15. Мірошніков В.Ю. Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 102. С. 77- 90.
 16. Николаев, А.Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами. *Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка*. 2013. Т.18. Вип. 4(20). С. 101–111.

Мирошников В.Ю. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ. Решена пространственная задача теории упругости для слоя с бесконечным круглым цилиндрическим включением. На верхней границе слоя заданы напряжения, на

нижней - перемещения. Цилиндрическое упругое включение расположено параллельно границам слоя и жестко с ним сцеплено. Решение пространственной задачи получено обобщенным методом Фурье, относительно системы уравнений Ламе. К полученным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений применен метод редукции. В результате определены перемещения и напряжения в упругом теле. Проведен анализ напряженного состояния слоя при жестком закреплении его нижней границы и заданных касательных нагрузках на верхней границе.

Ключевые слова: композит, цилиндрическое включение в слое, обобщенный метод Фурье.

Miroshnikov V.Yu. A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A CYLINDRICAL INCLUSION LAYER. The spatial problem of the theory of elasticity is solved for a layer with an infinite circular cylindrical inclusion. Stresses are set at the upper boundary of the layer, and displacements at the bottom. The cylindrical elastic inclusion is located parallel to the boundaries of the layer and rigidly coupled with it. The solution of the spatial problem is obtained by the generalized Fourier method, with respect to the Lamé system of equations. The reduction method is applied to the obtained infinite systems of linear algebraic equations. As a result, displacements and stresses in an elastic body are determined. The analysis of the stress state of a layer with rigid fixing of its lower boundary and given tangential loads at the upper boundary is carried out.

Key words: composite, cylindrical inclusion in a layer, generalized Fourier method.

DOI: 10.29295/2311-7257-2019-96-2-252-257

УДК 624.01

Солодовник Ю.Ю., Рюмина Е.А., Рюмин В.В., Яровий Ю. Н.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
(вул. Сумська, 40, Харків, 61002, Україна; e-mail: solladesign@gmail.com, e.a.perepelica@gmail.com,
luger09par@yahoo.com, y.n.yarov@gmail.com; orcid.org/0000-0002-5243-9993, orcid.org/0000-0002-0574-0038, orcid.org/0000-0001-8884-589X, orcid.org/0000-0003-0633-424X)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СТОЕК ПАЛЛЕТНЫХ СТЕЛЛАЖЕЙ

В статье приведены результаты натурных испытаний и численного моделирования работы, коротких стоек паллетных стеллажей. По результатам исследований сделан вывод о механизме перехода в предельное состояние короткого образца стойки паллетного стеллажа. Результаты исследований