УДК 530.12: 531.18

© 1999 р. В.І. Черепачинський

Чернівецький державний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ ВІДСТАНІ У СПЕЦІАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Розглянуто питання про перетворення відстані між двома точками, які рухаються з довільною швидкістю. Одержано єдине загальне рівняння перетворень для випадку, коли швидкості обох точок однакові. Показано, що у випадку, коли швидкості різні, задача перетворення відстані не має однозначного розв'язку і є некоректною.

A question upon transformation of distance between two points moving with arbitrary speed is considered. The unified general transformation equation for the case of the same speed of both points is obtained. It is shown that in case of different speeds the distance transformation problem has no unambigious solution and is incorrect.

1. З'ясовуючи фізичний зміст перетворень Лоренца, Ейнштейн наводить співвідношення

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,(x_2' - x_1'), \qquad (1)$$

яке встановлює відповідність між власним і релятивістським значеннями довжин протяжних об'єктів [1].

Оскільки (1) одержано без будь-яких вказівок щодо характеру зв'язку між точками 1 та 2, то з його допомогою можуть перетворюватись не тільки жорсткі масштаби, але і відстані між нерухомими одна відносно одної просторово відокремленими матеріальними точками.

Так, якщо точки 1 та 2 нерухомі в інерціальній системі відліку (ІСВ) *L*, відносно якої зі швидкістю ν рухається ІСВ *K*, то (1) дає для перетворення r^L у r^K співвідношення

$$r^K = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\; r^L. \qquad (2)$$

Коли ж точки 1 та 2 рухаються у ІСВ *L* зі швидкістю v, то для перетворення r^L у r^K з (1) випливає співвідношення

$$r^K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\; r^L. \qquad (3)$$

Разом із тим, у багатьох кінематичних задачах доводиться оперувати відстанями між точками, які рухаються в ІСВ *L* з будь-якою допустимою спеціальною теорією відносності (СТВ) швидкістю u^L. Тому не може не виникнути запитання: як перетворювати r^L у r^K у випадку, коли u^L не дорівнює ні нулю, ні v, а також у випадку, коли $u_1^L \neq u_2^L$? Оскільки СТВ не дає прямої відповіді на це запитання, то дана робота і є спробою відшукати таку відповідь.

2. Уявимо, що ІСВ *K* та ІСВ *L* рухаються одна відносно одної так, що вісь X^K ковзає по осі X^L, а початок координат ІСВ *K* зміщується у бік зростання додатніх значень осі X^L.

Оскільки при такій орієнтації систем усі релятивістські ефекти, від яких можуть залежати результати даної роботи, пов'язані лише з осями X^K та X^L, то для спрощення ми обмежимося розглядом тільки одномірного випадку.

Насамперед виберемо дві нерухомі одна відносно одної точки 1 та 2, що рухаються вздовж X^L зі швидкістю u^L, і спробуємо знайти співвідношення, яке зв'язує значення r^L та r^K, виміряні між цими точками.

Нехай x_1^L та x_2^L - це координати точок 1 та 2 у момент часу t_1^L. При $x_2^L > x_1^L$ відстань між цими точками у ІСВ *L* визначиться так:

$$r^L = x_2^L - x_1^L. \qquad (4)$$

Якщо відлік часу в обох системах розпочатий у момент збігу початків їх координат, то, скориставшись перетвореннями Лоренца, ми можемо визначити координату

$$x_1^K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(x_1^L - v t_1^L)$$

у момент часу

$$t_1^K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t_1^L - \frac{vx_1^L}{c^2})$$

та координату

$$x_2^K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x_2^L - vt_1^L)$$

у момент часу

$$t_2^K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t_1^L - \frac{vx_2^L}{c^2}).$$

Оскільки кожна з точок при цьому виявилася прив'язаною до ІСВ *K* у різні моменти t_1^K і t_2^K, то для визначення r^K координати x_1^K та x_2^K повинні бути приведені до одного і того ж моменту часу. Для цього необхідно врахувати, що за час $t_2^K - t_1^K$ точки 1 і 2, переміщуючись відносно ІСВ *K* зі швидкістю

$$u^K = \frac{u^L - v}{1-\frac{vu^L}{c^2}},$$

змінять свої координати на величину

$$\Delta x^K = (t_2^K - t_1^K)u^K.$$

Оскільки $t_1^K > t_2^K$, то в залежності від того, до моменту t_1^K чи до моменту t_2^K ми маємо намір приводити обидві координати, необхідно відповідно або збільшити на Δx^K координату x_2^K, залишивши незмінною координату x_1^K, або зменшити на Δx^K координату x_1^K, залишивши незмінною координату x_2^K. Обидва випадки дають однаковий результуючий вираз

$$r^K = x_2^K - x_1^K + \Delta x^K.$$

Підставляючи у цей вираз значення всіх величин та враховуючи (4), дістаємо

$$r^K = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu^L}{c^2}} r^L. \qquad (5)$$

Це і є рівняння перетворень відстані між точками, які рухаються у ІСВ *L* зі швидкістю u^L. З його допомогою можна без проміжних обчислень розв'язувати всі кінематичні задачі на перетворення r^L у r^K у разі $u_1^L = u_2^L = u^L$.

3. Тепер одержимо декілька відомих часткових випадків рівняння (5).

Якщо точки 1 та 2 нерухомі у ІСВ *L*, то $u^L = 0$ і з (5) одержуємо співвідношення (2).

Якщо ці точки нерухомі у ІСВ *K*, то $u^L = v$ і (5) перетворюється у співвідношення (3).

Якщо точки 1 та 2 відповідають двом сусіднім максимумам напруженості електричного чи магнітного полів деякої плоскої монохроматичної хвилі, а напрям розповсюдження цієї хвилі збігається з напрямом зростання додатніх значень осі X^L, то, підставляючи в (5) $u^L = c$, $r^L = \lambda^L$ і $r^K = \lambda^K$, отримаємо

$$\lambda^K = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\lambda^L.$$

Якщо ж ця хвиля розповсюджується у протилежному напрямі, то $u^L = -c$ і співвідношення (5) набуває вигляду

$$\lambda^K = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\lambda^L.$$

Як бачимо, рівняння перетворень довжини електромагнітної хвилі збігаються з рівняннями релятивістського ефекту Доплера для довжини хвилі [2] і, отже, цей ефект міститься в самих перетвореннях просторових відстаней.

4. З появою співвідношення (5) стає зрозумілою марність спроб противників СТВ зіштовхнути між собою співвідношення (2) та (3) у спеціально придуманих мислених експериментах для одержання в різних системах відліку якісно відмінних результатів. Усі "протиріччя СТВ" у таких відомих парадоксах довжини, як парадокс транспортера, парадокс Ріндлера, парадокс жердини та сараю, вже *apriori* приречені на спростування, оскільки співвідношення (2) та (3) в принципі не можуть заперечувати одне одного, як часткові випадки одного і того ж більш загального рівняння (5).

5. Співвідношення (5) ще раз підтверджує, що значення просторової відстані, виміряне в одній ІСВ, не збігається зі значенням цієї відстані, виміряним в іншій ІСВ і, отже, є величиною відносною. При цьому саме (5) дозволяє вперше побачити у цій відносності два дещо різних аспекти: відому раніше відносність, яка викликана наявністю швидкості ν, та відносність, що викликана наявністю швидкості u^L.

6. Співвідношення (5) може бути одержано і по-іншому. Наприклад, шляхом дворазового перетворення через деяку проміжну ІСВ *M*, у якій швидкості обох точок дорівнюють нулю.

Для цього спочатку потрібно здійснити переведення релятивістського значення r^L у власне значення r^M, а потім отримане r^M перетворити у релятивістське значення r^K.

Однак методика, якою ми скористались у пункті 2, заслуговує на увагу в тому плані, що за її допомогою легше розібратись з задачею перетворення відстані між точками, які рухаються одна відносно одної, до розгляду якої ми тепер переходимо.

7. Отже, уявимо, що кожна з точок 1 та 2, між якими вимірюється перетворювана відстань, рухається вздовж осі X^L з будь-якою допустимою СТВ швидкістю u^L і при цьому має місце нерівність $u_1^L \neq u_2^L$.

Якщо x_1^L та x_2^L – це координати точок 1 та 2 у момент часу t_1^L, то при $x_2^L > x_1^L$ значення r^L визначиться виразом (4). Аналогічно до попередньої задачі будуть визначені за допомогою перетворень Лоренца координата x_1^K у момент часу t_1^K та координата x_2^K у момент часу t_2^K. Але, приводячи обидві координати до одного з цих моментів, потрібно врахувати, що за час $t_1^K - t_2^K$ точки 1 та 2, переміщуючись відносно ІСВ K з різними швидкостями

$$u_1^K = \frac{u_1^L - v}{1 - \frac{v u_1^L}{c^2}} \quad \text{та} \quad u_2^K = \frac{u_2^L - v}{1 - \frac{v u_2^L}{c^2}},$$

змінять свої координати на різні величини

$$\Delta x_1^K = (t_1^K - t_2^K) u_1^K \quad \text{та} \quad \Delta x_2^K = (t_1^K - t_2^K) u_2^K .$$

Тому для r^K у момент t_1^K ми отримаємо

$$r_1^K = x_2^K - x_1^K + \Delta x_1^K ,$$

а для r^K у момент t_2^K –

$$r_2^K = x_2^K - x_1^K + \Delta x_2^K .$$

Відповідно до цього остаточні формули перетворення r^L у r^K матимуть вигляд:

$$r_1^K = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_1^L}{c^2}} r^L \quad \text{та} \quad r_2^K = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_2^L}{c^2}} r^L .$$

Як бачимо, одному і тому ж r^L відповідають два значення r^K і, отже, зовсім не байдуже, до якого моменту часу приводити координати обох точок.

Щоб однозначно встановити, яке з цих двох значень r^K більше відповідає перетворюваному значенню r^L, необхідно з’ясувати, який з двох моментів t^K більше відповідає моменту t_1^L. Але з позицій СТВ таке питання некоректне. Для точки 1 момент t_1^K у тій же мірі відповідає моменту t_1^L, як момент t_2^K відповідає моменту t_1^L для точки 2. Оскільки ніяких інших передумов для надання переваги одному з цих моментів не існує, то позбутися неоднозначності у визначені r^K неможливо.

Це змушує нас констатувати, що задача перетворення відстані між точками, що рухаються одна відносно одної, не має однозначного розв’язку і з точки зору СТВ повинна бути визнана некоректною.

8. Оскільки обидва розглянуті вище випадки $u_1^L = u_2^L = u^L$ і $u_1^L \neq u_2^L$ охоплюють усі кінематичні ситуації, що можуть виникнути при перетворенні r^L у r^K, виміряних між точками 1 та 2, то нашими дослідженнями повністю вичерпано питання, винесене в заголовок даної роботи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйнштейн А.* О принципе относительности и его следствиях / Собр. науч. тр.: В 4 т. - М., 1965. - Т.1. - С.7-35.
2. *Франкфурт У.И.* Специальная и общая теория относительности: исторические очерки. - М.: Наука, 1968.