

ПРО ОДНУ З ОСОБЛИВОСТЕЙ АБСОЛЮТНО ПРУЖНОГО ЗІТКНЕННЯ ДВОХ ТІЛ

Показано, що для будь-якого абсолютно пружного зіткнення двох тіл можна знайти інерційну систему відліку, у якій це зіткнення відбувається без передачі енергії від одного тіла до іншого. У цій системі кожне з тіл у ході зіткнення здійснює відбивання від іншого тіла, як від плоскої масивної поверхні, зберігаючи при цьому величину своєї швидкості і змінюючи її напрям на протилежний так, що кут відбивання дорівнює куту падіння.

It is shown that for any absolutely elastic collision of two bodies it is possible to find inertial reference frame where this collision takes place without energy transfer from one body to another. Each of the bodies in this system during the collision performs reflection from the other body just as from plain massive surface preserving at the same time velocity value and changing its direction to opposite so that reflection angle is equal to incidence angle.

У роботі [1] показано, що для будь-якого абсолютно пружного зіткнення двох тіл має місце закон збереження відносної швидкості, який полягає в тому, що після зіткнення тіла віддаляються одне від одного з тією ж швидкістю, з якою вони наближались одне до одного перед зіткненням.

Ми ж зупинимося ще на одній особливості абсолютно пружного зіткнення двох тіл, розкриття якої стало можливим завдяки появі нового закону.

Почнемо з одновимірного абсолютно пружного зіткнення двох тіл, для якого закон збереження відносної швидкості записується у вигляді:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2), \quad (1)$$

де \vec{v}_1 та \vec{v}_2 - швидкості першого та другого тіла до зіткнення; \vec{v}'_1 та \vec{v}'_2 - їх швидкості після зіткнення.

Відразу зауважимо, що нас будуть цікавити лише принципові моменти. Тому у своїх міркуваннях ми виходитимемо з того, що в обох тіл ідеально гладка кульова поверхня й однорідне внутрішнє середовище.

З (1) видно, що після центрального абсолютно пружного зіткнення двох тіл зберігається величина їх відносної швидкості, а її знак міняється на протилежний.

Однак з більшості задач на одновимірне абсолютно пружне зіткнення відомо, що в результаті зіткнення відбуваються певні зміни зі швидкостями кожного з тіл. У зв'язку з цим виникає

питання, як на фоні таких змін можна забезпечити виконання (1).

Чисто логічними міркуваннями легко дійти до висновку, що це можливо лише в трьох випадках:

а) коли швидкість кожного з тіл після зіткнення зростає на одну і ту ж величину. Тоді

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v} \quad \text{і} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 + \Delta\vec{v};$$

б) коли швидкість кожного з тіл після зіткнення зменшується на одну і ту ж величину. Тоді

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \Delta\vec{v} \quad \text{і} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \Delta\vec{v};$$

в) коли швидкість кожного з тіл після зіткнення не міняється за величиною, а міняється на протилежний лише її напрям. Тоді

$$\vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 \quad \text{і} \quad \vec{v}'_2 = -\vec{v}_2. \quad (2)$$

Оскільки результат зіткнення повинен задовільняти ще і закон збереження імпульсу

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2, \quad (3)$$

де m_1 та m_2 - маси першого та другого тіла, то очевидно, що лише варіант (в) може погодити (1) та (3) при будь-яких співвідношеннях m_1 та m_2 .

Отже, розглянувши закон збереження відносної швидкості у поєднанні з законом збереження імпульсу, ми прийшли до висновку, що в результаті центрального абсолютно пружного зіткнення двох тіл повинна зберігатись величина швидкості кожного з них, а напрям їх руху має стати протилежним.

Сам по собі цей висновок не тільки не є очевидним, а навіть навпаки, складається враження, що більшість задач на абсолютно пружне зіткнення містять переконливі докази його помилковості.

Щоб розібратись у ситуації, зупинимося на найвідомішому з прикладів центрального абсолютно пружного зіткнення, в якому кулька, що рухається в деякій системі відліку (система A) зліва направо зі швидкістю v ударяє нерухоми кульку такої ж маси i в результаті перша кулька зупиняється, а друга набуває тієї швидкості, з якою рухалась перша кулька до зіткнення.

Як бачимо, у системі A обидві кульки після зіткнення дійсно не зберегли тих швидкостей, які в них були до зіткнення.

І все ж, у цьому прикладі немає протиріччя з нашим висновком. Адже величина швидкості кожного з тіл не є інваріантом. Тому зроблений висновок стосується не всіх інерціальних систем відліку, а лише однієї, яка в чомусь є особливою. Для наведеного вище прикладу таку систему легко знайти, адже його розгляд у цій системі теж добре відомий ще з шкільних підручників. Ця система (система B) рухається відносно системи A зліва направо зі швидкістю $v/2$. У системі B обидві кульки до зіткнення рухаються назустріч одна одній з однаковою швидкістю $v/2$, на протязі всього зіткнення вони не змінюють своєї координати, а після зіткнення кожна з кульок рухається у зворотньому напрямі з тією ж швидкістю $v/2$.

Як бачимо, система B дійсно є тією системою відліку, в якій для даного зіткнення зберігається як величина відносної швидкості, так і величини швидкостей кожної з кульок. У всіх інших системах відліку швидкості кульок зберігатись вже не будуть. Система A якраз і є однією з безлічі таких систем.

Чим же відрізняється система B від інших систем відліку? Легко переконатись, що лише в системі B імпульси обох кульок до зіткнення, після зіткнення і у будь-який момент зіткнення є рівними за величиною і протилежними за напрямом. Ця обставина приводить до того, що на протязі всього зіткнення точка дотику обох кульок у системі B є нерухомою.

Розглянутий приклад наводить на думку, що і для будь-якого іншого одномірного абсолютно пружного зіткнення повинна існувати така ж особлива система відліку (система A_0), у якій обидва тіла після зіткнення зберігатимуть вели-

чини своїх швидкостей. Ця система може бути знайдена за тією ж ознакою, яка відрізняла систему B від усіх інших систем відліку: вона повинна бути нерухомою відносно точки дотику обох тіл під час зіткнення.

Уявімо собі, що вісь абсцис системи A_0 орієнтована у напрямі лінії, що з'єднує центри обох тіл, а початок координат системи A_0 зв'язаний з тією точкою на цій лінії, у якій відбувається дотик обох тіл під час зіткнення. При такій орієнтації швидкість \vec{w} системи A_0 відносно системи (система A_1), у якій задані швидкості $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1$ та \vec{v}'_2 , що фігурують у рівнянні (1), легко знайти з закону збереження імпульсу для того моменту, коли стадія стиснення вже закінчилась, а стадія відновлення недеформованого стану (стадія розтиснення) ще не почалась і обидва тіла рухаються в A_1 разом. Цьому моментові в A_0 передувала стадія стиснення обох тіл, для якої характерна зміна імпульсу першого тіла від $m_1\vec{u}_1$ до 0, а другого – від $m_2\vec{u}_2$ до 0, де \vec{u}_1 та \vec{u}_2 – швидкості обох тіл в A_0 до зіткнення.

Звідси:

$$m_1\vec{u}_1 = -m_2\vec{u}_2. \quad (4)$$

При цьому, згідно з галілейвським перетворенням швидкостей

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{w}, \quad (5)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{w}. \quad (6)$$

З (4), (5) та (6) маємо:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}, \quad (7)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

$$\vec{w} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Зауважимо, між іншим, що хоча система A_0 рухається відносно A_1 з тією ж швидкістю \vec{w} , що і система, яка зв'язана з спільним центром мас обох тіл, для якого відомий закон збереження його швидкості [2], але для випадку $m_1 \neq m_2$ це дещо різні системи відліку, у яких зміщені початки координат.

Оскільки закон збереження імпульсу виконується і на стадії розтиснення, для якої характерна зміна імпульсу першого тіла від 0 до $m_1\vec{u}'_1$, а

другого – від 0 до $m_2\bar{u}'_2$, то швидкість \bar{w} можна одержати не тільки з (4), але й з співвідношення

$$m_1\bar{u}'_1 = -m_2\bar{u}'_2, \quad (9)$$

де \bar{u}'_1 і \bar{u}'_2 - швидкості обох тіл в системі A_0 після зіткнення, одержані з допомогою перетворень Галілея:

$$\bar{u}'_1 = \bar{v}'_1 - \bar{w}, \quad (10)$$

$$\bar{u}'_2 = \bar{v}'_2 - \bar{w}. \quad (11)$$

З (9), (10) та (11) маємо:

$$\bar{w} = \frac{m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2}{m_1 + m_2},$$

$$\bar{u}'_1 = \frac{m_2(\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2)}{m_1 + m_2}, \quad (12)$$

$$\bar{u}'_2 = \frac{m_1(\bar{v}'_2 - \bar{v}'_1)}{m_1 + m_2}. \quad (13)$$

Враховуючи в (12) та (13) рівність (1), одержимо:

$$\bar{u}'_1 = -\frac{m_2(\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2)}{m_1 + m_2}, \quad (14)$$

$$\bar{u}'_2 = -\frac{m_1(\bar{v}'_2 - \bar{v}'_1)}{m_1 + m_2}. \quad (15)$$

Порівнюючи (7) та (8) з (14) та (15), бачимо, що

$$\bar{u}'_1 = -\bar{u}_1 \quad \text{і} \quad \bar{u}'_2 = -\bar{u}_2. \quad (16)$$

Отже, в системі A_0 в результаті зіткнення обидва тіла дійсно зберегли величини своїх швидкостей, змінивши їх напрями на протилежні. При цьому, перед зіткненням обидва тіла наближалися до початку координат, рухаючись вздовж різних гілок осі абсцис. У момент зіткнення їх зустрічні кінці зупинились у початку координат і там відбулася стадія стиснення обох тіл, аж доки їх протилежні кінці повністю не погасили своїх швидкостей. Після цього відбулася стадія розтиснення, по закінченні якої обидва тіла стали віддалятися від початку координат, рухаючись знову ж таки вздовж різних гілок осі абсцис, але вже у протилежному напрямі.

Іншими словами, в системі A_0 у результаті зіткнення кожне з тіл здійснило відбивання одне від одного подібно до того, коли б замість іншого тіла було масивне тіло з плоскою поверхнею [3].

Враховуючи (16) у співвідношеннях (5) і (10)

та (6) і (11), одержимо відповідно

$$\bar{v}'_1 = -\bar{v}_1 + 2\bar{w} \quad \text{і} \quad \bar{v}'_2 = -\bar{v}_2 + 2\bar{w}. \quad (17)$$

Як бачимо, у системі A_1 варіант (в) реалізується не у вигляді (2), а у вигляді співвідношень (17). І хоча присутність у рівняннях (17) додаткового члена $2\bar{w}$ ніяк не впливає на виконання (1), але завдяки цьому доданку вуалюється ефект відбивання при розгляді даного зіткнення у системі A_1 . Наявність руху системи A_0 відносно системи A_1 настільки видозмінює картину зіткнення, що для його пояснення в A_1 доводиться використовувати такі аргументи, як обмін між тілами 1 та 2 енергіями, імпульсами, чи навіть швидкостями. У системі A_0 подібні аргументи не потрібні, оскільки в ній абсолютно пружне зіткнення відбувається без передачі енергії від одного тіла до іншого. На стадії стиснення кінетична енергія кожного з тіл повністю переходить у його потенціальну енергію, а на стадії розтиснення – потенціальна енергія кожного з деформованих тіл знову повністю перетворюється у його кінетичну енергію.

Тут варто ще наголосити, що оскільки в наших міркуваннях ми ніде не конкретизували значень величин швидкостей та мас, які входять у всі розглянуті співвідношення, то система A_0 , про яку ми ведем мову, як про власну систему відліку для якогось конкретного зіткнення, по суті є уособленням цілої сукупності власних систем A_0 . Для певної задачі з конкретними значеннями швидкостей та мас обох тіл система A_0 буде однією, а як тільки в якійсь із задач буде іншою маса хоча б одного з тіл, або його початкова швидкість, то система відліку A_0 вже буде іншою. У кожній з цих систем її власне зіткнення проходить за тією ж схемою, що і будь-яке інше зіткнення у своїй власній системі. Разом з тим, кожна з систем A_0 є особливою лише для якогось одного зіткнення, а для всіх інших зіткнень, які можна спостерігати у цій системі, вона є звичайною системою A_1 .

З цього зрозуміло, що система A_1 теж є уособленням цілої сукупності систем відліку A_i , де $i \neq 0$. З усіх цих систем можна спостерігати за тим зіткненням, для якого система A_0 є власною.

Тепер покажемо, що ефект відбивання має місце і при двомірному зіткненні двох тіл.

В цьому разі системи відліку A_1 та A_0 зорієнтовано так, щоб їх осі абсцис співпадали з лінією, що з'єднує центри обох тіл у момент зіткнення,

а початок координат системи A_0 зв'яжемо з тією точкою на цій лінії, у якій відбувається дотик обох тіл. Тоді площину YZ , яка у момент зіткнення буде дотичною до кожного з тіл, можна буде умовно вважати тією плоскою поверхнею, від якої відбиватимуться обидва тіла при зіткненні, а вісь X буде тим перпендикуляром до умовної площини відбивання, відносно якого відраховуватимуться кути падіння та кути відбивання. Однак зрозуміло, що насправді відбивання обох тіл здійснюватиметься не від площини YZ , а від іншого тіла.

Для конкретних доказів скористаємося тим, що в системі A_0 x -складові швидкостей обох тіл поводять себе при двомірному абсолютно пружному зіткненні так, як і при одномірному [3]. Ця обставина дозволяє нам переписати залежності (16) у вигляді:

$$(\vec{u}'_1)_x = -(\vec{u}_1)_x \quad \text{і} \quad (\vec{u}'_2)_x = -(\vec{u}_2)_x. \quad (18)$$

При цьому варто нагадати, що залежності (16) одержані при умові вибору системи A_0 так, щоб забезпечувалась рівність величин та протилежність напрямів імпульсів обох тіл як до, так і після зіткнення. Для випадку двомірного зіткнення, який ми розглядаємо зараз, ця умова стосується вже не повних імпульсів, а лише їх x -складових. Вона автоматично забезпечується вказаною орієнтацією системи A_0 . Адже взаємна орієнтація систем A_1 та A_0 у нашому випадку така, що їх відносний рух зі швидкістю $\vec{w} = \vec{w}_x$ здійснюється лише в напрямі співудару, а початок координат системи A_0 зв'язаний з тією точкою на осі абсцис, у якій обидва тіла зупиняються на час зіткнення.

Оскільки y -складові швидкостей після двомірного абсолютно пружного зіткнення залишаються у кожного з тіл тими, що були до зіткнення [3], то, орієнтуючи систему A_0 так, щоб вектори всіх швидкостей як до, так і після зіткнення знаходились у площині XY , можемо записати для y -складових швидкостей рівності:

$$(\vec{u}'_1)_y = (\vec{u}_1)_y \quad \text{і} \quad (\vec{u}'_2)_y = (\vec{u}_2)_y. \quad (19)$$

З сумісного розгляду (18) та (19) очевидно, що у системі A_0 повний вектор швидкостей кожного з тіл після зіткнення змінює свій напрям у цілковитій відповідності до закону відбивання, при якому кут відбивання дорівнює куту падіння.

Проілюструємо ефект відбивання при дво-

мірному зіткненні двома рисунками, на яких схематично зображено одне і те ж зіткнення двох протонів у системі відліку A_1 (рис.1), відносно якої один з протонів нерухомий, та у системі A_0 (рис.2), яка рухається відносно системи A_1 зліва направо зі швидкістю $\vec{w} = (\vec{v}_1)_x / 2$ вздовж лінії FE , що з'єднує центри обох протонів під час зіткнення. При цьому орієнтація обох систем така, що їх осі абсцис співпадають з лінією FE , початок координат системи A_1 відповідає положенню правого протона на лінії FE , а початок координат системи A_0 зв'язаний з тією точкою на лінії FE , у якій відбувається "дотик" протонів один до одного під час зіткнення.

У системі A_1 лівий протон рухається в напрямі AB з позиції A у позицію B і ударяє правий протон, що перебуває в спокої у позиції C . Після такого зіткнення обидва протони розлітаються під кутом 90° . Лівий протон, який до зіткнення рухався зі швидкістю \vec{v}_1 , після зіткнення рухається в напрямі BD зі швидкістю \vec{v}'_1 , а правий протон, який до зіткнення був нерухомим, рухається в напрямі CE зі швидкістю \vec{v}'_2 .

У системі A_0 лівий протон, рухаючись у напрямі AB з позиції A у позицію B зі швидкістю \vec{u}_1 , співударяється з правим протоном, який до цього рухався в напрямі EC з позиції E у позицію C зі швидкістю \vec{u}_2 . Після зіткнення лівий протон рухається з позиції B у позицію D зі швидкістю \vec{u}'_1 . При цьому мають місце співвідношення

$$(\vec{u}'_1)_x = -(\vec{u}_1)_x \quad \text{і} \quad (\vec{u}'_1)_y = (\vec{u}_1)_y,$$

з яких очевидно, що $\angle FBA = \angle FBD$. Що ж стосується правого протона, то після зіткнення він розвертає напрям свого руху на 180° і рухається з позиції C у позицію E зі швидкістю $\vec{u}'_2 = -\vec{u}_2$.

На рис.2 зображено ще дві позиції G і H , яких не було на рис.1. Це зроблено для того, щоб краще уявити, що було б, коли правий протон рухався перед зіткненням не з позиції E у позицію C , а з позиції G у позицію C .

Очевидно, що у системі A_0 зіткнення двох тіл різної маси теж буде мати характер відбивання, оскільки головною умовою вибору системи A_0 є вимога, щоб x -складові імпульсів обох тіл були однаковими за величиною і протилежними за напрямом.

Отже, у нас тепер вже є всі підстави констатувати, що для будь-якого як одномірного, так і

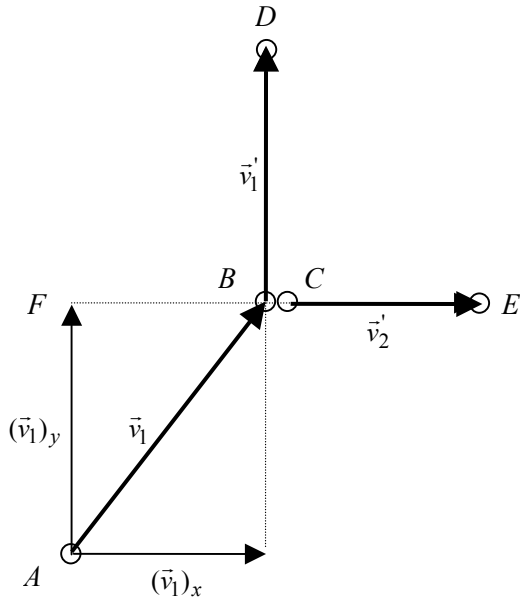


Рис.1. Схематичне зображення зіткнення двох протонів у системі відліку A_1 .

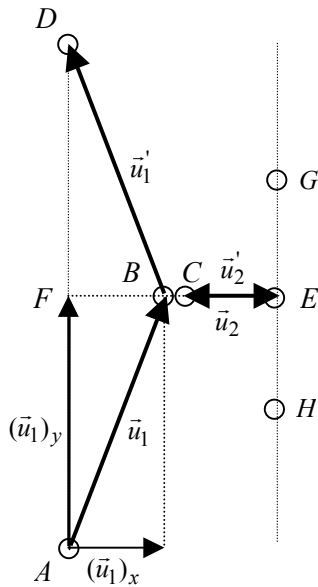


Рис.2. Схематичне зображення зіткнення двох протонів у системі відліку A_0 .

двомірною абсолютно пружною зіткнення двох тіл можна знайти особливу інерціальну систему відліку A_0 , у якій дане зіткнення здійснюється без будь-якої передачі енергії між тілами і проходить у вигляді відбивання одного тіла від іншого, як від плоскої масивної поверхні, після якого кожне з тіл зберігає величину своєї швидкості, а її напрям змінює на протилежний так, що кут відбивання дорівнює куту падіння.

По суті, на основі даної роботи, з'являється можливість переводити абсолютно пружне зіткнення двох тіл, яке традиційно розглядалось саме як зіткнення, у розряд таких явищ, які традиційно розглядаються як відбивання.

Знання встановленої особливості полегшить розв'язок більшості з задач на абсолютно пружне зіткнення, розгляд яких у системі A_1 викликає ті чи інші труднощі. Перевід початкових умов цих задач від системи A_1 до системи A_0 робить елементарно зрозумілою і однозначно прогнозованою поведінку обох тіл у ході зіткнення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черепачинський В.І. Про закон збереження відносної швидкості при абсолютно пружному зіткненні двох тіл // Науковий вісник ЧДУ. Вип.40: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.79-81.
2. Суорц Кл.Э. Необыкновенная физика обыкновенных явлений: В 2 т. - М.: Наука, 1986. Т.1.
3. Хайкин С.Э. Механика: Учебник для ун-тов. - М.-Ленинград: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.