УДК 621.315.592

© 1999 р. І.В.Гуцул

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ОСОБЛИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ

Розв'язано двохмірне неоднорідне рівняння теплопровідності із врахуванням закону Бугера-Ламберта і оптичних властивостей анізотропної пластини.

The two dimensional inhomogeneous equation of heat conductivity is solved considering the Buger-Lambert law and optical properties of anisotrop plate.

Останнім часом все більш широке застосування знаходять ефекти, які виникають в анізотропних середовищах. Великий інтерес представляють термоелектричні явища, пов'язані з можливістю виникнення поперечної термоерс, зумовленою як анізотропією коефіцієнта термоерс [1], так і анізотропією коефіцієнта теплопровідності [2]. Дослідженню цієї термоерс присвячено ряд робіт, в яких на основі рівняння теплопровідності [3] при різних крайових умовах [4-6] одержані розподіли температури і термоелектричного потенціалу для анізотропної пластини.

В даній роботі проводиться обчислення двомірного розподілу температури і дослідження його впливу на термоерс анізотропної пластини із врахуванням її оптичних властивостей. Розглядається анізотропна пластина у вигляді прямокутного паралелепіпеда довжиною a, шириною c і висотою b, виконана з матеріалу, анізотропного за коефіцієнтами теплопровідності $\hat{\chi}$ і термоерс $\hat{\alpha}$. Тензори $\hat{\alpha}$ і $\hat{\chi}$ в лабораторній системі координат $\{x, y, z\}$, яка повернута на кут φ в пло-щині xOy відносно кристалографічної $\{x', y', z'\}$, мають вигляд [7].

На верхню грань даної пластини падає рівномірний монохроматичний променевий потік густиною q_0, а нижня грань підтримується при температурі T_0 за допомогою термостата, виконаного із ізотропного матеріалу, оптичний спектральний діапазон якого співпадає з відповідним діапазоном довжин хвиль анізотропної пластини. Бокові грані пластини адіабатично ізольовані. Розподіл температури в об'ємі пластини знайдемо із основного рівняння теплопровідності [3], яке в наближенні $\chi_{11}>\chi_{12}$ і $\chi_{22}>\chi_{21}$ для стаціонарного розподілу температури $\partial T/\partial t=0$ набуває вигляду

$$\chi_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\chi_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+q_v=0\ , \qquad (1)$$

де q_v – кількість тепла, яке виділяється внутрішніми джерелами в одиниці об´єму за одиницю часу і визначається законом Бугера-Ламберта

$$q_v=q_o\gamma\left[\beta_1 e^{-\gamma(b-y)}+\beta_2 e^{-\gamma x}\right], \qquad (2)$$

а γ – коефіцієнт оптичного поглинання пластини.

Постійні величини β_1 і β_2 можуть приймати значення або 0, або 1. Запишемо рівняння (1) у вигляді, зручному для знаходження його роз-в´язку:

$$\beta_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q_v}{\chi_{22}}=0\ , \qquad (3)$$

де $\beta_0^2=\chi_{11}/\chi_{22}$. (4)

Крайові умови для рівняння теплопровідності (3) даної задачі мають вигляд

$$\begin{aligned}&\partial T/\partial x\big|_{x=0}=0,\ \ \partial T/\partial x\big|_{x=a}=0,\\ &T\big|_{y=0}=0,\ \ \partial T/\partial y\big|_{y=b}=0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Функція $\cos\lambda_n x$, яка відповідає власному значенню $\lambda_n=n\pi/a$ (де n=0,1,2,...) – власна функція задачі Штурма-Ліувіля

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\lambda^2 U=0\ ,\ \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=a}=0. \qquad (6)$$

Система $\{\cos\lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$ - повна, замкнута, ортогональна система функцій на відрізку [0,a]. Це дозволяє ставити питання про розклад функції $U(x)$ в ряд Фур'є за цією системою.

Функція $U(x)$ за своїм зображенням [8]

$$F_n\left[U(x)\right]=\int_0^a U(x)\cos\lambda_n x dx\equiv U_n\ , \qquad (7)$$

яке носить назву скінченного прямого F_n інтегрального косинус-перетворення Фур'є, однозначно відновлюється за правилом

$$U(x)=F_n^{-1}\left[U_n\right]=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n U_n\cos\lambda_n x\ ,$$

$$\delta_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 2, & n=1,2,....\end{cases}, \qquad (8)$$

що називається оберненим F_n^{-1} інтегральним косинус-перетворенням Фур'є [8].

Використовуючи до задачі (5)-(6) оператор F_n за правилом (7), внаслідок тотожності

$$F_n\left[\beta_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]\equiv \qquad (9)$$

$$\equiv\int_0^a\beta_0^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cos\lambda_n x dx=-\beta_0^2\lambda_n^2 T_n(y),$$

де $T_n(y)=\int_0^a T(x,y)\cos\lambda_n x dx$, (10)

одержимо задачу побудови розв'язку рівняння:

$$\frac{d^2T_n}{dy^2}-\beta_0^2\lambda_n^2 T_n(y)=-f_n(y)\ , y\in(0,b),\qquad (11)$$

$$f_n(y)=\frac{q_0\gamma}{\chi_{22}}\int_0^a\left[\beta_1 e^{-\gamma(b-y)}+\beta_2 e^{-\gamma y}\right]\cos\lambda_n x dx \qquad (12)$$

за крайовими умовами

$$T_n\big|_{y=0}=T_{0n}, \qquad (13)$$

$$T_{0n}=\int_0^a T_0\cos\lambda_n x dx=\begin{cases}T_0 a, & n=0,\\ 0, & n=1,2,...\end{cases}$$

$$dT_n/dy\big|_{y=b}=0\,. \qquad (14)$$

При n=0 рівняння теплопровідності (11) набуває вигляду

$$\frac{d^2T_0}{dy^2}=-\frac{q_0\gamma}{\chi_{22}}\int_0^a\left[\beta_1 e^{-\gamma(b-y)}+\beta_2 e^{-\gamma y}\right]dx,\qquad (15)$$

а крайові умови (13)-(14) можна записати так

$$T_0(y)\big|_{y=0}=T_0 a\ ,\ dT_0(y)/dy\big|_{y=b}=0\,. \qquad (16)$$

Для розв´язку рівняння (15) з використанням умов (16) маємо вираз

$$T_0(y)=T_0 a+\frac{q_0\gamma}{\chi_{22}}\left\{\beta_1\frac{e^{-\gamma b}}{\gamma}+\left[\beta_1+\beta_2\frac{b}{a}(1-e^{-\gamma a})\right]y-\beta_1\frac{e^{-\gamma(b-y)}}{\gamma}-\beta_2\frac{1-e^{-\gamma a}}{2a}y^2\right\}. \qquad (17)$$

При n>0 загальний розв'язок рівняння (11) будемо шукати у вигляді загального розв'язку однорідного і часткового розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$T_n(y)=T_n^{\text{одн}\cdot}(y)+T_n^{\text{неодн}\cdot}(y)\,. \qquad (18)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (11) шукаємо у вигляді

$$T_n^{\text{одн}}(y)=C_{1n}\,\mathrm{ch}(\beta_0\lambda_n y)+C_{2n}(\beta_0\lambda_n y)\,. \qquad (19)$$

Оскільки права частина рівняння (11) визначається співвідношенням (12), яке після інтегрування має вид

$$f_n(y)=\beta_2\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{22}}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\lambda_n^2+\gamma^2}\ , \qquad (20)$$

і є постійна величина, то для часткового розв´язку $T_n^{\text{неодн}}(y)$ отримуємо:

$$T_n^{\text{неодн}}(y)=\beta_2\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{22}}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\beta_0^2\lambda_n^2(\lambda_n^2+\gamma^2)}\,. \qquad (21)$$

Коефіцієнти C_{1n} і C_{2n} визначаємо після підстановки (19) і (21) у вираз (18) за крайовими умовами:

$$T_n(y)\big|_{y=0}=0\ ,\ dT_n(y)/dy\big|_{y=b}=0\,. \qquad (22)$$

В результаті загальний розв´язок рівняння (11) при n>0 приймає наступний вигляд:

$$T_n(y)=\beta_2\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{22}}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\beta_0^2\lambda_n^2(\lambda_n^2+\gamma^2)}\times\left\{1-\frac{ch\left[\beta_0\lambda_n(b-y)\right]}{ch(\beta_0\lambda_n b)}\right\}. \qquad (23)$$

Застосувавши обернене інтегральне косинус-перетворення Фур´є (8) до загального розв´язку неоднорідного диференціального рівняння (11), одержимо:

$$T(x,y) = F_n^{-1}\left[T_n(y)\right] = \\ = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n T_n(y)\cos\lambda_n = \frac{1}{a}T_0(y) + \\ + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}T_n(y)\cos\lambda_n x. \qquad (24)$$

Підставляючи (17) і (23) із врахуванням (4) в (24), отримаємо вираз для розподілу температури анізотропної пластини в такому вигляді

$$T(x,y) = T_0 + \frac{q_0}{\chi_{22}}\left\{\beta_1\frac{e^{-\gamma b}}{\gamma} + \right. \\ + \left[\beta_1 + \beta_2(1-e^{-\gamma a})\right]y - \beta_1\frac{e^{-\gamma(b-y)}}{\gamma} - \\ \left. -\beta_2\frac{1-e^{-\gamma a}}{2a}y^2\right\} + \frac{2q_0\gamma^2}{a\chi_{11}}\beta_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\gamma a}}{\lambda_n^2(\lambda_n^2+\gamma^2)} \times \\ \times\left[1 - \frac{ch\left(\sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{22}}}\lambda_n(b-y)\right)}{ch\left(\sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{22}}}\lambda_n b\right)}\right]\cos\lambda_n x. \qquad (25)$$

Із (25) видно, що розподіл температури $T(x,y)$ має складну нелінійну залежність від координат x, y і, крім цього, залежить як від анізотропії теплопровідності, так і від оптичних властивостей матеріалу пластини. При β_1=1 і β_2-0 із виразу (25) отримується одномірний розподіл температури [7]. Аналіз співвідношення (25) показує, що на відміну від одномірного розподілу температури [7], при якому величина поперечної термоелектрорушійної сили ε залежить від коефіцієнта термоерс α_{12}, у випадку двохмірного розподілу температури для розглянутого наближення вона буде залежати і від коефіцієнта термоерс α_{11}, що, в свою чергу, приведе до збільшення термоерс ε у порівнянні із [7].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Tomson W.* On Thermoelectric currents in linear conductors of crystallintidiens.// Math.Phys.Papers. - 1882. - №1. - P.266-273.
2. *Kohler M.* Dependence of Thermoelectric Phenomena from Crystalline Orientation. // Annal. Phys. - 1941. - **40**, - №13.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967.
4. *Слипченко В.Н.*, *Снарский А.А.* Влияние анизотропии теплороводности на поперечную термоэдс. // ФТП. - 1974. - **8**, вып.10.- С.2010.
5. *Снарский А.А.* ЭДС термоэлементов, использующих анизотропию термоэдс, I. Анизотропные термоэлементы прямоугольной формы // ФТП. - 1977. - **11**, вып.10. - С.2053-2055.
6. *Ащеулов А.А.*, *Беликов А.Б.*, *Раренко А.И.* Поперечная термоэдс, обусловленная анизотропией теплопроводности // УФЖ. - 1993. - **38**, вып.8. - С.1226-1231.
7. *Ащеулов А.А.*, *Гуцул І.В.*, *Раренко А.І.* Електрорушійна сила і коефіцієнт корисної дії анізотропного термоелемента у випадку врахування анізотропії коефіцієнтів термоерс і теплопровідності // УФЖ. - 1997. - **42**, вип.6. - С.698-701.
8. *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с разделными переменными (Фурье-Ханкеля). - Киев, 1983. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики: 83.4).