

СТРУКТУРА СКАЛЯРНИХ СТАТИСТИЧНИХ ПОЛІВ

Розглянуто структуру випадкових скалярних полів. Для поля інтенсивності введено топологічні індекси та сітку топологічних елементів. Проаналізовано кореляцію між полем фази та полем інтенсивності. Наведено та обговорено дані комп'ютерного моделювання.

Structure of statistical optical fields is considered. The topological indexes of intensity field and intensity networks are introduced. The correlation between phase field and intensity field is analyzed. The results of computer simulation are discussed.

Структура спекл-поля, розміри спеклів, поведінка фази та інтенсивності нерозривно пов'язані з особливими точками поля, в яких амплітуда приймає нульового значення [1-10]. Такі точки одержали назву дислокацій хвильового фронту або фазових вихорів. Фаза поля у цих точках не визначена і змінюється стрибком на 2π при обході центра вихору [1,2]. При цьому напрямок зростання фази визначається знаком топологічного заряду [8].

Локалізацію вихорів можливо визначено як перетин ліній $\text{Re}, \text{Im}=0$, вздовж яких дійсна й уявна частина комплексної амплітуди поля дорівнює нулю [1,2,4-8]. Сусідні вихорі, які знаходяться на одній лінії $\text{Re}, \text{Im}=0$, підкоряються знаковому принципу [10]. Знаки таких вихорів різні.

Середня відстань між цими сингулярними точками дорівнює довжині (радіусу) кореляції поля [9]. Вихорі пов'язані між собою фазовими сідлами і є точками, в яких сходяться еквіфазні лінії та утворюють так звані фазові зірки [9].

Водночас довжина кореляції поля l_{koh} універсальний параметр, практично той самий для поля інтенсивності та фази. Іншими словами, саме l_{koh} визначає просторову структурність полів інтенсивності та фази. При цьому фазові вихорі одночасно є стаціонарними точками (абсолютними мінімумами) поля інтенсивності. Отже, повинен існувати зв'язок між поведінкою фази та інтенсивності навіть у межах одного або декількох спеклів.

Спробуємо уточнити наше розуміння структури статистичного когерентного скалярного поля.

Відзначимо, що якщо топологічні заряди типу

$$S = \frac{1}{2\pi} \oint d\Phi \quad (\Phi \text{ фаза поля; інтеграл береться за}$$

годинниковою стрілкою по контуру, що включає сингулярну точку) властиві тільки вихровим полям, то індекс Пуанкаре N може бути введений і для градієнтних полів. Введемо топологічні індекси поля інтенсивності, слідкуючи яким чином змінюється напрямок ліній градієнту в околі стаціонарних точок. Екстремумам, у тому числі і нулям амплітуди, як абсолютним мінімумам, відповідає у цьому випадку $N=+1$, сідлам інтенсивності $N=-1$. Відповідно, народження (зникнення) екстремуму, повинно супроводжуватися народженням (зникненням) сідла інтенсивності, що забезпечує зв'язок екстремуму з іншими польовими структурами та іншими екстремумами.

Хоча вихорі і максимуми інтенсивності не різняться за значенням індексу N , усе ж можна зробити деякі висновки про їхнє кількісне співвідношення. З простих логічних міркувань випливає: якщо у деякій області визначення будь-якої величини існує екстремум, то у цій же області повинен існувати хоча б один протилежний екстремум. Застосовуючи підхід, аналогічний описаному у роботі [8], дійдемо висновку, що мінімальні кількості максимумів і сідел інтенсивності підпорядковуються співвідношенням:

$$n_{m \min} = n_{vort}, \quad n_{s \min} = 2n_{vort}.$$

Можна показати, що ймовірність виникнення додаткових максимумів або мінімумів інтенсивності повинна бути не більше ніж ймовірність виникнення екстремумів фази. Тоді невеликою кількістю таких топологічних елементів можна знехтувати і вважати, що поле інтенсивності містить у собі тільки максимуми, абсолютні мінімуми (вихорі) і сідла.

Екстремуми одного типу (максимум, максимум і вихор, вихор) пов'язані між собою сідлами

інтенсивності. Найпростіша сітка інтенсивності, що пояснює, яким чином це відбувається, показана на рис.1. (стрілочками позначені лінії градієнту інтенсивності). Проаналізуємо зв'язок між сіткою вихорів (сіткою фазових спеклів) і сіткою інтенсивності. Для цього знайдемо середні значення градієнтів фази та інтенсивності відповідно у стаціонарних точках інтенсивності та фази.

Легко показати, що модулі градієнтів інтенсивності та фази підкоряються наступним співвідношенням:

$$|\nabla I|^2 = 4[J^2|\nabla J|^2 + R^2|\nabla R|^2 + 2JR(J_x R_x + J_y R_y)],$$

$$|\nabla \Phi|^2 = \frac{1}{I^2}[J^2|\nabla R|^2 + R^2|\nabla J|^2 - 2JR(J_x R_x + J_y R_y)],$$

де J, R – відповідно уявна та дійсна частини комплексної амплітуди, J_x, R_x, \dots – їх частинні похідні, $|\nabla R|^2 = R_x^2 + R_y^2$, $|\nabla J|^2 = J_x^2 + J_y^2$.

У стаціонарних точках інтенсивності та фази градієнти мають вигляд:

а) у стаціонарній точці інтенсивності:

$$\begin{cases} |\nabla I_s|^2 = 0, \\ |\nabla \Phi_s|^2 = \frac{1}{I} [J^2|\nabla R|^2 + R^2|\nabla J|^2]; \end{cases}$$

б) у стаціонарній точці фази:

$$\begin{cases} |\nabla I_{\Phi_s}|^2 = 4I [J^2|\nabla R|^2 + R^2|\nabla J|^2], \\ |\nabla \Phi_{\Phi_s}|^2 = 0. \end{cases}$$

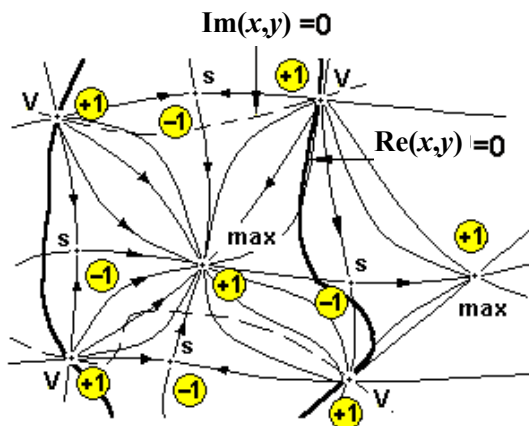


Рис.1. Сітки стаціонарних точок інтенсивності та фази. Суцільними товстими та пунктирними тонкими лініями позначено положення ліній $\text{Re}, \text{Im}=0$, відповідно. Лініями із стрілочками позначено лінії току градієнту. Індеси Пуанкаре максимумів інтенсивності, вихорів фази – абсолютних мінімумів та сідлових точок інтенсивності (s) надано в кружечках.

Середні значення J, R та їх похідних дорівнюють нулю. Тоді при умові, що J, R та їх похідні володіють однаковою статистикою досить легко показати, що середній градієнт фази у стаціонарній точці інтенсивності у $\sqrt{2}$ більший, ніж у будь-якій іншій точці поля (за виключенням зон вихорів).

Аналогічний факт існує і для стаціонарних точок інтенсивності: середній градієнт інтенсивності у стаціонарній точці фази у $\sqrt{2}$ більший, ніж у будь-якій іншій точці поля. Тобто можна стверджувати, що у статистичному розумінні швидким зростанням інтенсивності відповідають повільні зміни фази і навпаки швидким зростанням фази відповідають повільні зміни інтенсивності.

Зауважимо, що максимуми інтенсивності знаходяться у центрі спеклів поблизу сідлових точок фази [11,12]. Отже, можна стверджувати, що у зонах відносно великих градієнтів фази локалізуються сідлові точки інтенсивності.

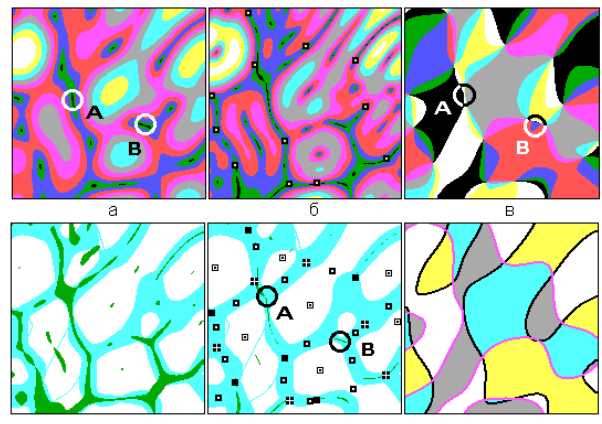


Рис.2. Розподіл інтенсивності (а). Поведінка модуля градієнту інтенсивності (б). Величина інтенсивності (модуля градієнту інтенсивності) тим більше, чим світліше колір. Фазова карта (в). Зміни фази відмічено відтінками сірого кольору. Чим темніше колір тим більше величина фази у регіоні. Положення зон з великим градієнтом фази та малим градієнтом інтенсивності (г). Стаціонарні точки інтенсивності та їх положення відносно зон поля з великим градієнтом фази (д). Відповідність між позначенням та конкретним типом стаціонарної точки наведено у нижній частині рисунка. Положення ліній $\text{Re}, \text{Im}=0$ (е). Кружечками на рис.2 відмічено зони, в яких невизначено поведінку інтенсивності та її градієнту.

Це передбачення було перевірено за допомогою комп'ютерного моделювання. Відповідні результати на рис.2, де представлено поведінку інтенсивності, фази та їх градієнтів випадкового поля. На рис.2а наведено розподіл інтенсивності. Рис.2б відповідає поведінці градієнту інтенсивності. Рис.2в – фазова карта. Зміни фази відмічено рівнем сірого. Чим темніший колір, тим більша величина фази у регіоні. На рис.2д темними із світлим квадратами позначено абсолютні мінімуми інтенсивності – вихорі. Відносно розташування зон з великим градієнтом фази та малим градієнтом інтенсивності представлено на рис.2г, на якому можна побачити, що як і передбачалося ці зони лежать в однакових за локалізацією регіонах поля. Виключенням є зони малого градієнту інтенсивності, які відповідають положенню максимумів інтенсивності. Цей факт ілюструється також наступними рис.2д, на якому відображено розташування стаціонарних точок інтенсивності відносно зон поля із великим градієнтом фази. Як бачимо, практично всі сідлові точки інтенсивності знаходяться в області поля де можна спостерігати швидкі зміни фази.

Природно, що у реальному експерименті (у тому числі при застосуванні методів комп'ютерного моделювання) роздільна просторова здатність при отриманні даних про поле обмежена. Це приводить до виникнення ситуації, коли у певних регіонах поля не вдається прослідкувати поведінку його характеристик. Зокрема, такі області відмічено на рис.2 кільцями. Аналізуючи насамперед фазову карту, можна зробити висновок, що такі зони виникають в областях поля де спостерігається значна густина еквіфазних ліній (рис.2в область А), тобто спостерігаються значні градієнти фази. Наприклад, така ситуація реалізується, коли два сусідніх вихора розташовані на малій відстані (зона В).

Відзначимо, що середньостатистичне положення ліній $Re, Im=0$ знаходиться також у зоні відносно високих градієнтів фази між фазовими сідлами. У цьому ж районі розташовані сідла інтенсивності. Отже, у середньостатистичному розумінні лінії $Re, Im=0$ прагнуть пройти через район локалізації сідла інтенсивності.

Отже, можна вважати, що у результаті проведених досліджень встановлено кореляцію між поведінкою фази та інтенсивності поля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nye J.F. Natural focusing and fine structure of light. (Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia.) - 1999.
2. Nye J.F., Berry M. Dislocations in wave trains // Proc. R. Soc. Lond. - 1974. - **A336**. - P.165-190.
3. Berry M.V. Singularities in waves and rays // Physics of defects. Les Houches Session XXXV, 28 July - 29 August 1980, Amsterdam: North-Holland. - 1981. - P.453-543.
4. Nye J.F. The Motion and structure of dislocations in wave fronts // Proc. R. Soc. Lond. - 1981. - **A378**. - P.219-239.
5. Berry M.V. Rays, wavefronts and phase: a picture book of cups // Abstr. Proc. Huygens Symp., Amsterdam: North-Holland. - 1991.
6. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. Дислокации поверхности волнового фронта и нули амплитуды // ЖЭТФ. - 1981. - **80**, вып.5. - С.1789-1797.
7. Baranova N.B., Mamayev A.V., Pilipetsky N.F., Shkunov V.V., Zeldovich B.Ya. Wavefront dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation // J. Opt. Soc. Am. - 1983. - **A73**. - P. 525-528.
8. Nye J.F., F.R.S., Hajnal J.V., Hannay J.H. Phase saddles and dislocations in two-dimensional waves such as the tides // Proc.R.Soc. Lond. - 1988. - **A417**. - P.7-20.
9. Freund I., Shvartsman N., Freilikher V. Optical dislocation networks in highly random media // Opt. Comm. - 1993. - **101**. - P.247-264.
10. Freund I., Shvartsman N. Wave-field singularities: The sign principle // Phys. Rev. - 1994. - **50**, No.6. - P.5164-5172.
11. Freund I. Saddles, singularities, and extrema in a random-phase fields // Phys.Rev. - 1995. - **E52**. - P.2348-2360.
12. Freund I. Critical-point level-crossing geometry in wave fields // J. Opt. Soc. Am. - 1997. - **A14**. - P.1911-1927.