

© 1999 р. **О.В. Ангельський, Р.М. Бесага, І.І. Мохунь,
М.О. Сопін, М.С. Соскін***

Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

*Інститут фізики НАН України, Київ

СИНГУЛЯРНОСТІ У ВЕКТОРНИХ ПОЛЯХ

Запропоновано новий підхід до аналізу сингулярностей у векторних полях, який зводиться до скалярного розгляду фазових вихорів ортогональних компонент. Введено новий тип вихорів – вихорі різниці фаз. Установлено зв'язок між характеристиками повної системи фазових вихорів, які асоціюються з ортогонально-поляризованими компонентами поля та поведінкою азимуту лінійної поляризації електричного поля вздовж s -контуру, поляризаційними сингулярностями, дисклінаціями. Теоретично й експериментально показано можливість комплексної оцінки характеристик часових сингулярностей на основі виміру стаціонарних у часі параметрів поля.

Novel approach for the analysis of singularities in vector fields has been proposed. The essence of this approach is scalar consideration of the phase vortices at the orthogonal field components. The new type of vortices is introduced, namely the phase-difference vortices. The relationship between the characteristics of the complete system of phase vortices associated with orthogonal field components, the behavior of the azimuth of a linearly polarized electrical field at a s -contour, and the polarization singularities, dislocations are established. The feasibility for comprehensive estimation of the characteristics of temporal singularities based on the measurement of the stationary field parameters is shown both theoretically and experimentally.

Останнім часом для досліджень статистичних полів усе частіше застосовуються методи топології, які базуються на фундаментальних властивостях нашого простору і є потужним інструментом дослідження просторово розподілених величин [1-29].

Щодо скалярних статистичних полів, то їх структура, розміри спеклів, поведінка фази та інтенсивності нерозривно пов'язані з особливими точками, в яких амплітуда набуває нульове значення [1-20]. Такі точки є сингулярностями фази та одержали назву дислокацій хвильового фронту або фазових вихорів. Вихорі пов'язані між собою фазовими сідлами і є точками, у яких сходяться еквіфазні лінії. Отже, сітки, які утворені вихорами фази як сингулярними структурами поля фази, можуть бути проаналізовані топологічними методами.

Для монохроматичного векторного поля аналогом дислокацій є дисклінації – множини точок, на яких трансверсальні компоненти поля досягають нульового значення у деякий момент часу [1, 21,22,25]. У кожній точці простору кінець електричного вектора \vec{E}_t описує поляризаційний еліпс, а просторовий розподіл таких еліпсів є

важливою характеристикою векторного поля. Параметри поляризаційних еліпсів (азимут поляризації, напрямок обертання \vec{E}_t), як функції просторових координат теж можуть мати сингулярності. Такі сингулярності будемо називати поляризаційними сингулярностями. Прийнято розрізняти два випадки: параксіальний і загальний [1,21,22]. Надалі ми зупинимось тільки на розгляді параксіального випадку, який найчастіше зустрічається в оптиці. У параксіальному наближенні просторовий розподіл поляризаційних еліпсів містить поляризаційні сингулярності двох типів: S -поверхні і C -лінії [1,20-29]. На S -поверхнях поле поляризоване лінійно, відповідно, невизначеним є напрямок обертання кінця електричного вектора \vec{E}_t . Ці поверхні поділяють поле на області з лівою та правою поляризацією [21]. C -лінії – лінії циркулярної поляризації поля, які характеризуються тим, що вздовж них поляризаційний еліпс вироджується у коло і, відповідно, невизначеним є напрямок головної осі (азимут) поляризаційного еліпса. При обході C -лінії вздовж замкнутого контуру азимут поляризації здійснює поворот на кут кратний π [1,23]. У площині спостереження, ортогональній до напрямку розпов-

сходження поля, S -поверхні, C -лінії та дисклінації є відповідно s -контурами, C - і d -точками [25].

Поляризаційні сингулярності та дисклінації визначають одна одну. Областю існування дисклінації є S -поверхні. У процесі свого руху дисклінації пробігають кожну точку S -множини [21]. Водночас показано [25], що топологія дисклінацій залежить від присутності та розподілу C -ліній в області, обмеженій S -поверхнею. З іншого боку справедливе твердження, що саме дисклінації визначають поведінку поляризаційних сингулярностей.

Варто підкреслити, що S - і C -множини – стаціонарні у часі структури і можуть вивчатись традиційними для оптики методами. Дисклінації в оптичному експерименті недосяжні прямому спостереженню внаслідок швидких змін поля у часі [21].

Тому доцільним є перехід від часових характеристик до просторових, наприклад, як це робиться у традиційній оптиці для опису стану еліптичної поляризації поля у термінах модулів амплітуд ортогональних компонент і різниці фаз між ними [30]. Природно, що для аналізу кожної із компонент поля застосовується скалярний підхід.

Як було показано для скалярних полів [10], сітка дислокацій (фазових вихорів) повністю характеризує топологічну структуру поля, визначаючи поведінку таких важливих фізичних характеристик, як фаза та інтенсивність [11,13-15, 20]. При цьому сітка дислокацій (чергування, взаємне розташування вихорів різних знаків) підпорядковується парному [1,11] і знаковому принципам [12].

Оскільки кожна із ортогональних компонент визначається своєю сіткою вихорів, то можна очікувати, що \vec{E}_t повинен визначатися суперпозицією цих сіток, тобто повною системою фазових вихорів. Аналіз такої системи будемо називати "вихровим аналізом" векторного поля. Завданням аналізу є встановлення зв'язку між повною системою вихорів і поляризаційними сингулярностями, дисклінаціями поля \vec{E}_t . Значимо, що на відміну від дисклінацій, фазові вихорі ортогональних компонент легко доступні прямому спостереженню, наприклад, інтерферометричними методами [8-10,16-20].

Спочатку покажемо, що векторне поле у дальній зоні можна характеризувати єдиною сіткою нових оптичних вихорів – вихорів поля різниці фаз, що, по суті, зводить векторний розгляд

проблеми до скалярного. Буде показано, що вихорі різниці фаз цілком визначають топологію векторного поля, що надає можливість встановити відповідність між повною системою фазових вихорів і поляризаційними сингулярностями поля \vec{E}_t .

Далі на основі вихрового аналізу ми покажемо зв'язок між вихорами ортогональних компонент, поведінкою вектора \vec{E}_t уздовж s -контуру і дисклінаціями (d -точками).

Принципи вихрового аналізу векторних полів

Розглянемо електромагнітну монохроматичну хвилю, що поширюється у вільному просторі у напрямку осі Oz.

Традиційно вектор електричного поля записується [30]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{U}(\vec{r}) \exp[-i\omega t]\}, \quad (1)$$

де $\vec{U}(\vec{r})$ комплексний вектор виду:

$$\vec{U}(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r}) + i\vec{q}(\vec{r}). \quad (2)$$

У дальній зоні можна знехтувати z -компонентою електричного вектора. Тоді розгляд зведеться до аналізу трансверсальної компоненти поля \vec{E}_t . $\vec{p}(\vec{r})$, $\vec{q}(\vec{r})$ є гладкими функціями двох координат x , y , а $\vec{U}(\vec{r})$ описується співвідношенням:

$$\vec{U}(\vec{r}) = \vec{x}U_x + \vec{y}U_y, \quad (3)$$

де \vec{x} , \vec{y} – одиничні вектори, $U_x = A_x \exp[i\Phi_x]$, $U_y = A_y \exp[i\Phi_y]$ – комплексні амплітуди ортогональних компонент, A_x , A_y , Φ_x , Φ_y – модулі і фази комплексних амплітуд відповідно.

Поширення хвилі уздовж z зведеться (з точністю до $\exp[-ikz]$) до масштабного перетворення з деяким коефіцієнтом, обумовленим відстанню до об'єкта, що розсіює [11]. Зауважимо, що наближення дальньої зони не є принциповим і розгляд можна легко поширити для залежності від трьох координат.

Виберемо довільно у площині спостереження декартову систему координат. Введемо деяку характеристичну функцію:

$$u(x, y) = a \exp(i\Delta\varphi), \quad (4)$$

де $a = \sqrt{2A_x A_y}$, $\Delta\varphi = \Phi_x - \Phi_y$. Рівняння (4) можна інтерпретувати як амплітуду деякого скалярного поля. Фаза цього поля збігається із різницею фаз ортогональних компонент. Вихорі поля u знаходяться у тих самих точках, що і нулі амплітуди ортогональних компонент, оскільки $a=0$ у точках

де A_x або A_y досягають нульового значення. Природно, що різниця фаз у цих точках невизначена, тобто ці точки є сингулярними точками різниці фаз. Більше того, ці точки – вихорі. Отже, топологія фази поля u цілком визначає топологію різниці фаз $\Delta\varphi$.

Очевидно, що умова існування нулів амплітуди поля u (як і для звичайного випадку скалярного поля) має вигляд:

$$\begin{cases} \text{Im}(u)=0 \\ \text{Re}(u)=0. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язки першого рівняння визначають лінії, вздовж яких $\Delta\varphi=0$ або $\pm\pi$, тобто лінії, вздовж яких поляризація поля лінійна. Отже, розв'язок першого рівняння визначають s -контури. Криві, які отримуються з другого рівняння, ми будемо за аналогією називати " c -контурми". Вздовж цих контурів $|\Delta\varphi|$ дорівнює $\pi/2$, а в точках, де $A_x=A_y$, розташовані S -точки. Надалі домовимося, що будь-які криві, вздовж яких різниця фаз постійна, будемо називати контурами цієї різниці фаз.

Зауважимо, що різниця фаз уздовж s -контурів змінюється стрибком на π при переході через вихор. Подібно до дислокацій хвильового фронту, вихорі різниці фаз можуть характеризуватися термінами двох топологічних індексів N та S .

Індекс S має зміст топологічного заряду [11] і визначається інтегралом $S=(2\pi)^{-1} \oint d(\Delta\varphi)$, який набуває лише цілих значень $m=\pm 1, \pm 2, \dots$. Причому, для статистичних полів $|S|>1$ і відповідає топологічно нестійким вихорам. Індекс N [11] є не що інше, як індекс Пуанкаре, який у нашому випадку дорівнює одиниці. Очевидно, що значення топологічного заряду вихорів різниці фаз пов'язано із значенням топологічного заряду вихорів ортогональних компонент. Цей зв'язок встановлюється таким співвідношенням:

$$S = \frac{1}{2\pi} \oint d(\Delta\varphi) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi_x - \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi_y. \quad (6)$$

Як впливає з рівняння (6), топологічний заряд вихора різниці фаз дорівнює заряду вихору ортогональної компоненти, якщо вихор різниці фаз створено вихором x -компоненти, і має протилежний до знака топологічного заряду вихора компоненти знак, якщо його утворено вихором y -компоненти.

Надалі будемо позначати вихори компонент як V_i^+ , V_i^- ($S=\pm 1$), а вихори різниці фаз як V^* , V^\sim (* та \sim асоціюються із топологічними заря-

дами $+1$ та -1 , відповідно).

Підкреслимо, що сідлові точки поля різниці фаз є перетинами тільки однієї пари ліній однакової різниці фаз (топологічно стійка структура) і відповідно $S=0$ та $N=-1$.

Застосовуючи підхід, що введено у [11], до поля різниці фаз можна сформулювати такі закони збереження топологічних інваріантів:

1. Кількість вихорів різниці фаз із топологічним зарядом одного знака дорівнює кількості вихорів іншого знаку

$$\sum V^* = \sum V^\sim. \quad (7)$$

2. Кількість сідлових точок поля різниці фаз пов'язана з кількістю екстремумів різниці фаз і вихорів співвідношенням:

$$\sum (V^* + V^\sim) + \sum (\Delta\varphi)_{extr} - \sum (\Delta\varphi)_{saddle} = 2. \quad (8)$$

Зауважимо, що кількість екстремальних точок значно менша, ніж кількість вихорів і сідел. Цей факт впливає із властивостей скалярного поля u . Відомо [13], що кількість вихорів (сідел) відноситься до кількості екстремумів як $14/1 \div 15/1$.

Будемо вважати, що всі s -контурні замкнені. Виключимо з розгляду s -контурні із самоперетинами та трансцендентні криві, що мають сингулярності, такі як точки обриву, асимптотичні точки та ін. Фізичні наслідки, що впливають із самоперетинів s -контурів, проаналізуємо пізніше. Оскільки u – скалярне поле, то для його вихорів автоматично справедливе виконання знакового принципу. Отже, для поля різниці фаз можна сформулювати принцип, аналогічний до знакового принципу, якому підпорядковуються хвильові дислокації:

а) на замкненому s -контурі розташовується парна кількість вихорів поля різниці фаз, причому суміжні вихори мають протилежні знаки (*, \sim).

б) якщо суміжні вихори різниці фаз, утворені вихорами фази однієї компоненти, то ці фазові вихори мають різні знаки (+, $-$).

Знак будь-якого вихору поля різниці фаз фіксує знаки всіх інших вихорів, зміна знака вихора на протилежний автоматично змінює знаки усіх вихорів поля різниці фаз.

Зауважимо, що розташування s - та c -контурів можна визначити з інших міркувань. s - та c -контурні можна отримати, аналізуючи суперпозицію сіток вихорів ортогональних компонент.

Відомо, що для скалярного випадку нулі дійсної та уявної частин комплексної амплітуди, як функцій просторових координат, визначають у площині спостереження дві множини непереп-

рвних кривих. Перетини цих кривих задають сітку дислокацій хвильового фронту [1-3,8-10]. Тоді, у векторному випадку для комплексних амплітуд ортогональних компонент поля U_x , U_y маємо дві сітки фазових вихорів.

На рис.1а наведено суперпозицію таких сіток. Товстими і тонкими лініями позначено мережі дислокацій x і y компонент відповідно. Суцільна і пунктирна з хрестом лінії (лінії Re і $\text{Im}=0$) визначають множини точок, де дійсна та уявна частини комплексних амплітуд ортогональних компонент дорівнюють нулю. Лінії Re і $\text{Im}=0$ для кожної компоненти електричного вектора розбивають площину спостереження на області, у яких фаза змінюється у межах $\pi/2$ (на рис.1а ці області позначені римськими цифрами). Самі лінії є еквіфазними лініями з фазою кратною $\pi/2$.

Різниця фаз комплексних амплітуд ортогональних компонент $\Delta\varphi=0$ може досягатися лише там, де накладаються регіони $I_x \cap I_y$, $II_x \cap II_y$, $III_x \cap III_y$, $IV_x \cap IV_y$, а точки поля з різницею фаз рівною π , можуть знаходитися лише на перетинах областей: $III_x \cap I_y$, $IV_x \cap II_y$, $I_x \cap III_y$, $II_x \cap IV_y$. На рис.1 вони позначені відтінками сірого кольору. Аналогічно визначаються області, в яких може досягатися різниця $\Delta\varphi=\pm\pi/2$ (на рис.1а такі області позначені білим кольором). Очевидно, що внаслідок неперервності поля, геометричне місце точок, в яких різниця фаз комплексних амплітуд ортогональних компонент дорівнює константі з точністю до π , утворить систему замкнутих ліній. Лінії, на яких різниця фаз дорівнює 0 або π , визначають s -конттури (на рис.1а тонкі пунктирні лінії), а лінії з $\Delta\varphi=\pm\pi/2$ утворюють c -конттури (на рис.1а тонкі штрихпунктирні лінії).

Зауважимо, що перетини однойменних ліній компонентів (перетини ліній Re_x і $\text{Re}_y=0$ або Im_x і $\text{Im}_y=0$) фіксують точки поля, в яких різниця фаз точно дорівнює 0 або π , тобто через ці точки проходять s -конттури. Перетини різнойменних ліній компонент (перетини ліній Re_x і $\text{Im}_y=0$ або Im_x і $\text{Re}_y=0$) визначають множини точок із різницею фаз $\pm\pi/2$ – через ці точки проходять c -конттури.

На рис.1б s - та c -конттури показано також за допомогою пунктирної та штрихпунктирної ліній. Зауважимо, що положення s - та c -контурів збігається з сіткою вихорів характеристичного поля u . Області з лівою та правою поляризацією показано, відповідно, як білі та сірі регіони.

Враховуючи знаковий принцип і беручи до уваги, що різниця фаз уздовж s -конттуру стрибком змінюється на π при переході через вихор, можна якісно описати поведінку азимуту лінійної поляризації поля вздовж s -конттуру відносно вибраного базису розкладу \vec{x}, \vec{y} [29]. Ця поведінка електричного вектора ілюструється на рис.1б за допомогою подвійних товстих стрілок.

Проаналізуємо деякі особливості сіток, утворених вихорами різниці фаз. Відзначимо, що характеристична функція u залежить від базису розкладу векторного поля на ортогональні за поляризацією компоненти. Отже, сітка вихорів різниці фаз залежить від вибору цього базису. Проте положення s -контурів (ліній, вздовж яких поле поляризовано лінійно) є стаціонарним і постійним для будь-якого базису розкладу. Проста штрихпунктирна лінія та більш світлі вихори відповідають початковому базису розкладу. Базису, який було змінено, відповідає штрихпунктирна лінія з двома крапками. Місцеположення S -точок позначено літерою S .

Для будь-якого базису c -конттури проходять через ці точки. S -конттури, що відповідають двом різним базисам розкладу наведено на рис.2 і позначено за допомогою штрихпунктирної та штрихпунктирної з двома крапками ліній відповідно.

Зауважимо, що при зміні базису можуть утворюватися нові перетини s - та c -контурів, тобто з'являться додаткові вихори різниці фаз. Природно, що кількість цих додаткових вихорів завжди парна, а знаки топологічних зарядів підпорядковуються знаковому принципу.

Проаналізуємо другий наслідок, що слідує із властивостей характеристичної функції u . Припустимо, що комплексна амплітуда скалярного поля u змінюється на деякий постійний для всього поля фазовий множник $\exp(i\varphi_{const})$. Векторне поле, що відповідає такій зміні характеристичної функції можна отримати, наприклад, розміщуючи, на шляху розповсюдження хвилі об'єкт аналогічний чвертьхвилевій платівці. При цьому структура різниці фаз не зміниться, але s - та c -конттури змістяться відповідно до φ_{const} . Очевидно, якщо $|\varphi_{const}|=\pi/2$, то s - та c -конттури поміняються місцями.

Розглянемо поведінку вектора \vec{E}_t в області, що обмежена s -контуром. Як відомо [29], поляризаційний еліпс у будь-якій точці площини спостереження можна описати трьома величинами:

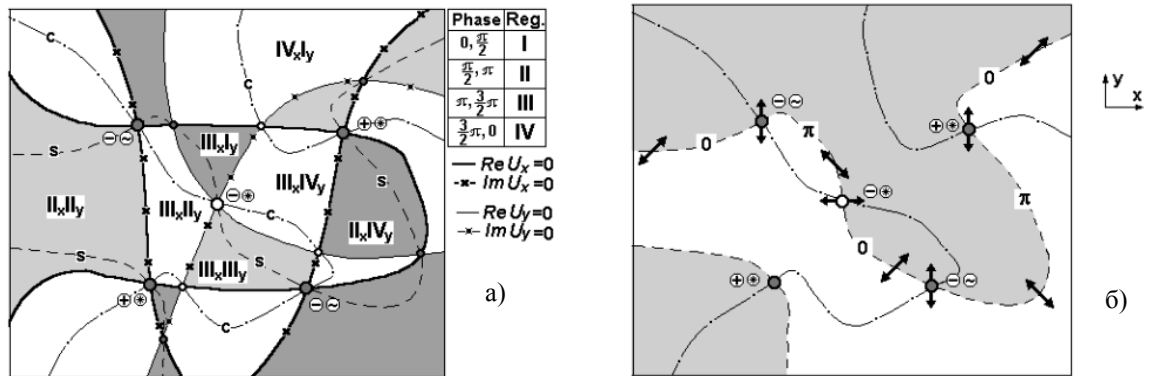


Рис. 1. Суперпозиція сіток вихорів компонент (а) та сітка, яка утворена вихорами різниці фаз (б).
 а) x -вихорі (лінії $ReU_x, ImU_x=0$ – товсті лінії) – темні кружки, y - вихорі (лінії $ReU_y, ImU_y=0$ – тонкі лінії) – світлі кружки. Межі зміни фази компонент у регіонах поля, що обмежені лініями $ReU, ImU=0$ та їх перетинами, позначено римськими цифрами. Відповідність між зміною фази та римськими цифрами наведено у таблиці у правому верхньому куті рисунка. Області, де різниця фаз комплексних амплітуд x - та y -компонент може досягати значення 0 або $\pm\pi$, позначено сірим кольором. Області, де відповідна різниця фаз може досягати значення $\pm\pi/2$, позначено білим кольором. Пунктирні та штрих-пунктирні лінії позначають s - та c -контури.
 б) Області з правою та лівою поляризацією позначено сірим та білим кольорами відповідно. Напрямок подвійних стрілок відображає якісну поведінку азимута поляризації вздовж s -контуру. Різниця фаз уздовж s -контуру на дугах між вихорами різниці фаз позначено символами 0, π .

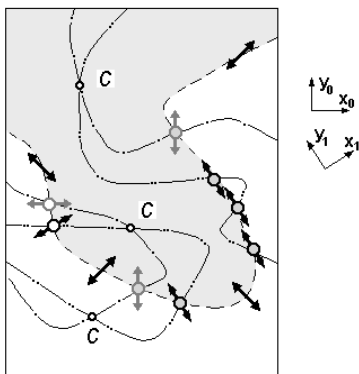


Рис. 2. Зміна положення s - та c -контурів при зміні базису розкладу.

азимутом поляризації α , еліптичністю e (відношенням півосей еліпса) і напрямком обертання вектора \vec{E}_t (права, ліва поляризація). Оскільки в області, обмеженій s -контуром, напрямок обертання \vec{E}_t не змінюється, а невизначеність α однозначно пов'язана з поведінкою e (α невизначено, коли $e=1$), то при розгляді поведінки вектора \vec{E}_t достатньо проаналізувати поведінку тільки одного параметра α .

Сингулярності поля азимутів – C -точки можна характеризувати в термінах топологічного заряду [1,24]:

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \oint d\alpha, \quad (9)$$

де інтеграл береться проти ходу годинникової стрілки по колу, що охоплює C -точку і набуває значення $\pm 1/2$. Якщо розглядати обмежену s -контуром область, у якій знаходиться декілька

C -точок, то цю множину C -точок можна характеризувати сумарним топологічним зарядом [25].

Азимут поляризації визначає поле напрямків $\vec{\alpha}$ великих осей поляризаційних еліпсів. Відзначимо, що на s -контурах неперервність поля $\vec{\alpha}$ гарантована, а саме $\vec{\alpha}$ задається азимутом лінійної поляризації коливань електричного вектора у площині спостереження.

Нехай s -крива задана у параметричній формі $x=x(\tau), y=y(\tau), a \leq \tau \leq b$. Тоді для $\forall \tau \in [a, b]$ кут між $\vec{\alpha}(\tau)$ і $\vec{\alpha}(a)$, відлічений від $\vec{\alpha}(a)$ у позитивному напрямку (проти ходу годинникової стрілки), визначає зміну азимута на відрітку s -контуру $\Delta\alpha(\tau) = \alpha(\tau) - \alpha(a)$. Величина $\gamma(\vec{\alpha}, s) = [\alpha(b) - \alpha(a)] / (2\pi)$ визначає обертання поля $\vec{\alpha}$ на відрітку $[a, b]$ s -контуру і дорівнює числу обертів $\vec{\alpha}$ на цьому відрітку. У [31] показано, що обертання векторного поля на замкнутому контурі дорівнює сумарному топологічному заряду поля усередині області..

З визначення випливає, що обертання γ на будь-якій s -кривій дорівнює сумі обертань на її елементарних ділянках, обраних довільно, та інваріантне до базису розкладу електричного поля на компоненти. Надалі під такими елементарними ділянками будемо розуміти дуги s -контуру, що з'єднують сусідні вихори.

Задамо орієнтацію s -контурів (припускаючи їх замкнутими) у такий спосіб: додатною орієнтацією будемо вважати орієнтацію, якщо при обході s -контуру проти ходу годинникової стрілки область із правим напрямком обертання кінця

електричного вектора залишається зліва. Відповідно для області з лівим напрямком обертання кінця електричного вектора такий контур буде від'ємний. Очевидно, що зміна орієнтації дуги s -кривої змінює знак обертання поля $\vec{\alpha}$ на протилежний.

Розглянемо довільний замкнутий s -контур, на якому розташовується довільна (парна, внаслідок знакового принципу) кількість вихорів. Загальне обертання Γ поля $\vec{\alpha}$ на контурі дорівнює сумі обертань на дугах, що з'єднують сусідні вихори V_i^* , V_j^\sim (символи i, j позначають належність вихора тій чи іншій компоненті) і дорівнює сумарному топологічному заряду в області, обмеженій s -контуром. Обертання γ на таких елементарних дугах може набувати значення $0, \pm 1/4$. Конкретне числове значення обертання на елементарній дузі визначається чергуванням вихорів і орієнтацією s -контуром. Наприклад, обертання на дузі, сформованій послідовністю вихорів $V_x^* V_y^\sim$ (s -контур обмежує область із правим напрямком коливальності), дорівнює $1/4$. На s -контурі з протилежним напрямком обходу це елементарне обертання дорівнює $-1/4$.

З властивостей поля різниці фаз і знакового принципу впливають такі правила:

$$\gamma(V_i^*, V_j^\sim) = -\gamma(V_i^\sim, V_j^*), \quad (10)$$

$$\gamma(V_i^*, V_j^\sim) = -\gamma(V_j^*, V_i^\sim), \quad (11)$$

$$\gamma(V_i^*, V_j^\sim) = \gamma(V_j^\sim, V_i^*), \quad (12)$$

$$\gamma(V_i^*, V_i^\sim) = \gamma(V_i^\sim, V_i^*) = 0, \quad (13)$$

де нижні індекси i, j відповідають x, y .

Зі співвідношень (10-13) випливає, що перестановка верхніх або нижніх індексів змінює знак обертання на елементарній дузі. Одночасна перестановка залишає знак обертання незмінним, а обертання на елементарній дузі, сформованій вихорами однієї компоненти, дорівнює нулю.

Внаслідок неперервності \vec{E}_t уздовж s -контуром і знакового принципу $\Gamma = m/2$ (m - ціле число), тобто $\Gamma = I_c$, де I_c розглядається як сумарний топологічний заряд C -точок усередині області.

Неважко бачити, що I_c може бути знайдено із співвідношення (9), де інтеграл береться уздовж s -контуром.

Якщо s -контур s_0 обмежує багатозв'язну область, що містить області з протилежною поляризацією, то справедливе співвідношення:

$$I_c^{R(L)} = \gamma(\vec{d}, s_0) - I_c^{L(R)}, \quad (14)$$

де індекси R, L відповідають областям із правою та лівою поляризацією.

Продемонструємо на конкретному прикладі визначення топологічного заряду C -точок в області, що обмежена конкретним s -контуром, який наведено на рис.3а. Тут же представлено базис розкладу. Чотири дислокації (включаючи три вихори x -компоненти та один y -компоненти), що спостерігаються у цьому базисі, показано на рис.3 темними колами. Відповідно до знакового принципу знаки вихорів x -компоненти чергуються. Поведінка азимута поляризації вздовж s -контуром ілюструється подвійними стрілками. Елементарні обертання на дугах між вихорами (починаючи з першого справа x -вихора, у напрямку проти годинникової стрілки) за наведеними правилами мають значення: $0, 0, 1/4, 1/4$. Відповідно загальне обертання вздовж s -контуром і, відповідно, сумарний топологічний заряд C -точок $I_c = 1/2$.

Отже, досліджуючи чергування вихорів на s -контуром, можна описати якісну поведінку азимута лінійної поляризації вектора \vec{E}_t і знайти сумарний топологічний заряд C -точок усередині області, обмеженої контуром, тобто встановити зв'язок між повною системою вихорів і поляризаційними сингулярностями.

Водночас проведений розгляд не дає змоги зробити висновок про дисклінації на s -контуром, оскільки, як показано у [25], знання індексу I_c для цього не достатньо. У подальшому розгляді ми постараємося заповнити цю прогалину.

Дислокації ортогональних компонент і дисклінації

Як відомо, вектор \vec{U} у будь-якій точці поля може бути представлено як суперпозиція ліво- і правополяризованих циркулярних компонент [1,23]. В області з лівою поляризацією, обмеженої s -контуром, для фаз ліво- і право-циркулярно поляризованих компонент виконуються такі співвідношення:

$$\begin{cases} \chi_e = (\chi_R + \chi_L)/2 \\ \alpha = (\chi_R - \chi_L)/2, \end{cases} \quad (15a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi_s} \oint d\chi_R = m \\ \frac{1}{2\pi_s} \oint d\chi_L = 0, \end{cases} \quad (15b)$$

де χ_e - "вібраційна" [1,23,25] фаза, яка зумовлена положенням головної півосі поляризаційного еліпса (при лінійній поляризації χ_e визначає

момент часу екстремального значення вектора електричного поля), χ_R, χ_L – фази право- і лівоциркулярно поляризованих компонент, m – ціле число.

Співвідношення (15б) відображають той факт, що правоциркулярно поляризована компонента містить сингулярності фази, а лівополяризована не містить. З (15) випливає, що

$$\chi_e = \alpha + \chi_L, \quad (16)$$

а екстремуми фази χ_e і екстремуми азимута α збігаються, тобто співвідношення

$$\frac{d\chi_e}{d\tau} = \frac{d\alpha}{d\tau} = 0 \quad (17)$$

виконується для тих самих точок s -контур. Зауважимо також, що у цих самих точках спостерігаються екстремуми фази χ_L . Тоді монотонній зміні χ_e відповідає монотонна зміна α . Тому, спостерігаючи зміну азимута лінійної поляризації вздовж s -контур, можна судити про поведінку χ_e . З (15,16) випливає, що сумарний топологічний заряд C -точок в області визначається виразом (9) і дорівнює значенню сумарного топологічного заряду $I_C = (2\pi)^{-1} \oint_s d\chi_e$, отриманому

у роботі [25].

Відповідно до [25], екстремум χ_e на s -контурі є точка народження або анігіляції дисклінацій. З (17) випливає, що у точках народження або анігіляції дисклінацій спостерігається також локальний екстремум азимута лінійної поляризації $\alpha(\tau)$.

Розглянемо розклад \vec{E}_t за двома ортогональними компонентами E_x, E_y . Зорієнтуємо систему координат у довільній точці s -контур за напрямком вектора \vec{E}_t . Тоді одна із компонент (припустимо E_x) тотожно дорівнює нулю у будь-який момент часу, тобто для компоненти поля E_x у цій точці існує дислокація хвильового фронту [23]. Відповідно трансверсальна компонента електричного поля у цій точці описується виразом:

$$E_t = E_y = \text{Re}\{A_y \exp[i(\Phi_y - \omega t)]\}. \quad (18)$$

Отже, при орієнтації однієї з осей базису розкладу \vec{x}, \vec{y} вздовж вектора \vec{E}_t у цій точці на s -контурі умова дисклінації має вигляд:

$$\Phi_y - \omega t = \pi/2 + m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2... \quad (19a)$$

Умова дисклінації, отримана у [25], має вигляд:

$$\chi_e - \omega t = \pi/2 + m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2... \quad (19б)$$

Порівнюючи (19a) і (19б), бачимо, що $\chi_e = \Phi_y$.

Тоді, використовуючи поляризатор, зорієнтований таким чином, що пропускається компонента \vec{E}_t з азимутом вздовж осі \vec{x} , будемо спостерігати дислокацію x -ої компоненти, тим самим "візуалізуючи" дисклінацію, що відповідає моменту часу $t_m = (\Phi_y - \pi/2 - m\pi)/\omega$. При інтерференції поля з опорною хвилею дислокація, як відомо, буде формувати характерну біфуркацію інтерференційної смуги. Значення Φ_y може бути визначено інтерферометрично при повороті поляризатора на 90 градусів. Повернемо поляризатор на невеличкий кут щодо початкового положення. Відповідно дислокація компоненти E_x переміститься вздовж s -контур, що дасть можливість візуалізувати дисклінацію в інший момент часу. Отже, можна встановити відповідність між положенням дисклінації на s -контурі (як функції часу) і поворотом азимута поляризатора (як функції просторових координат).

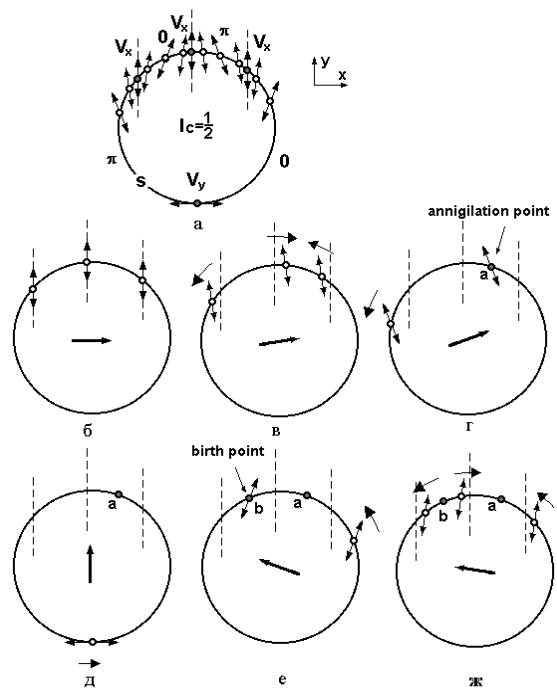


Рис. 3. Приклад визначення позиції точок анігіляції та народження дисклінацій. На рис.3а – поведінка азимуту поляризації вздовж s -контур. У правому верхньому куті наведено базис розкладу. Вихори позначено темними кружками. Рис.3(б-ж) – відповідають компоненті поля, що виділено за допомогою поляризатора. Напрямок осі поляризатора позначено товстою стрілкою. Фазові вихори, що притаманні виділеній компоненті, позначено світлими кружками. Початкові позиції x -вихорів, що відповідають базису розкладу рис.3а, ілюструються пунктирними лініями. Стрілки зовні s -контур вказують напрямком руху вихорів під дією обертання поляризатора. Точки народження та анігіляції дисклінацій позначено літерами a, b.

Методика дає можливість визначати просторове положення стаціонарних (у часі) точок народження і зникнення дисклінацій, як точок виникнення й анігіляції пар дислокацій. Ця можливість ілюструється рис.3.

На рис.3а наведено поведінку азимута поляризації на s -контурі із сумарним топологічним зарядом C -точок $I_C=1/2$. Тут же наведено орієнтацію осей базису розкладу. У цьому базисі спостерігається чотири дислокації (три вихори x -компоненти та один y -компоненти). На рис.3 вони позначені більш темними кружками. У відповідності до знакового принципу знаки фазових вихрів x -компоненти чергуються. Як видно, між цими вихорами азимут лінійної поляризації на s -контурі має локальні мінімум і максимум. Рис.3(б-ж) ілюструють еволюцію вихорів ненульової компоненти вздовж s -контур у при зміні орієнтації вісі пропускання поляризатора. Орієнтація вісі поляризатора позначена товстою стрілкою. На рис.3б вісь пропускання поляризатора розташована вздовж осі x базису розкладу, що наведено на рис.3а. При повороті поляризатора на невеличкий кут (рис.3в) двоє вихорів зближуються. Оскільки ці вихорі різних знаків, то при накладанні опорного пучка вони будуть спостерігатись як різноспрямовані вилички інтерференційної картини. Пунктирні лінії на рис.3 вказують початкове положення вихорів відповідно до базису розкладу, наведеного на рис.3а. При подальшому повороті поляризатора вихорі сходяться в одній точці a та анігілюють. Отже, ця точка – точка анігіляції дисклінацій. У такий спосіб може бути визначена локалізація точки анігіляції дисклінацій на s -контурі. З цього моменту на s -контурі спостерігається один вихор. Рис.3д відповідає повороту вісі поляризатора на кут 90° щодо початкової орієнтації. У цьому випадку спостерігається лише одна дислокація, що відповідає вихору y -компоненти на рис.3а. При орієнтації осі поляризатора, як позначено на рис.3е, у точці b відбувається народження двох вихорів різного знака, що переміщуються при подальшому повороті поляризатора вздовж s -контур у протилежних напрямках (рис.3ж). Точка b – точка народження дисклінацій (рис.3е).

Експериментально процеси народження та анігіляції дисклінацій спостерігалися в інтерферометрі типу Маха-Цандера, як це зображено на рис.4. В об'єктний пучок у фокальну площину мікрооб'єктива 2 поміщався зразок – тефлонова платівка, середовище, у якому реалізується багатократне розсіяння. Цей вибір обумовлений необ-

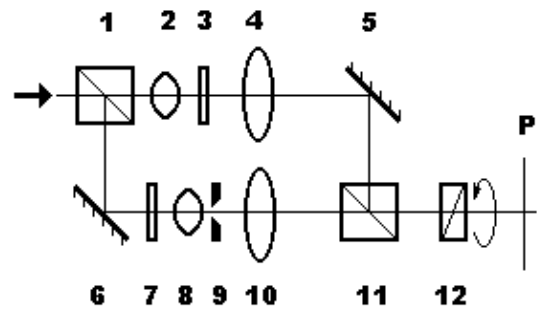


Рис. 4. Схема експериментального розміщення для спостереження точок народження та анігіляції дисклінацій. 1, 11 – світлодіоди, 2 – мікрооб'єктив, 3 – тефлонова платівка, 4 – об'єктив, 5, 6 – дзеркала, 7 – платівка $\lambda/4$, 8, 9, 10 – розширювач світлового пучка, 12 – поляризатор.

хідністю забезпечити різноманітність поляризаційних ситуацій у площині спостереження. Об'єктивом 4 пучок перетворювався у квазіпаралельний і у площині P спостерігалася інтерференція з опорною хвилею. В опорний канал поміщалися платівка $\lambda/4$, що перетворює лінійну поляризацію опорного пучка у циркулярну. На виході інтерферометра встановлювався поляризатор 12 для виділення однієї компоненти поля.

Результати експерименту наведено на рис.5. З лівої сторони на рис.5 світлою стрілкою позначено просторовий репер. На рис.5а всі смуги інтерференційної картини неперервні у полі інтерферограми. При деякому повороті осі пропускання поляризатора 12 у зоні, позначеній білим прямокутником, з'являється яскраво виражений вигин інтерференційної смуги, що свідчить про різку зміну фази у цій точці поля. При подальшому повороті поляризатора 12 у цьому місці виникає розрив смуги, що відповідає точці зародження дисклінацій (рис.5в). У цій точці, як було показано вище, спостерігається локальний екстремум азимута \vec{E}_T . На цьому ж рис.5в можна бачити, що у зону аналізу входить дислокація хвильового фронту V_1 (спрямована до низу виличка). Подальше обертання поляризатора призводить до того, що від точки народження дисклінацій у різних напрямках переміщуються вихорі різного знаку V_2, V_3 (рис.5г). На цьому ж рис.5г у зоні, що обмежена білим прямокутником, можна спостерігати новий розрив інтерференційної смуги, який відповідає точці народження ще однієї пари дисклінацій. На рис.5д у зоні, що виділена прямокутником, вихор V_1 проанігілював із правим народженим вихром, а вихор V_4 рухається у напрямку вихору V_3 . Взагалі рис.5д

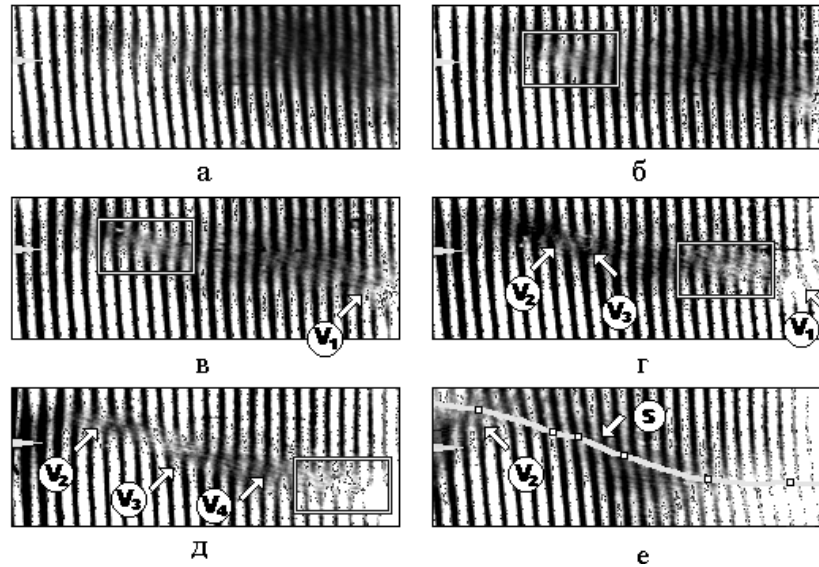


Рис. 5. Результати експериментального визначення положення точок народження та анігіляції дисклінацій. Світлою стрілкою з лівого боку кожного рисунку позначено просторовий репер. Інтерференційні картини, що наведено на рис.5(а-е) відповідають різним орієнтаціям вісі максимального пропускання поляризатора 12 (див. рис.4). Положення s -контурів ілюструється світлою лінією.

відповідає ситуації, коли процес анігіляції вихорів V_3 і V_4 вже відбувся і по всій площині аналізу спостерігаються неперервні інтерференційні смуги, за винятком зони вихору V_2 , що продовжує зсув до лівого кута інтерферограми. Світлою лінією на цьому малюнку позначено положення s -контурів.

Отже, нами встановлено зв'язок між характеристиками повної системи фазових вихорів векторного поля, поведінкою азимута лінійної поляризації електричного поля вздовж s -контурів і поляризаційними сингулярностями, дисклінаціями.

C -точки як вихори різниці фаз. Кореляція між інтенсивністю та поляризацією векторного поля

Розкладемо векторне поле на дві ортогональних циркулярно поляризованих компоненти. Природно, що і у цьому випадку отримаємо повну систему вихорів (суперпозицію двох сіток вихорів), аналіз якої дозволяє встановити зв'язок між вихорами компонент і векторними сингулярностями. Але, при такому розкладі, у порівнянні з розкладом на лінійно поляризовані компоненти, є деякі особливості:

1. Як відомо, різниця фаз між компонентами не залежить від базису розкладу.
2. У ролі вихорів різниці фаз у цьому випадку виступають C -точки.
3. Контури різниці фаз відповідають лініям, вздовж яких азимут поляризації залишається постійним.

Очевидно, що при такому розкладі s -контурів є лінії, які визначаються розв'язками рівняння $A_L(x,y)=A_R(x,y)$. Як і для розкладу на лінійно поляризовані компоненти, для випадку розкладу на циркулярно поляризовані компоненти для вихорів різниці фаз можна ввести топологічні заряди. При цьому топологічний заряд такого вихра за знаком співпадає із зарядом C -точки а його модуль у двічі більше.

Очевидно, що для C -точок можна сформулювати знаковий принцип, аналогічний до знакового принципу, що притаманний вихорам фази у скалярних полях та вихорам різниці фаз, для розкладу векторного поля на лінійно поляризовані компоненти:

1. На замкнутій лінії рівних азимутів знаходиться парна кількість C -точок.
2. Сусідні C -точки, які знаходяться на одній лінії рівних азимутів мають топологічні заряди різних знаків.

Природно, що виконуються топологічні інваріанти:

1. Кількість вихорів різниці фаз (C -точок) із топологічним зарядом одного знака дорівнює кількості вихорів протилежного знака –

$$\sum V_C^* = \sum V_{\tilde{C}} \quad (27)$$

2. Кількість сідлових точок поля різниці фаз пов'язано із кількістю екстремумів різниці фаз і вихорів співвідношенням:

$$\sum (V_C^* + V_{\tilde{C}}) + \sum (\Delta\varphi_C)_{extr} - \sum (\Delta\varphi_C)_{saddle} = 2. \quad (28)$$

Зауважимо, що кількість екстремальних точок

різниці фаз (екстремумів азимуту поляризації) значно менша ніж кількість C -точок і сідел. Цей факт знову ж витікає із властивостей оціночного скалярного поля u_C , яке можна ввести аналогічно до розкладу на лінійно поляризовані компоненти.

Відсутність екстремумів азимуту поляризації, як точок в яких азимут набуває максимальне або мінімальне значення, не суперечить наявності локальних екстремумів азимута лінійної поляризації вздовж s -контурів. Цей факт пояснюється на рис.6. Штриховими лініями позначено s -контурів. Штрих-пунктирними (з однією та двома крапками) позначено дотичні до них лінії рівних азимутів. Як бачимо, саме у точках дотику e_1, e_2 спостерігаються локальні екстремуми азимуту лінійної поляризації. Зупинимося на кореляції між інтенсивністю та поляризацією векторного поля. Передбачення, що така кореляція повинна існувати, впливає з аналогії між полем різниці фаз векторного поля та полем фази скалярного поля.

Легко показати, що модуль градієнта інтенсивності векторного поля підпорядковується співвідношенню:

$$|\nabla I|^2 = 4[A_R |\nabla A_R|^2 + A_L |\nabla A_L|^2 + 2A_R A_L (A_{Rx} A_{Lx} + A_{Ry} A_{Ly})], \quad (29)$$

де $A_R, A_L, A_{Rx}, A_{Lx}, \dots$ – модулі комплексних амплітуд та їх часткові похідні право- та ліво-циркулярно поляризованих компонент.

Квадрат модуля градієнту відношення модулів право- та ліво-циркулярно поляризованих компонент має вигляд:

$$\left| \nabla \frac{A_R}{A_L} \right|^2 = \frac{1}{A_L^4} [A_R |\nabla A_L|^2 + A_L |\nabla A_R|^2 - 2A_R A_L (A_{Rx} A_{Lx} + A_{Ry} A_{Ly})]. \quad (30)$$

Очевидно, що для області поля, в якій спостерігаються незначні зміни поляризації, повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} |\nabla \Delta \Phi_C| \rightarrow 0 \\ |\nabla (A_R / A_L)| \rightarrow 0, \end{cases} \quad (31)$$

де $\Delta \Phi_C = \chi_R - \chi_L$ – різниця фаз між право- та ліво-поляризованими компонентами. З першого рівняння (31) та співвідношень (29,30) випливає, що в області малих змін поляризації градієнт інтенсивності підпорядковується співвідношенню:

$$|\nabla I_{ps}|^2 = 4I (|\nabla A_R|^2 + |\nabla A_L|^2). \quad (32)$$

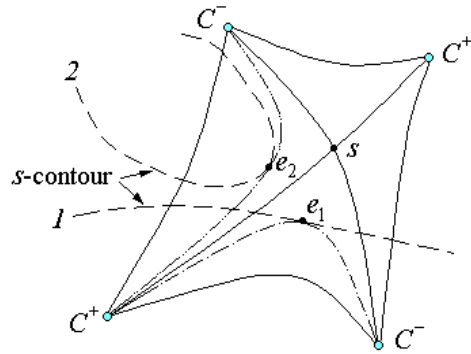
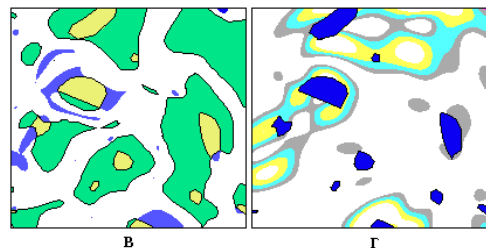
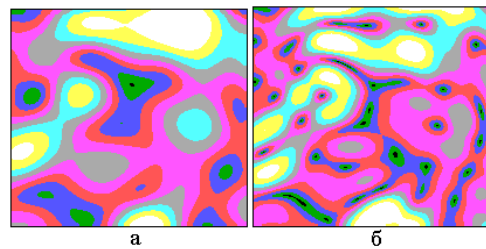


Рис. 6. 1, 2 – s -контурів; e_1, e_2 – точки екстремуму азимуту лінійної поляризації; C^+, C^- – C -точки (вихорі різниці фаз); s – сідлова точка різниці фаз.



■ області з малою $|\nabla \frac{A_R}{A_L}|$
 ■ області з малою $|\nabla \Delta \Phi|$
 ■ області перетину

області з великим градієнтом інтенсивності
 області з малою зміною поляризації

Рис.7. Кореляція між змінами інтенсивності та поляризації поля. Розподіл інтенсивності (а); розподіл градієнта інтенсивності (б); перекриття областей з малим градієнтом різниці фаз та малим градієнтом відношення модулів амплітуд право- та ліво-циркулярно поляризованих компонент (в); відповідність між областями зі швидкою зміною інтенсивності та повільними змінами поляризації (г).

Нехай середні значення модулів амплітуди право- та лівополяризованих компонент відрізняються коефіцієнтом ϵ . Тоді, беручи до уваги, що $A_R, A_L, A_{Rx}, A_{Lx}, \dots$ незалежні випадкові величини, а їх середні значення дорівнюють нулю, можна отримати середні градієнти інтенсивності для всього поля

$$\overline{|\nabla I|^2} = 4\overline{A_L^2} \overline{|\nabla A_L|^2} (1 + \epsilon^4) \quad (33)$$

та для областей з малою зміною поляризації

$$\overline{|\nabla I_{ps}|^2} = 4\overline{A_L^2} \overline{|\nabla A_L|^2} (1 + \epsilon^2)^2. \quad (34)$$

Із (33) та (34) випливає, що відношення середніх градієнтів дорівнює:

$$\eta = \frac{|\nabla I_{ps}|^2}{|\nabla I|^2} = 1 + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^4}. \quad (35)$$

З (35) випливає, що в областях поля з малими змінами поляризації модуль градієнта інтенсивності у середньому в $\sqrt{\eta}$ разів більше, ніж у решті ділянок поля. Так, для "повністю деполяризованого" поля ($\varepsilon=1$) $\sqrt{\eta}=\sqrt{2}$. Тобто у векторному полі малим змінам поляризації відповідають швидкі зміни інтенсивності.

Теоретичні передбачення були перевірені за допомогою комп'ютерного моделювання (рис.7). На рис.7а наведено розподіл інтенсивності випадкового векторного поля з однаковими середніми значеннями інтенсивності право- і лівоциркулярно поляризованих компонент. Рівень інтенсивності відповідає різним градаціям сірого кольору. Чим світліший колір, тим більша інтенсивність. Рис.7б – поведінка градієнта інтенсивності. Як і на рис.7а – чим світліший колір, тим більший модуль градієнта інтенсивності. Рис.7в відображає перекриття областей з малим градієнтом різниці фаз та малим градієнтом відношення модулів амплітуд право- та лівоциркулярно поляризованих компонент. Темні області відповідають областям поля з малим градієнтом відношення A_R/A_L . Більш світлий колір відповідає областям з малим градієнтом різниці фаз. Світлосірий колір – області перекриття цих регіонів. Нарешті, на рис.7г показано області поля з повільними змінами поляризації (темний колір) та області з швидкою зміною інтенсивності. Як бачимо з рис.7г, області поля, в яких поляризація змінюється мало, ринуть до областей з великим градієнтом інтенсивності.

Висновки

Отже, у результаті проведених досліджень можна констатувати, що розроблений нами підхід відкриває можливість дослідження векторних полів та їх сингулярностей на основі теоретичних і експериментальних методів, що існують для скалярних полів. Арсенал цих методів, ступінь їхньої розробки перевершують існуючі подібні методики аналізу векторних полів. Зокрема, для скалярного поля встановлено взаємозв'язок між вихорами – останнім часом активно проводяться дослідження у напрямку встановлення кореляції між характеристиками вихорів, їх сіток (густини,

локалізації вихорів і т.ін.) і традиційними параметрами оптичних полів (фазою, інтенсивністю, довжиною кореляції поля і т.ін.).

Розроблений підхід дозволить надалі розширити область дослідження векторних полів. На користь цього свідчить хоча б той факт, що за допомогою розробленого підходу вдалося уточнити деякі особливості у поведінці дисклінацій, просторово зафіксувати точки їх народження та анігіляції.

При цьому виявляється, що глибокі аналогії між поведінкою фази скалярного поля та поведінкою різниці фаз векторного поля дозволять установити кореляцію між характеристиками поляризації та інтенсивністю.

Відзначимо, що при розкладі поля на лінійно поляризовані компоненти вихоровий аналіз має свої переваги і хиби. До недоліків можна віднести залежність повної системи фазових вихорів ортогональних компонент від вибору базису розкладу векторного поля. Втім, цей недолік компенсується тим, що s -контури і C -точки – інваріантні структури поля відносно базису розкладу. До переваг запропонованого підходу варто віднести той факт, що оптичні вихори окремих компонент, як структури скалярного стаціонарного поля, доступні прямому спостереженню в оптичному експерименті. Такий вихоровий аналіз природно доповнюється вихровим аналізом, який проводиться при розкладі поля на право- та лівоциркулярно поляризовані компоненти. У цьому випадку різниця фаз і, як наслідок, система вихорів різниці фаз (C -точок) не залежить від базису розкладу поля на компоненти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nye J.F. Natural focusing and fine structure of light. (Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia). - 1999.
2. Nye J.F., Berry M. Dislocations in wave trains // Proc. R. Soc. Lond. - 1974. - **A336**. - P. 165-190.
3. Berry M.V. Singularities in waves and rays. // Physics of defects. Les Houches Session XXXV, 28 July - 29 August 1980. - Amsterdam, North-Holland, 1981. - P. 453-543.
4. Nye J.F. The Motion and structure of dislocations in wave fronts // Proc. R. Soc. Lond. - 1981. - **A378**. - P. 219-239.
5. Berry M.V. Rays, wavefronts and phase: a picture book of cups // Abstr. Proc. Huygens Symp., Amsterdam, North-Holland. - 1991.
6. Berry M.V. Wave dislocation reactions in non-paraxial Gaussian beams // J.Mod.Opt. - 1998. - **45**. - P. 1845-1858.

7. *Berry M.V.* Much ado about nothing: optical dislocation lines (phase singularities, zeroes, vortices...) // Proc. SPIE. - 1998. - **3487**. - P.1-5.
8. *Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я.* Дислокации поверхности волнового фронта и нули амплитуды // ЖЭТФ. - 1981. - **80**, вып.5. - С.1789-1797.
9. *Baranova N.B., Mamayev A.V., Pilipetsky N.F., Shkunov V.V., Zeldovich B.Ya.* Wavefront dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation // J.Opt.Soc.Am. - 1983. - **A73**. - P.525-528.
10. *Freund I., Shvartsman N. and Freilikh V.* Optical dislocation networks in highly random media // Opt. Comm. - 1993. - **101**. - P.247-264.
11. *Nye J.F., Hajnal J.V. and Hannay J.H.* Phase saddles and dislocations in two-dimensional waves such as the tides // Proc. R. Soc. Lond. - 1988. - **A417**. - P.7-20.
12. *Freund I., Shvartsman N.* Wave-field singularities: The sign principle // Phys. Rev. - 1994. - **50**, No.6. - P.5164-5172.
13. *Fruend I.* Saddles, singularities, and extrema in a random-phase fields // Phys.Rev. - 1995. - **E52**. - P.2348-2360.
14. *Fruend I.* Critical-point level-crossing geometry in wave fields // J.Opt.Soc.Am. - 1997. - **A14**. - P.1911-1927.
15. *Fruend I.* '1001' correlations in random wave fields // Waves Random Media. - 1998. - **8**. - P.119-158.
16. *White A.G., Smith C.P., Heckenberg N.R., Rubinstein-Dunlop H., McDuff R. and Weiss C.O.* Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser // J. Mod. Opt. - 1991. - **38**. - P.2531-2541.
17. *Basisty I.V., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Optical wavefront dislocations and their properties // Opt. Comm. - 1995. - **119**. - P.604-612.
18. *Soskin M.S., Vasnetsov M.V. and Basisty I.V.* Optical wavefront dislocations // Proc. SPIE. - 1995. - **2647**. - P.57-62.
19. *Angelsky O.V., Besaha R.N., Mokhun I.I.* Appearance of wave front dislocations under interference among beams with simple wave fronts // Optica Applicata. - 1997. - XXVII, 4. - P.273-278.
20. *Mokhun I.* Amplitude zeroes and structure of statistical optical fields. Correlation between the field's intensity and phase // Proc. SPIE. - 1998. - **3573**. - P.567-571.
21. *Nye J.F.* Line singularities in wave fields // Phil. Trans. R. Soc. Lond. - 1997. - **A 355**. - P.2065-2069.
22. *Nye J.F.* Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations // Proc. R. Soc. Lond. - 1983. - **A387**. - P.105-132.
23. *Nye J.F., Hajnal J.V.* The wave structure of monochromatic electromagnetic radiation // Proc. R. Soc. Lond. - 1987. - **A409**. - P.21-36.
24. *Nye J.F.* Lines of circular polarization in electromagnetic wave fields // Proc. R. Soc. Lond. - 1983. - **A389**. - P.279-290.
25. *Hajnal J.V.* Singularities in the transverse fields of electromagnetic waves. I. Theory. // Proc. R. Soc. Lond. - 1987. - **A414**. - P.433-446.
26. *Hajnal J.V.* Singularities in the transverse fields of electromagnetic waves II. // Proc. R. Soc. Lond. - 1987. - **A414**. - P.447-468.
27. *Hajnal J.V.* Observation of singularities in the electric and magnetic fields of freely propagating microwaves // Proc. R. Soc. Lond. - 1987. - **A430**. - P.447-468.
28. *Ангельский О.В., Бесага Р.Н., Мохунь И.И.* О тонкой структуре спекл поля в областях малых амплитуд // Оптика и спектроскопия. - 1997. - **82**, №4. - С.621-629.
29. *Angelsky O., Besaha R., Mokhun I.* Study of statistical optical fields in vicinity of zero-crossing // Proc. SPIE. - 1997. - **3317**. - P.88-96.
30. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. - М.: Наука, 1973.
31. *Красносельский М.А.* Векторные поля на плоскости. - М., Физматгиз. - 1963.