

ДО ПИТАННЯ ПРО ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ЕФЕКТУ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

Показано, що врахування міжгілкового теплообміну термоелектричного холодильного елемента приводить до суттєвої зміни фізичних основ ефекту охолодження. Величина мінімальної температури при цьому зменшується.

Теорія ефекту термоелектричного охолодження основана на допущенні про одномірність температури в гілках холодильного елемента (ХЕ) [1,2]. Теплова взаємодія гілок через його внутрішні бокові грані при цьому не враховується. Проте, в реальних конструкціях теплова взаємодія гілок в тій чи іншій мірі має місце завжди і особливо тоді, коли гілки розташовані в безпосередній близькості одна від одної. Ця остання ситуація зустрічається кожен раз, коли необхідна компактна конструкція, що займає якомога менше місця. В даній роботі модель ХЕ при інших однакових умовах доповнена міжгілковим теплообміном і цим самим з'ясована його роль в процесі охолодження.

Нехай внутрішні бокові грані ХЕ 1 і 2 (рис.1) знаходяться в ідеальному тепловому контакті та електроізолювані одна від одної.

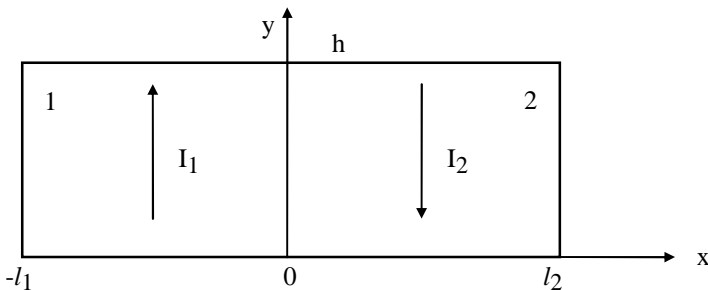


Рис.1. Принципова схема термоелектричного холодильного елемента з тепловою взаємодією гілок

Тоді розподіл температури в гілках ХЕ можна вважати двовимірним. Вважатимемо, що кінетичні коефіцієнти не залежать від температури і координат, тоді узагальнене рівняння теплопровідності в стаціонарному випадку можна записати так

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \gamma_i = 0, \quad (1)$$

де $i=1, 2$ - номер гілки (рис.1), $\gamma_i = \rho_i j_i^2 / \kappa_i$, ρ_i - питомий опір, κ_i - теплопровідність i -тої гілки, j_i - густина електричного струму в i -тій гілці, T - температура.

Граничні умови:

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_1(-l_1, y)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(l_2, y)}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$T_1(0, y) = T_2(0, y), \quad (4)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1(0, y)}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\partial T_2(0, y)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \left(\int_{-h}^0 \frac{\partial T_1(x, h)}{\partial y} dx - \beta_1 \int_{-h}^0 T_1(x, h) dx \right) + \\ & + \kappa_2 \left(\int_0^b \frac{\partial T_2(x, h)}{\partial y} dx - \beta_2 \int_0^b T_2(x, h) dx \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\beta_1 = \alpha_1 j_1 / \kappa_1$, $\beta_2 = -\alpha_2 j_2 / \kappa_2$. Ці умови означають: (2) - термостатування «гарячих» кінців гілок ХЕ при температурі T_0 , (3) - адіабатичну ізоляцію бокових граней гілок 1 і 2, (4) і (5) - неперервність температури і теплового потоку на стику гілок 1 і 2, (6) - адіабатичну ізоляцію «холодних» кінців ХЕ.

Розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді

$$T_i(x, y) = -\frac{\gamma_i y^2}{2} + \left(\frac{\gamma_i h}{2} \cdot \frac{2 - \beta_i h}{1 - \beta_i h} + \frac{\beta_i T_0}{1 - \beta_i h} \right) y + T_0 + U_i(x, y), \quad (7)$$

де $U_i(x, y)$ - невідома функція. Підставимо (7) в (1), одержимо

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

а граничні умови (2) - (6) будуть мати такий вигляд:

$$U_1(x,0) = U_2(x,0) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U_1(-l_1, y)}{\partial x} = \frac{\partial U_2(l_2, y)}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma_1 y^2}{2} + \left(\frac{\gamma_1 h}{2} \cdot \frac{2 - \beta_1 h}{1 - \beta_1 h} + \frac{\beta_1 T_0}{1 - \beta_1 h} \right) y + U_1(0, y) = \\ & = -\frac{\gamma_2 y^2}{2} + \left(\frac{\gamma_2 h}{2} \cdot \frac{2 - \beta_2 h}{1 - \beta_2 h} + \frac{\beta_2 T_0}{1 - \beta_2 h} \right) y + U_2(0, y), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial U_1(0, y)}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\partial U_2(0, y)}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \left(\int_{-h}^0 \frac{\partial U_1(x, h)}{\partial y} dx - \beta_1 \int_{-h}^0 U_1(x, h) dx \right) + \\ & + \kappa_2 \left(\int_0^h \frac{\partial U_2(x, h)}{\partial y} dx - \beta_2 \int_0^h U_2(x, h) dx \right) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, задача зводиться до того, щоб знайти розв'язок рівнянь (8) при граничних умовах (9) - (13).

Розв'язки задачі будемо шукати у виді розкладів функції в ряд Фур'є за синусами в інтервалі (0, h)

$$U_i(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(x) \sin \frac{\delta_n y}{h} \quad (14)$$

Підставивши (14) в (13) і виконавши нескладні алгебраїчні перетворення, одержимо вираз

$$\frac{1}{h} \frac{\kappa_1 I_{1n} + \kappa_2 I_{2n}}{\kappa_1 \beta_1 I_{1n} + \kappa_2 \beta_2 I_{2n}} \delta_n = \text{tg} \delta_n \quad (15)$$

$$\text{де } I_{1n} = \int_{-h}^0 f_{1n}(x) dx, \quad I_{2n} = \int_0^h f_{2n}(x) dx.$$

Можна показати [3], що ряд Фур'є (14) буде мати місце, якщо δ_n задовольнятиме рівнянню (15), в якому коефіцієнт при δ_n зліва постійний, тобто не залежить від номера n . Це можна досягти за умови $\beta = \beta_1 = \beta_2$, яка в явному вигляді буде такою

$$-\frac{\alpha_1 \kappa_2}{\alpha_2 \kappa_1} = \frac{l_1}{l_2} \quad (16)$$

Цієї умови легко дотриматись підбором розмірів l_1 і l_2 .

За умови (16) вираз (15) набуде вигляду

$$\frac{\delta_n}{\beta h} = \text{tg} \delta_n \quad (17)$$

Це трансцендентне рівняння, розв'язки якого для різних βh можна знайти, наприклад, в [4].

З рівняння (8) з урахуванням (14) знайдемо

$$U_i(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{in} e^{\frac{\delta_n x}{h}} + B_{in} e^{-\frac{\delta_n x}{h}} \right) \sin \frac{\delta_n y}{h}, \quad (18)$$

де A_{in} і B_{in} , - постійні інтегрування, які знайдемо, використовуючи рівняння (10)-(12), записавши їх так

$$A_{1n} e^{\frac{\delta_n l_1}{h}} + B_{1n} e^{-\frac{\delta_n l_1}{h}} = 0,$$

$$A_{2n} e^{\frac{\delta_n l_2}{h}} + B_{2n} e^{-\frac{\delta_n l_2}{h}} = 0,$$

$$A_{1n} + B_{1n} = E_n + A_{2n} + B_{2n},$$

$$\kappa_1(A_{1n} - B_{1n}) = \kappa_2(A_{2n} - B_{2n}),$$

де прийнято позначення

$$E_n = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) \left(C_n - h \frac{2 - \beta h}{1 - \beta h} D_n \right),$$

$$a \quad C_n = \frac{2h^2}{\delta_n^2} \left(2 - \frac{2 - \delta_n^2}{\delta_n^2} \beta h \right) \sin \delta_n - \frac{4h^2}{\delta_n^3},$$

$$D_n = \frac{2h}{\delta_n^2} (1 - \beta h) \sin \delta_n$$

- коефіцієнти розкладу функції y^2 і відповідно в ряди Фур'є за синусами. В останніх виразах враховано, що $\beta = \beta_1 = \beta_2$, а також співвідношення (17).

$$A_{1n} = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1} B_{2n} \frac{1 - e^{-\frac{2\delta_n b}{h}}}{1 - e^{-\frac{2\delta_n l}{h}}}, \quad A_{2n} = B_{2n} e^{-\frac{2\delta_n b}{h}},$$

$$B_{1n} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} B_{2n} \frac{1 - e^{-\frac{2\delta_n b}{h}}}{1 - e^{-\frac{2\delta_n l}{h}}}$$

$$B_{2n} = \frac{\kappa_1 E_n \left(1 - e^{-\frac{2\delta_n l}{h}} \right)}{\kappa_2 \left(1 - e^{-\frac{2\delta_n b}{h}} \right) \left(1 + e^{-\frac{2\delta_n l}{h}} \right) - \kappa_1 \left(1 + e^{-\frac{2\delta_n b}{h}} \right) \left(1 - e^{-\frac{2\delta_n l}{h}} \right)}$$

Підставивши замість C_n і D_n у вираз для E_n їх значення, одержимо

$$E_n = \frac{2h^2}{\delta_n^4} (\gamma_1 - \gamma_2) \left(\beta h \sin \delta_n - 2\delta_n \right).$$

З викладеного випливає, що розподіл температури в гілках ХЕ в загальному випадку є двовимірним, що обумовлено різницею $\gamma_1 - \gamma_2$. Розглянемо цю різницю.

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \left(\frac{\rho_1}{\kappa_1} \frac{1}{l_1^2} - \frac{\rho_2}{\kappa_2} \frac{1}{l_2^2} \right) \frac{I^2}{c^2},$$

де I - сила струму, c - розмір гілки вздовж осі Z . Використовуючи співвідношення (16), одержимо

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2} \frac{\rho_1}{\kappa_1} \frac{I^2}{c^2 l_1^2},$$

де $Z_i = \alpha_i^2 / \kappa_i \rho_i$ - термоелектрична добротність i -тої гілки. Отже, вказана різниця буде дорівнювати нулю, а разом з тим температура буде одновимірною за умови $Z_1 = Z_2$.

Оцінимо температуру в точці $(0, h)$. Прості обчислення приводять до такого виразу

$$T(0, h) = \frac{T_0 + \frac{Z_1 \rho_1}{2Z_2 \kappa_1} J_1^2 h^2}{1 + \frac{\alpha_1 J_1 h}{\kappa_1}} - \frac{2\kappa_1 \rho_1}{\alpha_1 Z_2} (Z_1 - Z_2) J_1 h \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\frac{2\delta_n l_1}{h}}\right) \left(1 + e^{-\frac{2\delta_n l_2}{h}}\right) \delta_n^{-2} (\cos^2 \delta_n - 2\cos \delta_n)}{\kappa_2 \left(1 - e^{-\frac{2\delta_n l_2}{h}}\right) \left(1 + e^{-\frac{2\delta_n l_1}{h}}\right) - \kappa_1 \left(1 - e^{-\frac{2\delta_n l_2}{h}}\right) \left(1 - e^{-\frac{2\delta_n l_1}{h}}\right)}$$

Розглянемо випадок, коли $\exp(2\delta_n l_1 / h) \gg 1$, $\exp(-2\delta_n l_2 / h) \ll 1$, який можна легко реалізувати, наприклад при $l_1 \geq h$ і $l_2 \geq h$, якщо використовувати струми і матеріали гілок такими, для яких $\beta h \sim -0,4 \div 0,5$. За цих умов $\delta_n \sim 1,2$ і більше [3], а шуканий вираз для температури матиме вигляд

$$T(0, h) = \frac{T_0 + \frac{Z_1 \rho_1}{2Z_2 \kappa_1} (J_1 h)^2}{1 + \frac{\alpha_1 J_1 h}{\kappa_1}} + \frac{2\kappa_1 \rho_1}{\alpha_1 (\kappa_1 + \kappa_2)} \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_2} J_1 h \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \delta_n}{\delta_n^2} (\cos \delta_n - 2) \quad (19)$$

В залежності від співвідношення між Z_1 і Z_2 другий член у виразі (19) може бути як додатнім, так і від'ємним. Нехай другий член в (19) дорівнює нулю. Тоді

$$T(0, h) = \frac{T_0 + \frac{Z_1 \rho_1}{2Z_2 \kappa_1} (J_1 h)^2}{1 + \frac{\alpha_1 J_1 h}{\kappa_1}}.$$

Оптимальні значення густин електричного струму в цьому випадку будуть

$$(J_1)_{\text{opt}} = \frac{\kappa_1}{\alpha_1 h} \left(\sqrt{1 + 2Z_2 / T_0} - 1 \right), (J_2)_{\text{opt}} = \frac{\kappa_2}{\alpha_2 h} \left(\sqrt{1 + 2Z_2 / T_0} - 1 \right) \quad (20)$$

якщо $\alpha_1 > 0$, то $\alpha_2 < 0$. Мінімальна температура буде при цьому такою

$$T(0, h)_{\text{min}} = \frac{\sqrt{1 + 2Z_2 T_0} - 1}{Z_2}. \quad (21)$$

Формула (21) формально така ж, як і для ХЕ, в якому теплова взаємодія гілок відсутня [1,2]

$$T_{\text{min}} = \frac{\sqrt{1 + 2Z_T T_0} - 1}{Z_T},$$

однак тут $Z_T = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 / \left(\sqrt{\kappa_1 \rho_1} + \sqrt{\kappa_2 \rho_2} \right)^2$ - термоелектрична добротність холодильного елемента. При густинах струму (20) відкинтий в (19) член матиме вигляд

$$\frac{2\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} \frac{(Z_2 - Z_1)}{Z_2 Z_1} \left(\sqrt{1 + 2Z_2 T_0} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \delta_n}{\delta_n^2} (\cos \delta_n - 2).$$

Звідки видно, що підсилення ефекту охолодження можливо за умови $Z_2 > Z_1$. Числові значення Z_1 і Z_2 [5] такі, що цей член може приймати достатньо великі значення. Знехтувати ж ним можна лише тоді, коли добротності однакові, - при цьому розподіл температури стає одномірним. Таким чином, в усіх випадках фізичні основи ефекту термоелектричного охолодження при наявності теплової

взаємодії гілок суттєво змінюються: іншим виявляється параметр термоелектричної добротності, другим стає фактор форми (відношення l_1/l_2), а також вираз для оптимального струму.

На кінець, зауважимо, що в даній роботі розглянуто лише деякі теоретичні аспекти ефекту термоелектричного охолодження, а питання експериментального характеру - комутація гілок, струмопідводи до ХЕ, тепловий контакт внутрішніх граней та деякі інші залишені поза увагою, оскільки їх практичне розв'язання якихось особливих труднощів не повинно викликати.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Иоффе А.Ф. Полупроводниковые термоэлементы. - М.-Л.: Из-во АН СССР, 1960. - 188 с.
2. Harman T.C., Honig J.M. Thermoelectric and Thermomagnetic Effects and Application. - New-Jork, 1967.- 345 p.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. - М.: Физматгиз, 1963. - 656 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 599 с.
5. Фридмен С. Термоэлектрические генераторы. // Прямое преобразование энергии. - М.: Мир, 1969. - С. 56-134.

SUMMARY

OKHREM V.G., OKHREM O.A.

TO THE PHYSICAL BASE OF THERMOELECTRIC COOLING EFFECT

The influence of heat exchange between cooling thermoelement legs leads to essential change of physical cooling effect case has been shown. Minimum temperature value is decreased in this case.