

ПРО МОЖЛИВІСТЬ ОПТИЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ

Подані результати дослідження дифракції випромінювання на мультифракталах, побудованих на основі множини Кантора. Знайдено зв'язок між рівнем та ваговим параметром мультифрактального об'єкта зі спектрами сингулярності і параметрами асиметрії його дифракційної картини. Показано, що положення максимуму спектра сингулярності залежить від розмірності підтримуючого фрактала. За напівшириною спектра сингулярності і значенню коефіцієнта асиметрії розподілу інтенсивності у ближньому полі можна оцінити ваговий параметр мультифрактала. Значення коефіцієнта асиметрії у зоні насичення залежить від рівня підтримуючого фракталу.

Diffraction of radiation by the Cantor set based multifractals is studied. Connection between the dimension of an object's supporting fractal and its level is searched for as well as one between the multifractal's construction parameter, singularity spectra, and asymmetry parameters of its diffraction pattern. It has been shown that the singularity spectrum has a maximum whose position depends on the object's supporting fractal dimension. At the same time, a singularity spectrum half-width and near-field intensity's asymmetry coefficient occur to be acceptable for evaluation of the object construction ratio parameter, and magnitude of the asymmetry coefficient at saturation zone depends on the level of the object's supporting fractal.

Вступ

За останнє десятиріччя поширився фрактальний підхід до опису будови різноманітних об'єктів. Це не дивно, оскільки багато штучних і природних об'єктів мають фрактальні властивості, тобто характеризуються самоподібністю [1,2]. Оптична безконтактна діагностика фрактальних об'єктів базується на використанні взаємозв'язків між структурними параметрами об'єкта, і параметрами розмірності поля дифрагованого оптичного випромінювання. Перші спроби такої діагностики були проведені для найпростіших типів фракталів: смуг Кантора, кривих фон Коха і т.ін. [3-6]. Тоді як, об'єкти, що мають мультифрактальну структуру, зустрічаються на практиці набагато частіше. Ці об'єкти характеризуються не однією фрактальною розмірністю, а набором розмірностей, що визначають спектр сингулярностей об'єкта [7]. Природно, що оптична діагностика мультифракталів може і повинна базуватися на пошуку взаємозв'язків між спектрами сингулярності об'єкта і поля дифрагованого випромінювання.

Мета наших досліджень полягає у пошуку можливості оптичної дистанційної діагностики мультифрактальних об'єктів (тобто визначення таких параметрів, як розмірність і рівень підтри-

муючого фрактала та оцінки вагового параметра мультифрактала) шляхом виміру спектра сингулярності і коефіцієнта асиметрії дифрагованого поля.

Мультифрактальний формалізм

Ми досліджували мультифрактальні об'єкти побудовані на основі смуг Кантора (рис.1).

Множина Кантора складається зі смуг рівної маси. Проте у випадку мультифрактала маса розподіляється між смугами у залежності від міри μ . Процедура отримання мультифрактала з тріадної множини Кантора така [7]. Нехай задане значення вагового параметру мультифрактала у межах $0 < p < 1$. Одиначна маса мультифракталу розбивається так, щоб лівий інтервал смуг Кантора першого рівня мав масу p , а правий - $(1-p)$. Далі маса кожного інтервалу фрактала першого рівня розділяється між двома підінтервалами його



Рис.1. Смути Кантора перших чотирьох рівнів.

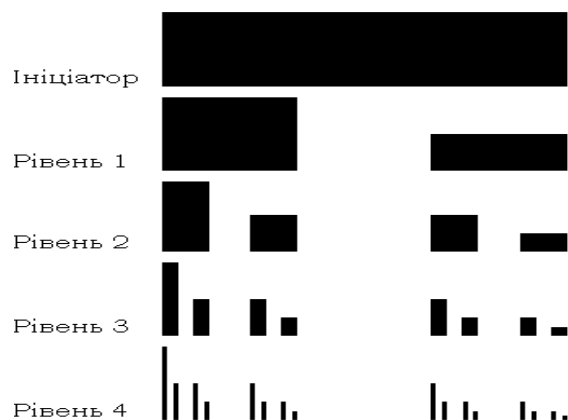


Рис.2. Мультифрактал перших чотирьох рівнів на основі тріадної множини Кантора для $p=1/3$.

другого рівня у відношенні $p : (1-p)$. Продовження цієї процедури побудови (так, щоб маса кожного інтервалу попереднього рівня була розділена у відношенні $p : (1-p)$ між двома підінтервалами наступного рівня) дає розподіл маси μ у множині Кантора (рис.2).

Об'єкти дослідження були виготовлені із застосуванням фотографічного процесу. З оптичної точки зору роль маси може відігравати оптичне пропускання смуг Кантора. Кожна смуга множини Кантора була експонована окремо, і витримка визначалася її масою. Густина почорніння кожної смуги обернено пропорційна її пропусканню. Ми отримали на фотографічних платівках мультифрактальні об'єкти від 1 до 5 рівня з параметром p від 0,5 до 0,3. Загальний розмір об'єкта складав 2,54 мм.

Далі досліджувалася дифракція оптичного випромінювання на виготовлених мультифракталах. Об'єкти освітлювались по нормалі плоскою когерентною хвилею ($\lambda=0,6328$ мкм). Далі проводилися виміри розподілу інтенсивності дифрагованого поля у паралельній до об'єкту площині для різних зон реєстрації. Вимірювання інтенсивності проводилося з допомогою фотоелектронного помножувача з діафрагмою розміром 3 мкм на вході. Сканування поля і введення значень інтенсивності у комп'ютер було автоматизовано. Розмір області сканування залежав від рівня і розміру підтримуючого фракталу, відстані між об'єктом і площиною реєстрації і вибирався виходячи з умови присутності всіх просторово-частотних складових поля. Фактично кутовий спектр дифрагованого поля визначається розміром найменшого елемента об'єкта a [8]. Тому, для визначення розміру області сканування ми додаємо до розміру фрактала R подвоєне значення $z\lambda/a$, яке визначається з умови для першого мінімуму дифракції: $\text{tg } \alpha_1^{\text{min}} = \lambda/a$.

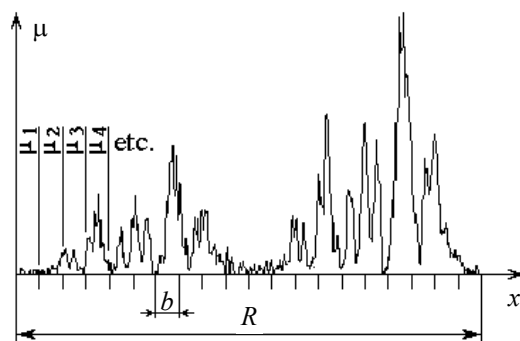


Рис.3. Розподіл міри μ для інтенсивності дифрагованого випромінювання.

Далі, з отриманих експериментально розподілів інтенсивності, розраховувалися спектри сингулярності. Процедура розрахунку така.

Нехай μ - міра, підтримувана обмеженою областю R^n , із повною масою $\mu(R^n)=1$ (у одномірному випадку $n=1$). У нашому випадку розподіл міри $\mu(x)$ визначається нормованим по площі розподілом інтенсивності.

Розбиваємо вісь абсцис розподілу міри (рис.3) на інтервали розміру b (де $a < b < R$, a - найменший розмір елементів об'єкта). Реально, значення b дорівнює напівширині поперечної кореляційної функції від розподілу інтенсивності.

Далі у кожному інтервалі x_i визначаємо міру μ_i , використовуючи інтеграл

$$\mu_i = \int_{x_i}^{x_i+b} \mu(x) dx. \quad (1)$$

Потім для кожного інтервалу x_i обчислюємо силу сингулярності $\alpha_i = -\frac{\ln \mu_i}{\ln(R/b)}$ (R - повний розмір розподілу), будемо гістограму dN по $d\alpha$, де dN - це число α -точок, значення яких лежать у відповідних інтервалах розміру $d\alpha$ (рис.4), і обчислюємо спектр сингулярності

$$f(\alpha) = \ln \left(\frac{dN}{d\alpha} \right) / \ln \left(\frac{R}{b} \right). \quad (2)$$

Експериментальні дослідження

Для мультифрактальної множини Кантора спектр сингулярності має вигляд параболи. Для випадкового розподілу він рівномірно розподілений від нуля до якогось максимального значення.

Спектри сингулярності, розраховані з експериментально виміряних розподілів інтенсивності, нагадують деформовані параболи. Тобто поле випромінювання, дифраговане на мультифракталі, також має мультифрактальні властивості.

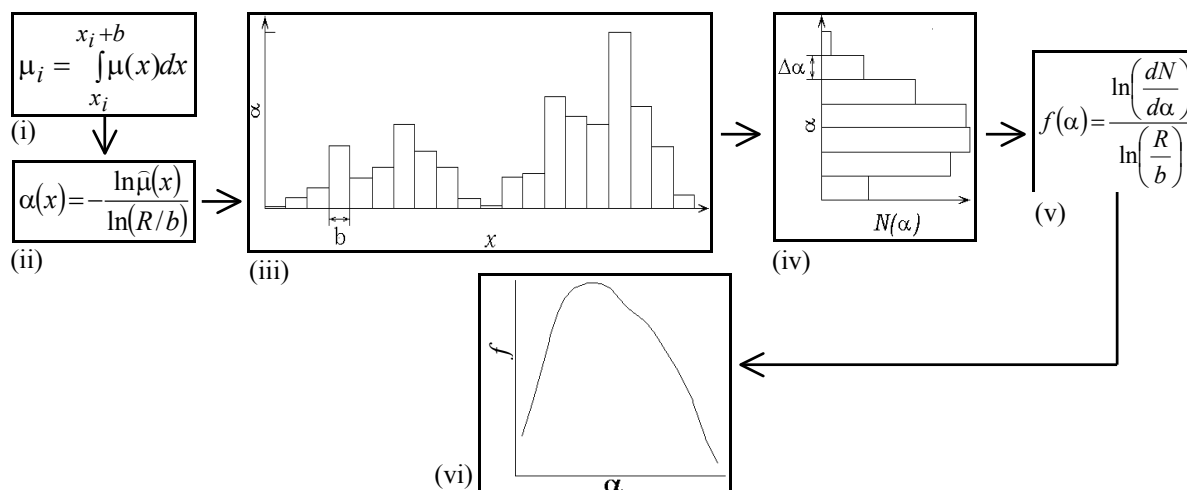


Рис.4. Послідовні кроки обчислення спектра сингулярності: (i) обчислення сумарних мір для кожного з b - інтервалів (дивися Рис.3), (ii) визначення сили сингулярності α для кожного інтервалу, (iii) побудова графіка залежності α відносно положення інтервалу на осі Ox , (iv) побудова гістограми останнього розподілу по кроку $\Delta\alpha$, (v) обчислення, (vi) побудова графіка спектра сингулярності $f(\alpha)$.

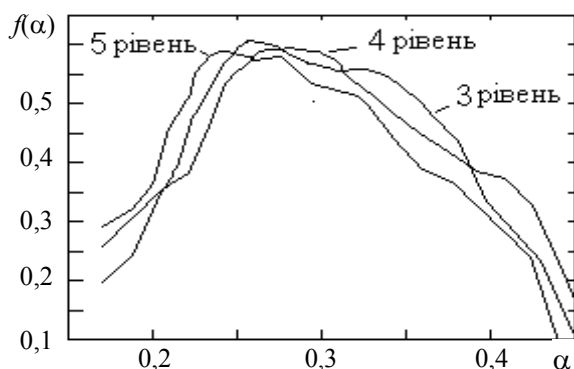


Рис.5. Спектр сингулярності поля, дифрагованого на мультифракталі від 3 до 5 рівнів.

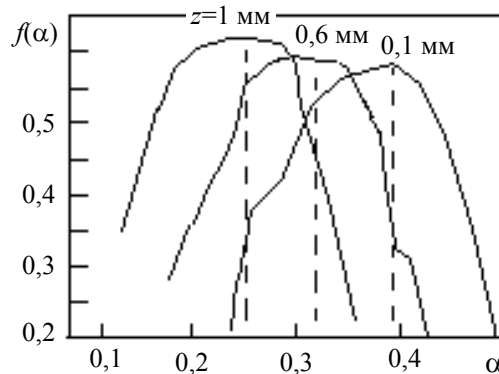


Рис.7. Залежність положення максимуму спектра сингулярності від відстані від об'єкта до площини реєстрації (від 0,1 до 1мм) поля ($p=0,3$).

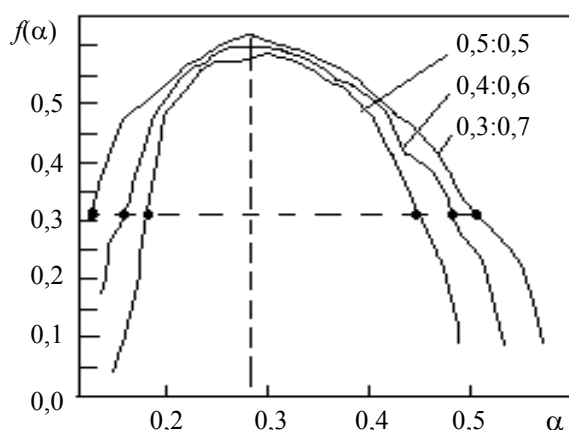


Рис.6. Вплив значення відношення $p/(1-p)$ (0,5/0,5, 0,4/0,6, 0,3/0,7) на півширину спектра сингулярності.

На рис.5 показано спектри сингулярності поля випромінювання, дифрагованого на мультифракталах 3-5 рівнів (ваговий параметром $p=0,4$, відстань від об'єкта до зони реєстрації $z=0,1$ м). На рис.5 видно, що спектри сингулярності для мультифракталів різних рівнів практично збігаються

і, тому не можуть бути використані для діагностики рівня мультифрактала.

При порівнянні спектрів сингулярності випромінювання, дифрагованого на об'єктах з різними параметрами p (всі інші умови однакові), можна побачити, що положення максимуму спектрів незмінне, а змінюється їх напівширина (рис.6, $z=0,01m$)

Чим більше відрізняється параметр p від значення 0,5 (яке характеризує ідеальний фрактал), тим більше зростає напівширина спектра сингулярності у порівнянні із напівшириною ідеального фрактала.

Збільшення відстані від об'єкта до площини реєстрації приводить до зміщення положення максимуму спектра сингулярності у бік менших значень α (рис.7, $p=0,3$).

Залежність положення максимумів спектрів сингулярності від відстані від об'єкта до площини

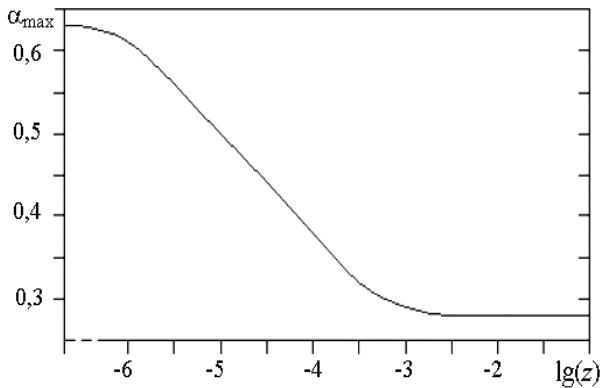


Рис.8. Залежність положення максимумів спектрів сингулярності для поля випромінювання, дифрагованого на мультифракталі 5-го рівня ($p=0,3$) від відстані до площини реєстрації.

реєстрації для мультифрактала 5-го рівня показана на рис.8 ($p=0,3$). Максимум спектра сингулярності граничного поля (тобто поля у площині об'єкта) збігається з фрактальною розмірністю підтримуючого фрактала. Зі збільшенням z , його значення поступово спадає до насичення.

Дослідження коефіцієнта асиметрії

Розподіл інтенсивності випромінювання дифрагованого на мультифракталі – асиметричне (рис.9) Ступінь асиметрії можна оцінити за допомогою коефіцієнта асиметрії, що визначається співвідношенням:

$$K_a = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}, \quad (3)$$

$M_2 = \frac{1}{s} \int (x - x_0)^2 f(x) dx$, $M_3 = \frac{1}{s} \int (x - x_0)^3 f(x) dx$ – моменти другого і третього порядку відповідного розподілу; $x_0 = \frac{1}{s} \int x \cdot f(x) dx$, – "центр маси" цього розподілу (рис.9); $s = \int f(x) dx$ - нормуючий коефіцієнт [9,10]. Точка x_0 поділяє розподіл на дві частини однакової маси.

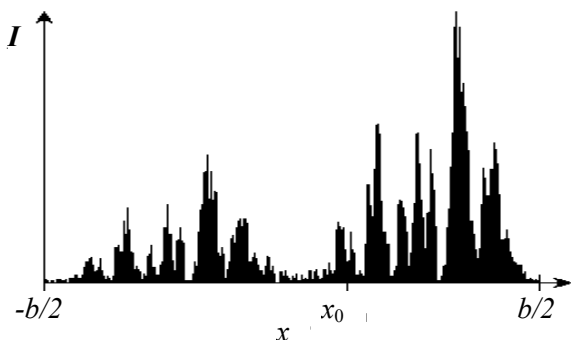


Рис.9. Положення "центру маси" x_0 розподілу інтенсивності.

Залежність коефіцієнта асиметрії полів, дифрагованих на мультифракталах 3-5 рівнів, від відстані від об'єкта до площини реєстрації, показана на рис.10. Всі залежності мають постійне значення коефіцієнта асиметрії K_a у ближній зоні дифракції (зона Френеля). Далі його значення зменшується до нуля. Розмір зони постійного значення коефіцієнта асиметрії залежить від рівня підтримуючого фрактала і збільшується у три рази при зменшенні рівня фрактала на одиницю. Це пояснюється тріадною структурою набору Кантора.

На рис.11 показана залежність коефіцієнта асиметрії дифрагованого поля від відстані z для вагового параметра мультифрактала p , який дорівнює 0,3; 0,4; 0,5.

Для $p=0,5$ маємо симетричне поле дифракції і нульове значення K_a . Зміна параметра p веде до зростання коефіцієнта асиметрії.

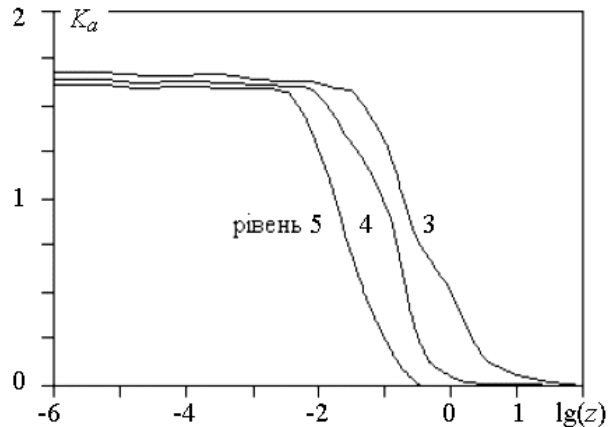


Рис.10. Залежність коефіцієнта асиметрії поля, що дифрагувало на мультифракталах від 3 до 5 рівнів ($p=0,3$), від відстані від об'єкта до площини реєстрації.

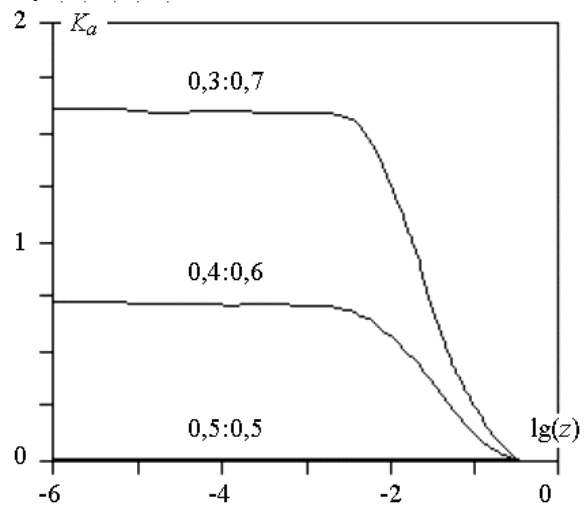


Рис.11. Коефіцієнт асиметрії поля, що дифрагувало на мультифракталах 5 рівня ($p=0,3; 0,4; 0,5$) у залежності від відстані від об'єкта до площини реєстрації.

Висновки

Отже, в результаті проведених досліджень встановлено, що положення максимуму спектра сингулярності поля дифрагованого випромінювання залежить від рівня підтримуючого фрактала. Напівширина спектра сингулярності і коефіцієнт асиметрії поля у ближній зоні залежать від вагового параметра мультифрактала p , а розмір зони постійного значення коефіцієнта асиметрії залежить від рівня підтримуючого фрактала.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mandelbrot B.* Fractal Geometry of Nature. - New York: Freeman, 1977.
2. *Feder J.* Fractals. - New York: Plenum Press, 1988.
3. *Allain C., Cloitre M.* Optical diffraction on fractal // Phys. Rev. - 1986. - **B33**, No.3569. - P.3566.
4. *Uozumi J., Kimura H., Asakura T.* Fraunhofer diffraction by Koch fractals, the dimensionality // J. Mod. Opt. - 1991. - **38**. - P.1335-1347.
5. *Kim Y., Grebel H., Jaggard D.L.* Diffraction by fractally scattered aperture // J.Opt.Soc.Am. - 1991. - **A8**. - P.20-26.
6. *Sacurada Y., Uozumi J., Asakura T.* Fresnel diffraction by one-dimensional regular fractals // Pure Appl. Opt. - 1992. - **1**. - P.29-40.
7. *Falconer K.J.* Fractal geometry. - Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1990.
8. *Angelsky O.V., Kovalchuk A.V., Maksimyak P.P.* On the Feasibility of Diagnostics of One-Dimensional Amplitude Fractals // Pure Appl. Opt. - 1997. - **6**, No.3. - P.435-442.
9. *Angelsky O.V., Kovalchuk A.V., Maksimyak P.P.* Diagnostic of asymmetrical fractals structure // Proc. SPIE. - 1998. - **3573**. - P.576-579.
10. *Angelsky O., Kovalchuk A., Maksimyak P.* Optical diagnostics of asymmetrical fractal structures // J.Opt. A: Pure Appl. Opt. - 1999. - **1**. - P.103-108.