

© 1999 р. О.В. Ангельський, Р.М. Бесага, А.І. Мохунь,
І.І. Мохунь, М.С. Соскін*

Чернівецький державний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

*Інститут фізики НАН України, Київ

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ СИНГУЛЯРНОСТІ

Розглянуто елементарні поляризаційні структури, які включають обидва типи поляризаційних сингулярностей: s -контури та C -точки. Наведено дані комп'ютерного та фізичного моделювання. Результати досліджень розповсюджені на випадок квазіоднорідно поляризованих полів.

Elementary polarization structures containing both types of polarization singularities, such as s -contours and C -points are considered. The results of computer simulation and physical modeling are presented. The obtained results are extended to the case of fields with quasi-uniform state of polarization.

Останнім часом у дослідженнях статистичних полів все частіше застосовуються методи топології, що базуються на фундаментальних властивостях нашого простору і є потужним інструментом дослідження просторово розподілених величин [1-12]. Топологічні методи дають можливість встановити взаємозв'язок між особливими (сингулярними, стаціонарними) точками величини, яка досліджується, та визначають її якісну поведінку в області аналізу.

Для монохроматичного векторного поля такими особливими множинами є дисклінації – множини точок, на яких трансверсальні компоненти поля досягають нульового значення у деякий момент часу, та поляризаційні сингулярності, які визначають якісну поведінку параметрів поляризаційних еліпсів, уздовж яких рухається кінець електричного вектора \vec{E}_t [1,3-6]. У параксильному наближенні просторовий розподіл поляризаційних еліпсів містить поляризаційні сингулярності двох типів: S -поверхні та C -лінії [1,3-6]. На S -поверхнях поле поляризоване лінійно, відповідно невизначеним є напрямком обертання кінця електричного вектора \vec{E}_t . Ці поверхні поділяють поле на області з лівою та правою поляризацією. C -лінії – лінії циркулярної поляризації поля, які характерні тим, що вздовж них поляризаційний еліпс вироджується у коло і, відповідно, невизначеним є напрямком головної осі (азимута) поляризаційного еліпса. При обході C -лінії вздовж замкнутого контуру азимут поляризації здійснює поворот на кут кратний π [1,5]. У площині спостереження, ортогональній до

напрямку розповсюдження поля, S -поверхні, C -лінії та дисклінації є відповідно s -контурами, C -і d -точками [6].

З поляризаційними сингулярностями і дисклінаціями можна пов'язати іншу систему сингулярностей – сітку вихорів різниці фаз [7], яка визначається, вихорами фази ортогональних компонент поля. Як переваги використання такої системи сингулярностей відзначимо можливість точного виміру характеристик окремо взятого вихору різниці фаз методами інтерферометричної фазометрії [7,8]. На відміну від цього, вимір характеристик s -контурів, C -точок традиційними методами поляриметрії має певні недоліки. Традиційні методи не дають можливості точно встановити наявності сингулярності в тій чи іншій точці простору, що при топологічному аналізі поля переводить їх у розряд допоміжних методів досліджень.

Природно, щоб вивчити загальну топологічну будову векторного поля (більш чітко зрозуміти поведінку поляризації), необхідно розглянути деякі елементарні поляризаційні структури, які пов'язані з s -контурами та C -точками і дисклінаціями.

Елементарні поляризаційні ситуації, що виникають у векторному полі, були всебічно розглянуті в [1,3,4] в областях, що прилягають безпосередньо до поляризаційних сингулярностей. Але аналіз носив локальний характер і включав лише один тип поляризаційних сингулярностей. Водночас, як показано в роботі [6], усі типи сингулярностей векторних полів взаємно визначають одна одну.

Тому, з нашої точки зору, доцільно було б розглянути прості за поляризаційною структурою поля, що включають обидва типи поляризаційних сингулярностей: s -контур і C -точку. Таку можливість дає розроблений вихровий аналіз [7].

Природно, що найбільш "прості" векторні поля містять s -контур з мінімальною кількістю (два) вихорів різниці фаз. Щоб область, обмежена s -контуром мала відмінний від нуля сумарний топологічний заряд ($I_c = \pm 1/2$), ці вихорі повинні належати різним ортогональним компонентам [7], тобто сумарне поле можна розглядати як суперпозицію двох ортогонально поляризованих вихрових пучків.

Припустимо для простоти, що обидва вихрових пучки утворені ізотропними вихорами [9]. У полярній системі координат із початком у центрі вихору комплексна амплітуда такого пучка описується співвідношенням:

$$U(r) = A(r) \exp\{j(S\Phi + \Phi_0)\}, \quad A(0) = 0, \quad (1)$$

де $S = \pm 1$ – топологічний заряд, Φ_0 – початкова фаза вихрового пучка, $A(r)$ – модуль амплітуди, в центрі вихору рівний нулю.

Нехай вихрові пучки поширюються паралельно один до одного і центри вихорів знаходяться на відстані $2l$. Введемо декартову систему координат (X, Y, Z) так, щоб її початок був на однаковій відстані від обох дислокацій, вісь OY проходила б через обидва вихорі і напрямком осі OZ збігався б з напрямком поширення пучків.

Легко показати, що контур, який відповідає довільній різниці фаз $\Delta\phi$, визначеній з точністю до π , описується співвідношенням:

$$\left[X - l\beta \frac{S_1 S_2 + 1}{2} \right]^2 + S_1 S_2 Y^2 + (S_1 S_2 - 1) \times \\ \times \beta XY = l^2 \left[S_1 S_2 + \frac{(S_1 S_2 + 1)^2}{4} \beta^2 \right], \quad (2)$$

де $\beta = \text{ctg}(\Delta\phi - \Delta\Phi)$, $\Delta\Phi = \Phi_{01} - \Phi_{02}$ – різниця початкових фаз вихрових пучків, S_1, S_2 – топологічні заряди.

Якщо S_1 і S_2 одного знака, то (2) трансформується до вигляду:

$$[X - l\beta]^2 + Y^2 = l^2 [1 + \beta^2]. \quad (3)$$

Якщо S_1 і S_2 відрізняються знаком, то (2) переходить у співвідношення:

$$X^2 - Y^2 - 2\beta XY = l^2. \quad (4)$$

Рівняння (4) визначає контури гіперболічного типу, тобто незамкнуті. Тому більш докладно проаналізуємо лише (3), що є рівнянням кола з

радіусом і положенням центру, які зумовлені відстанню між вихорами і співвідношенням різниці фаз $\Delta\Phi$, $\Delta\phi$. Відзначимо, що у випадку формування сумарного поля анізотропними вихорами [9], (3) трансформується у рівняння еліпса. Аналогічними співвідношеннями описуються контури сумарного поля, що утворене вихорами більш складної структури, якщо відстань між ними менша, ніж розміри зони ядра вихору [1], області, в якій еквіфазні лінії дислокацій компонент практично прямі і вихрове поле компоненти може бути описане лінійним наближенням.

Повернемося до співвідношення (3). Нехай поперечні розміри вихрових пучків значно перевищують відстань між дислокаціями і $A_1(r) \approx \mu A_2(r)$, де $\mu = \text{const}$. Тоді можна стверджувати, що для будь-якої точки поля, за винятком області поля, що безпосередньо прилягає до центрів вихорів, де A_1 і A_2 досягають нульового значення, виконується співвідношення:

$$A_1(X, Y - l) \approx \mu A_2(X, Y + l). \quad (5)$$

Зв'язок між відношенням модулів амплітуд компонент, різницею фаз і розмірами півосей еліпсів визначається виразом [10]:

$$\sin 2\theta = (\sin 2\zeta) \sin \Delta\phi, \quad (6)$$

де $\text{tg}\theta = b/a$, b, a – мала і велика піввісь поляризаційного еліпса відповідно, $\text{tg}\zeta = \mu$.

З (6) випливає, що відмінність поляризаційних характеристик, яка визначається різницею ексцентриситетів еліпсів у різних точках поля, практично однозначно визначаються відмінністю $\delta = \Delta\phi(X_1, Y_1) - \Delta\phi(X_2, Y_2)$ в різниці фаз. Будемо вважати, що поляризаційні характеристики поля в цих точках відрізняються мало, якщо $|\delta| \leq \pi/10$, що відповідає зміні $\text{tg}\theta = b/a$ на величину порядку 0,2. З (3) випливає, що область, у якій спостерігаються істотні відмінності поляризаційних характеристик поля, порівнянна за розмірами і локалізацією з областю, яка обмежена контурами різниці фаз, що обумовлена співвідношенням $|\Delta\phi - \Delta\Phi| > \pi/10$. Рівняння таких контурів описується виразом:

$$[X \pm 3l]^2 + Y^2 = 10l^2 \quad (7)$$

незалежно від різниці фаз $\Delta\Phi$ у вихрових пучках, тобто визначається тільки відстанню між дислокаціями. Причому контур різниці фаз, що відповідає $\Delta\Phi$, з точністю до π , – пряма, яка проходить через центри обох вихорів. Проведений розгляд ілюструється рис.1.

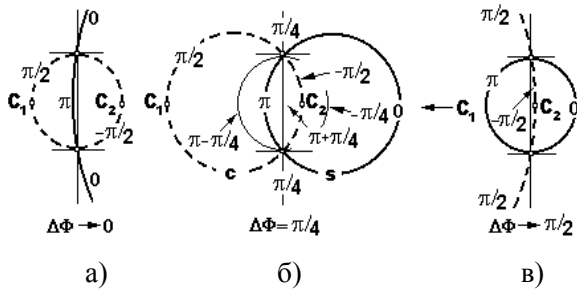


Рис.1. Характеристики контурів різниці фаз і локалізація C -точок у залежності від різниці фаз між вихровими пучками.

З рис.1а можна побачити, що при $\Delta\Phi \rightarrow 0$ c -контур – коло з діаметром, що дорівнює відстані між вихорами. Обидві C -точки знаходяться на однаковій відстані від дислокацій. При $\Delta\Phi \rightarrow \pi/2$ (рис.1в) одна з C -точок прагне зайняти положення на прямій, що з'єднує вихорі, а друга розташована на безмежності. Рис.1б відповідає $\Delta\Phi = \pi/4$.

На рис.2-5 наведено результати комп'ютерного моделювання елементарних поляризаційних сингулярностей, що утворені внаслідок інтерференції ортогонально-поляризованих вихрових пучків. При цьому змінювались не тільки різниця фаз між вихровими пучками, а і параметри самих дислокацій, такі як знак, кривизна еквіфазних ліній у зоні ядра вихора. Всі параметри, яким відповідає результат інтерференції, наведено у правому нижньому куту рис.2-5. Тут указано кривизну фронту вздовж осей OX та OY , відстань, різницю фаз між вихровими пучками, а також збігаються чи ні знаки вихорів. Рис.2-5а,б ілюструють поведінку еквіфазних ліній вихорів, що інтерферують. Рис.2-5в відповідає полю різниці фаз результуючого поля. Положення s - та c -контурів вказано стрілками. Значення фази та різниці фаз у конкретних областях поля позначено рівнями сірого. Відповідність між рівнем сірого та фазою, різницею фаз наведено на рис.2-5г. Величина фази змінюється в межах $0 \div 2\pi$. На відповідність кольору та конкретного значення фази вказує нижній рядок цифр. Величину різниці фаз наведено з точністю до модуля π . Відповідність між рівнем сірого та величиною різниці фаз вказана у нижньому рядку цифр.

Рис.2 відповідає інтерференції ізотропних вихорів з різницею фаз між вихровими пучками $\Delta\Phi = 0,5\pi$. Як і передбачалося, всі контури різниці фаз – кола. Рис.3 ілюструє той факт, що доки відстань між центрами вихрових пучків така, що еквіфазні лінії в зоні ядра можна вважати прямими, контур різниці фаз, який відповідає

за точністю до модуля різниці фаз між вихровими пучками плюс $\pi/2$, замкнений, та має розміри, сумірні із відстанню між центрами дислокацій. Природно, що форма контуру при цьому спотворюється. При подальшому рості кривизни еквіфазних ліній поля фази вихорів, що інтерферують, або збільшені відстані між ними, такі контури розриваються та трансформуються в контури зі складною формою, наприклад у вигляді спіралей (рис.4). Для порівняння на рис.5 наведено результати інтерференції вихорів, знаки топологічних зарядів яких різні. Як бачимо з рис.5, навіть для ізотропних вихорів усі контури різниці фаз незамкнуті.

Окремо зупинимося на рис.3. Як можна побачити, внутрішній s -контур, який проходить через центри вихрових пучків, оточено групою додаткових s -контурів. Тобто утворилась структура вкладених s -контурів типу "матрьошки". Причому у базисі розкладу на зовнішніх контурах вихорів різниці фаз немає. З цього факту витікає два висновки:

1. Зміна азимуту лінійної поляризації при обході зовнішнього контуру не досягає π . Тобто, сумарний топологічний заряд C -точок у середині кожного зовнішнього s -контуру (включаючи C -точки, які лежать всередині s -контурів, що оточені контуром) дорівнює нулю.

2. На кожному зовнішньому s -контурі обов'язково є хоча б одна точка народження та анігіляції дисклінацій. Тобто при зміні базису розкладу, при певному його положенні відносно початкового базису (рис.3), повинні утворитися два різнофазових вихорів, що відповідають фазовим вихорам однієї ортогональної компоненти.

Цей факт ілюструється рис.6. Кожний наступний рисунок на рис.6, відрізняється від попереднього поворотом базису розкладу на величину $0,125\pi$. Вихорі на рис.6 позначено білими з чорним крапками. Вихорі, що відповідають початковому базису, позначено цифрами 1 і 2. При зміні базису розкладу (рис.6б) вони починають зсуватися за годинниковою стрілкою. На цьому ж рис.6б бачимо, що у зоні спостереження на зовнішньому s -контурі (другому від контуру з вихорами 1,2) візуалізувалася точка народження дисклінацій. На рис.6б вона позначена літерою b . На рис.6в від цієї точки у різних напрямках уздовж s -контуру прямують вихорі 3 та 4. Напрямок їхнього руху вказано маленькими стрілками. З рис.6г видно, що на першому зовнішньому s -контурі також народилися два вихорі – 5 і 6.

Причому пари вихорів 3,4 та 5,6 рухаються у протилежних напрямках. Переміщення пари вихорів при зміні базису розкладу триває до їх зустрічі на іншому боці s -контуру та анігіляції. Така точка вказана літерою a на рис.бк. Цікаво відзначити, що на внутрішньому s -контурі також є точки народження та анігіляції дисклінацій. Про це свідчить рис.бй, на якому можна побачити додаткову пару вихорів 7 та 2'.

Поширимо отримані результати на статистичні поля з квазіоднорідною поляризацією. Очевидно, що в цьому випадку, незалежно від різниці фаз між компонентами, можна вибрати базис розкладу, в якому сітки вихорів ортогональних за поляризацією компонент близькі за структурою, тобто відстань між сусідніми дислокаціями одного знака ортогональних компонент $2l_v$ невелика

у порівнянні із середніми розмірами спеклів. Такий ситуації відповідає поле, розсіяне об'єктами типу матового скла.

Як відзначалося в [1], чим більш однорідно поляризоване поле, тим менша ця відстань. У граничному випадку фазові вихорі компонент збігаються, що відповідає скалярному випадку [1]. Очевидно, що для квазіоднорідно поляризованого поля, за винятком областей, що безпосередньо прилягають до нулів, виконується (5), причому тим точніше, чим менша відстань між нулями (більша ступінь кореляції ортогональних компонент). Якщо $2l_v$ сумірна розмірам зони ядра вихору або менша, то розміри зон, де спостерігаються істотні відмінності поляризаційних характеристик поля, визначаються із співвідношень типу (7).

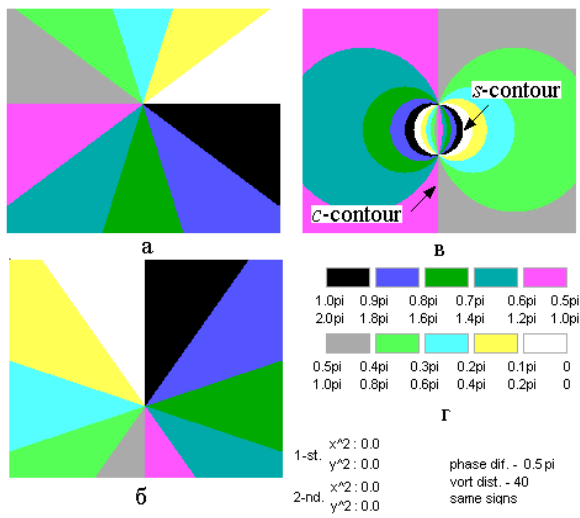


Рис.2. Різниця фаз ізотропних вихорів одного знаку.

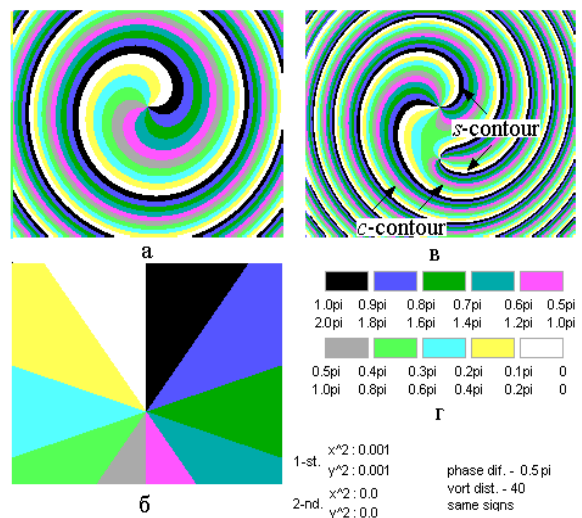


Рис.4. Різниця фаз анізотропного і ізотропного вихорів одного знаку.

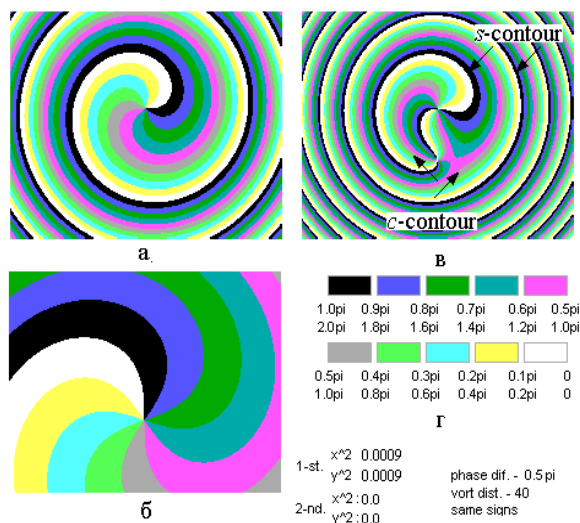


Рис.3. Різниця фаз анізотропних вихорів одного знаку.

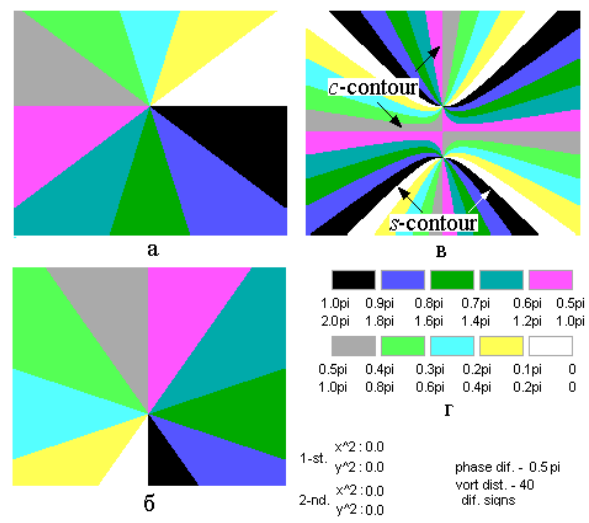


Рис.5. Різниця фаз ізотропних вихорів протилежного знаку.

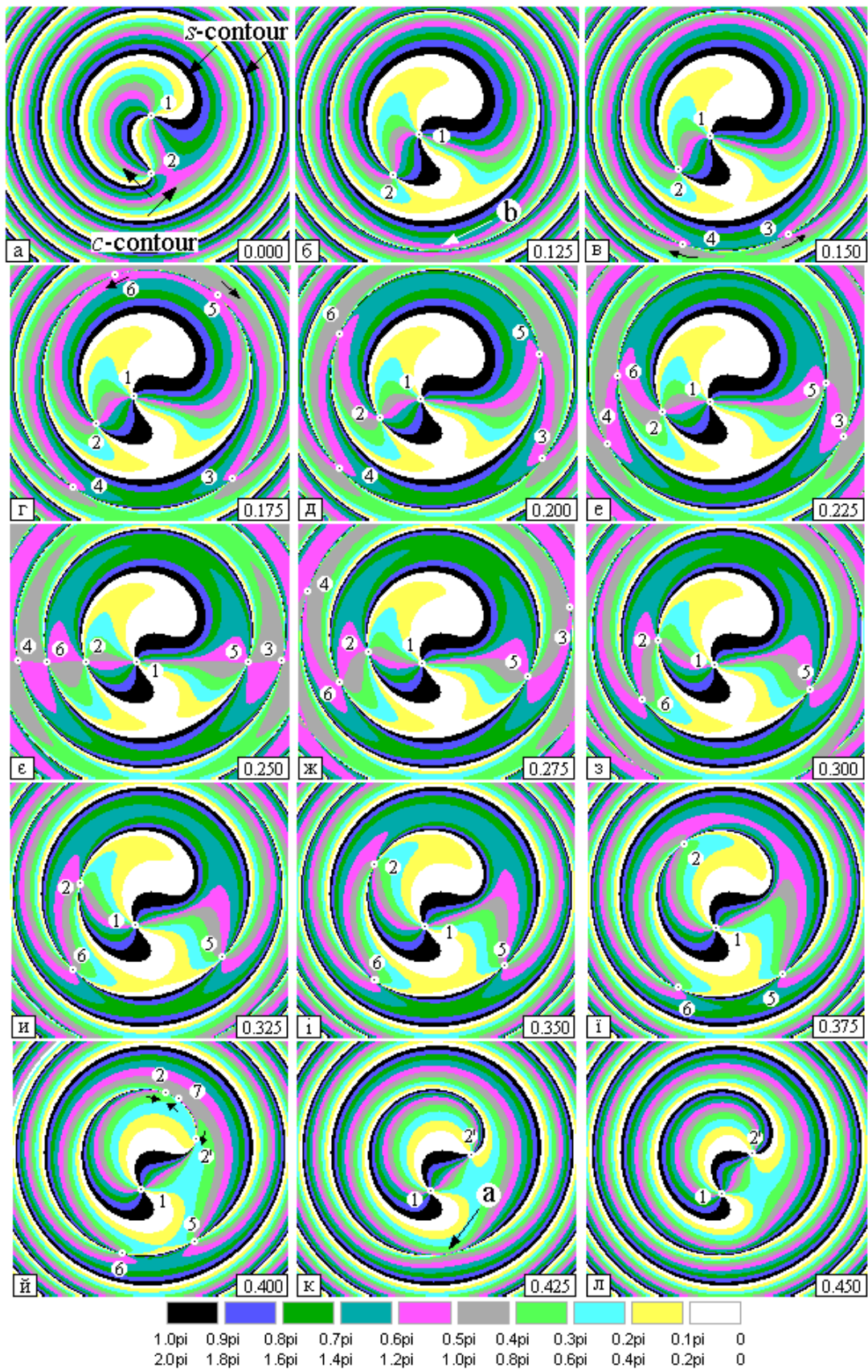


Рис. 6. Точки зародження та анігіляції вихорів на s -контурі, утворених анізотропними вихорами одного знаку.

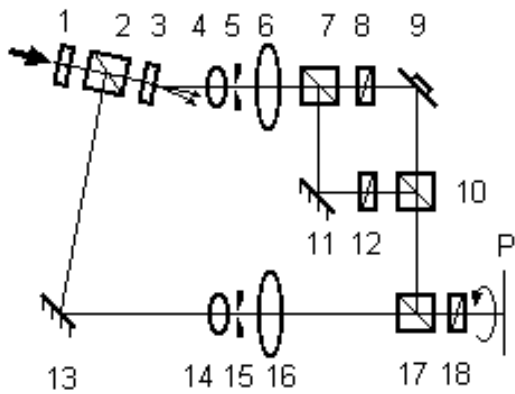


Рис. 7. Схема експериментального моделювання елементарних поляризаційних областей. 1 – платівка $\lambda/4$, 2,7,17 – світлоподілювачі, 3 – комп'ютерно синтезована голограма, 4,5,6, 14,15,16 – розширювачі світлового пучка, 8,12,18 – поляризатори, 9 – дзеркало на п'єзокераміці, 11,13 – дзеркала.

З роботи [9] випливає, що середні розміри спеклів скалярного поля визначаються довжиною кореляції поля l_{coh} . Оскільки l_{coh} визначається, насамперед, поперечними розмірами об'єкта, що розсіює, і відстанню до площини спостереження, будемо для простоти припускати, що l_{coh} однакова для обох компонент (фізична ситуація, яка реалізується найбільш часто). Очевидно, що відношення середньої відстані між сусідніми дислокаціями одного знака ортогональних компонент $2\bar{l}_v$ до l_{coh} визначає відносні розміри зон, у яких значно змінюються поляризаційні характеристики поля. При збільшенні відстані між сусідніми дислокаціями ортогональних компонент до розмірів зони локальної структури вихору [1], еквіфазні лінії поля дислокації вже не можна вважати прямими. Проте, з нашої точки зору, викривлення еквіфазних ліній не повинно призвести до істотних змін розмірів зон, у яких значно змінюються поляризаційні характеристики поля. Про це ж свідчать результати комп'ютерного моделювання елементарних поляризаційних сингулярностей. Тому відношення $2\bar{l}_v/l_{coh}$ і в цьому випадку повинно бути важливим інформативним параметром.

Очевидно, що подальші дослідження в цьому напрямку дозволять установити зв'язок між локальними та інтегральними поляризаційними характеристиками векторного поля.

Фізичне моделювання елементарних поляризаційних областей було проведено в експериментальному розташуванні наведеному на рис.7. Лазерний пучок направлявся в подвійний інтерферометр типу Маха-Цандера. Перед світлопо-

ділювачем 2 встановлювалася фазообертаюча платівка $\lambda/4$, що перетворювала лінійну поляризацію в циркулярну. В одному з каналів інтерферометра встановлювалася синтезована голограма 3, що була отримана за методикою [11,12]. В результаті дифракції на такій голограмі гауссовий пучок набував дислокації хвильового фронту з одиничним топологічним зарядом. Після розширення і фільтрації коліматором 4,5,6 утворювався циркулярно-поляризований вихор, близький до ізотропного. Такий пучок направлявся у внутрішній інтерферометр. У плечах цього інтерферометра розміщалися схрещені поляризатори 8,12, тобто формувалися ортогонально поляризовані вихрові пучки. Одне із дзеркал інтерферометра 9 установлювалося на п'єзокераміку, що давало можливість варіювати різ-

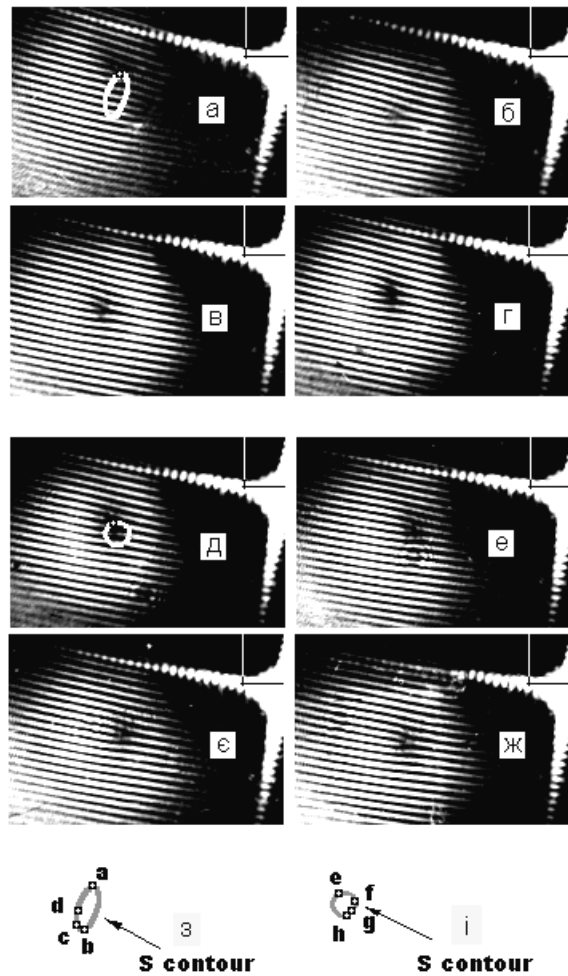


Рис.8. Результати експериментального моделювання елементарних s-контурів. (а)–(г), та (д)–(ж) відповідають різним різницям фаз між вихровими пучками. (а)–(г) ілюструє рух дислокацій при деякій невизначеній різниці фаз. (д)–(ж) відповідає різниці фаз порядку $|\pi/2|$. (з),(і) – експериментально знайдені s-контури.

ницю фаз між пучками в межах $\sim 3/2\pi$. За допомогою світлоподілювача 10 дзеркал 9,11 змінювалася відстань між вихорами і задавався однаковий напрямок поширення пучків. За допомогою поділювача 17 сумарне поле змішувалося з опорним пучком і в площині P спостерігалася інтерференційна картина. Для візуалізації руху дисклінації вздовж s -контур після поділювача 17 встановлювався поляризатор 18. Для фіксації положення інтерференційної вилички в площині спостереження організовувався репер у вигляді дифракційної картини від прямокутного отвору.

Результати експериментальних досліджень ілюструються рис.8. Рис.8а-г і рис.8д-ж відповідають різній різниці фаз $\Delta\Phi$ між пучками, що містять вихорі. Нумерація рисунків (а-ж) відбиває орієнтацію вихідного поляризатора (крок азимута поляризатора $\sim \pi/4$). Як видно з рис.8, дислокація, що візуалізує дисклінацію при зміні орієнтації вісі пропускання поляризатора рухається вздовж деякого замкнутого контуру. Розміри і форма контуру змінюються при зміні різниці фаз. Траєкторії прямування дислокації, її положення при конкретному азимуті наведено на рис.8з,і. Відхилення форми s -контур від кола викликане наявністю залишкових абераций і відповідно більш складною формою еквіфазних ліній поля вихору. Ці ж s -контури приведені на рис.8а,д.

Отже, розгляд на основі вихорового аналізу елементарних поляризаційних структур, що включають обидва типи поляризаційних сингулярностей (s -контури і C -точки), дозволив поглибити наше уявлення про квазіоднорідно поляризовані поля і встановити, що відстань між сусідніми дислокаціями одного знака ортогональних за поляризацією компонент визначає розміри областей, у яких спостерігається значні відмінності поляризаційних характеристик.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nye J.F.. Natural focusing and fine structure of light. (Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia.). - 1999.
2. Nye J.F., Berry M. Dislocations in wave trains // Proc. R. Soc. Lond. - 1974. - **A336**. - P. 165-190.
3. Nye J.F. Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations // Proc. R. Soc. Lond. - 1983. - **A387**. - P. 105-132.
4. Nye J.F., Hajnal J.V. The wave structure of monochromatic electromagnetic radiation // Proc. R. Soc. Lond. - 1987. - **A409**. - P. 21-36.
5. Nye J.F. Lines of circular polarization in electromagnetic wave fields // Proc.R. Soc.Lond. - 1983. - **A389**. - P. 279-290.
6. Hajnal J.V. Singularities in the transverse fields of electromagnetic waves. I. Theory // Proc. R. Soc. Lond. - 1987. - **A 414**. - P. 433-446.
7. Ангельський О.В., Бесага Р.М., Мохунь І.І., Сопин М.О., Соскін М.С. Сингулярності у векторних полях // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 57: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1999. - С.88-99.
8. White A.G., Smith C.P., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H., McDuff R. and Weiss C.O. Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser // J. Mod. Opt. - 1991. - **38**. - P. 2531-2541.
9. Freund I., Shvartsman N. and Freilikher V. Optical dislocation networks in highly random media // Opt. Comm. - 1993. - **101**. - P. 247-264.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука. - 1973.
11. Basisty I.V., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Optical wavefront dislocations and their properties // Opt. Comm. - 1995. - **119**. - P. 604-612.
12. Soskin M.S., Vasnetsov M.V. and Basisty I.V. Optical wavefront dislocations // Proc. SPIE. - 1995. - **2647**. - P. 57-62.