

НЕЛІНІЙНА ГОЛОГРАМА ЮНГА ЯК ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЮВАЧ ВХІДНОГО СИГНАЛУ

Визначено кутову залежність дифракційної ефективності нелінійної голограми поля за перешкодою у різних порядках дифракції. Обговорено перспективне застосування нелінійної голограми Юнга, яка функціонує в режимі самообертання хвильового фронту, для формування спектральних вікон при реалізації вейвлет-перетворення з метою детектування краю.

Angular dependence of diffraction efficiency of a hologram from an obstacle in various diffraction orders is determined. Promising application of a nonlinear Young hologram operating in self-conjugation fashion for implementation of spectral windows is discussed in the context of wavelet transform for an edge detection.

Вступ

Нелінійною вважається голограма, комплексний амплітудний відгук якої містить вищі за лінійну компоненти розкладу в ряд по степенях експозиції [1,2]. У схемі статикоголографічного самообертання хвильового фронту [2,3] з метою формування в структурі голограми комбінаційних ґраток, які відповідають дзеркалу фазового спряження, використовуються дві контрапозитивні опорні хвилі. Якщо об'єктом є дифракційна апертура, то вибором співвідношення інтенсивностей записуючих пучків можна оптимізувати дифракційну ефективність парціальної голограми краю дифракційної перешкоди, яка у рамках моделі дифракції Юнга-Рубіновича асоціюється з голограмою крайової дифракційної хвилі (КДХ) [4,5]. На куті дифракції θ_r , для якого інтенсивності КДХ та позавісєвих опорних хвиль обираються сумірними, дифракційна ефективність парціальної голограми КДХ в області геометричної тіні максимізується. По мірі збільшення або зменшення кута дифракції відносно θ_r дифракційна ефективність голограми зменшується, як це показано на рис.1. Дифракційна ефективність ґраток, які асоціюються з l -ю компонентою амплітудного відгуку нелінійної голограми (НГ), пропорційна V^{2l} (V – контраст експонуючого інтерференційного розподілу). Так, для голограми КДХ (голограми Юнга (ГЮ) [5]) дифракційна ефективність лінійних крос-ґраток $\eta_L(\theta) \sim V^2(\theta)$, а дифракційна ефективність комбінаційних ґраток, що забезпечують самозображення об'єкта у формі його фазоспряженої репліки, $\eta_Q(\theta) \sim V^4(\theta)$.

ВІДН. ОД.

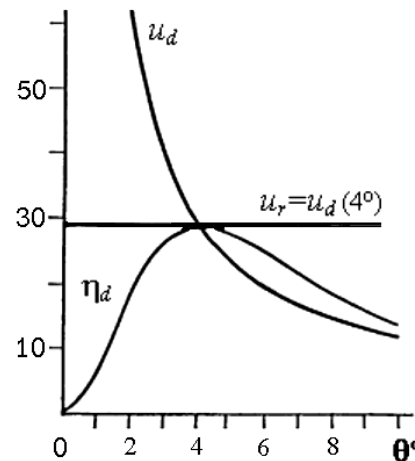


Рис.1. Залежність приведенної дифракційної ефективності позавісєвої ГЮ η_d від кута дифракції при $u_r = u_d(\theta_r = 4^\circ)$, $u_d \sim \text{ctg}(\theta/2)$.

При зчитуванні НГ у режимі узгодженої фільтрації (об'єктною хвилею $u_d(\theta)$ при відтворенні хвильових та геометричних умов запису на стадії зчитування) інтенсивність відновлюваного зображення обчислюється так:

$$I_{SI}(\theta) \sim V^4(\theta) u_d^2(\theta), \quad (1)$$

де $V(\theta) = 2u_d(\theta)u_r / (u_d^2(\theta) + u_r^2)$, $u_r = u_d(\theta_r)$ – амплітуда опорної хвилі, яка дорівнює амплітуді КДХ для кута дифракції θ_r . При відомій кутовій залежності амплітуди КДХ, $u_d \sim \text{ctg}(\theta/2)$. [6], та відношенні амплітуд КДХ та позавісєвої опорної хвилі, для якого побудовано графік рис.1, нормовані по максимуму залежності $\eta_L(\theta)$, $\eta_Q(\theta)$ та $I_{SI}(\theta)$ показано на рис.2.

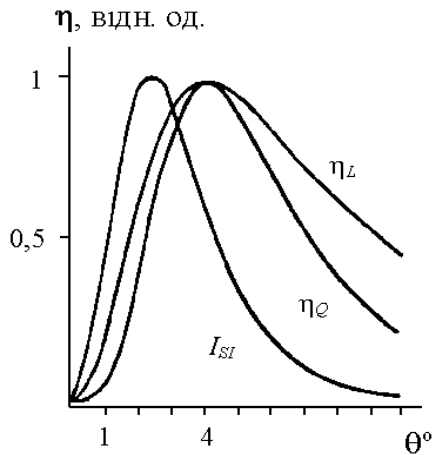


Рис.2. Дифракційні характеристики НГ, що функціонує у режимі узгодженої фільтрації. Напівширини наведених залежностей: $\Delta\theta_{0,5}=8^\circ, 5,1^\circ, 3,2^\circ$, відповідно.

Оптичне вейвлет-перетворення

Для обґрунтування наявності аналогії між методом самообертання КДХ за НГ та оптичним вейвлет-перетворенням вхідного сигналу нагадаємо означення та характерні ознаки вейвлет-перетворення [7].

Вейвлет-перетворення – це спосіб представлення сигналу шляхом розкладу його по набору функцій – "вейвлетів", які є масштабованими й зміщеними копіями деякої вихідної функції. Неперервне вейвлет-перетворення функції $f(x)$ вводитьсь означенням:

$$Wf[s, u] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_s(x-u)dx, \quad (2)$$

де s, u – параметри уширення і зміщення відповідно, а $\psi_s(x) = \sqrt{s} \psi(sx)$ – вейвлет. Ядро інтегрального перетворення (2) не постійне, як у випадку перетворень Фур'є або Габора, а змінне – отримується з так званого "материнського" вейвлету $\psi(x)$ (при $u=0, s=1$). Для усунення надлишковості представлення функції $f(x)$ замість неперервного використовують дискретне вейвлет-перетворення:

$$W_{ij}(x) = \sum_{ij} f(x)\sqrt{s_j}\psi[s_j(x-u_i)]. \quad (3)$$

Крім того, іноді параметр зсуву u змінюють неперервно, а масштабування "дочірніх" вейвлетів виконують дискретно, обираючи зручний ортогональний базис, наприклад: $s_j=2^j$ ($j= -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$). Досліджуваний сигнал однозначно описується у такому базисі як лінійна комбінація ортогональних вейвлетів.

Як добре відомо, інтеграл згортки (2) можна "обчислити" оптично з використанням стандарт-

ної схеми оптичного Фур'є-перетворення [8]. Знаходження вейвлет-коефіцієнту вхідного сигналу (як правило амплітудного пропускання транспаранта) зводиться до такої процедури. Фур'є-образ вхідного сигналу, розташованого у передній фокальній площині збираючої лінзи, формується у задній фокальній площині цієї лінзи й тим чи іншим способом перемножається з Фур'є-образом вейвлету. Друга збираюча лінза розташовується так, що її передня фокальна площина співпадає з задньою фокальною площиною першої (Фур'є-перетворюючої) лінзи. У задній фокальній площині цієї лінзи формується Фур'є-образ добутку Фур'є-образів вхідного сигналу та вейвлету й, таким чином, відновлюється інтеграл згортки (2) або його дискретний аналог (3). Квадратичний детектор, розташований у задній фокальній площині другої лінзи, реєструє квадрат модуля вейвлет-коефіцієнту сигналу.

Вейвлет – функція з нульовим середнім значенням $\langle \psi_s(x) \rangle = 0$; іноді вимагають рівності нулю також і вищих статистичних моментів вейвлету. Як наслідок, Фур'є-образ вейвлету $\psi_s(\mu) =$

$\frac{1}{\sqrt{s}} \psi(\mu/s)$, має нульове значення на нульовій просторовій частоті: $\psi_s(0) = 0$ при усіх можливих s . Такій умові відповідають біполярна функція-сходінка (хаарівський вейвлет), зокрема [7]:

$$\psi(x) = \text{rect}\left[2\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] - \text{rect}\left[2\left(x - \frac{3}{4}\right)\right], \quad (4)$$

Фур'є-образ якої $\Psi(\mu) = 2ie^{-i\pi\mu} \frac{1 - \cos\pi\mu}{\pi\mu}$, і сом-

бреро (Mexican-hat) – вейвлет:

$$\psi(x) = (1 - x^2/\sigma^2) \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad (5)$$

де Фур'є-образ $\Psi(\mu) = 4\pi^2\sigma^2\mu^2 \exp(-2\pi\sigma^2\mu^2)$. Хаарівські вейвлети зручні для аналізу одномірних сигналів, а радіально симетричні сомбреро-вейвлети використовуються для представлення ізотропних двомірних сигналів (зображень). На практиці [9] здебільшого використовується бінарна апроксимація $\psi(\mu)$ – набори щільних або кільцевих діафрагм, виконані на фотоплівці. Проте, через бінарну структуру спектральних вікон фільтруючі діафрагми спричиняють спотворення відновлюваних вейвлет-коефіцієнтів. Оптимальні спектральні вікна мали би бути аподизованими, що й передбачається теорією, але це складно реалізується на практиці.

Змінне ядро інтегрального перетворення (2) забезпечує однаково добру локалізацію такого

перетворення як у просторовій, так і у частотній областях. Дана властивість вейвлет-перетворення дає підстави розглядати його як "математичний мікроскоп" зі змінними полем зору (параметр u) і збільшенням (параметр s^{-1}) та розділенням, яке визначається обраним вейвлетом [9,10]. Так, відносно крупні, низькоінформативні деталі вхідного сигналу "проглядаються" через вузькі спектральні вікна на низьких просторових частотах з низьким (достатнім) розділенням, у той час як області швидкої зміни амплітуди вхідного сигналу (дрібні деталі) "проглядаються" з підвищеним розділенням – ширина спектральних вікон збільшується зі зростанням просторової частоти. При цьому втілюється фундаментальна риса вейвлет-представлення досліджуваного сигналу – постійність відношення $Q = \bar{\mu} / \Delta\mu$, де $\bar{\mu}$ – просторова частота, яка відповідає центру спектрального вікна, а $\Delta\mu$ – ширина цього вікна.

Нормовочний коефіцієнт $1/\sqrt{s}$ часто вводиться на стадії комп'ютерної обробки експериментальних даних або просто опускається, зокрема, у випадках, коли розв'язок задачі досягається відновленням деякого одного вейвлет-коефіцієнту. Звісно, нехтування нормовочним множником унеможливує зворотнє вейвлет-перетворення – синтез сигналу як лінійної комбінації його вейвлет-коефіцієнтів. Зауважимо у цьому зв'язку, що вже квадратичне детектування вейвлет-коефіцієнтів визначає втрату фазової інформації, без якої також неможливо здійснити синтез сигналу за його коефіцієнтами.

Набір вейвлетів $\psi_s(x)$ при усіх можливих s утворює повний ортогональний базис розкладу досліджуваного сигналу. Ортогональність базису у даному випадку означає, що кожний наступний вейвлет-коефіцієнт відображає лише інформацію, яка не була представлена у попередньому вейвлет-коефіцієнті. При використанні аподизованих спектральних вікон під ортогональністю розуміють рознесення їх по напівширині. Проте, на практиці (в оптичному експерименті) повний розклад ніколи не реалізується як з міркувань доцільності, так і з технічних причин. Кількість спектральних вікон в описаних до цього часу експериментах змінюється від двох до тридцяти, при цьому: а) максимальна ширина спектрального вікна визначається шириною спектра об'єкта (розмірами мінімальних елементів, які підлягають виявленню та аналізу); б) мінімальна ширина спектрального вікна визначається шириною центрального дифракційного максимуму (практично –

параметрами використаної Фур'є-перетворюючої лінзи).

Отже, при здійсненні оптичного вейвлет-перетворення засобами когерентної оптики центральною є проблема формування спектральних вікон потрібної структури у частотній площині когерентно-оптичного процесора; при голографічній реалізації – у площині реєстрації голограми.

Однією з задач оптичної обробки інформації, де послідовне використання вейвлет-перетворення виявилось плідним, є детектування та локалізація краю – границі структурних елементів вхідного сигналу [10-12]. При застосуванні "симетричних" вейвлетів-детекторів краю здійснюється згортка вхідного зображення з такими вейвлетами, й локалізація країв визначається лініями нульової інтенсивності, оточеними двома світлими смугами [11,12]. Інший клас вейвлетів-детекторів краю – "антисиметричні" або градієнтні [11] вейвлети, при використанні яких локалізація краю визначається за положенням максимальних значень інтенсивності одиначної світлої смуги у відфільтрованому сигналі. Обидва варіанти як одиначний так і подвоєний контур у зображенні дифракційної апертури було продемонстровано у голографічних експериментах, проаналізовано методами Фур'є-оптики [3,5,13,14] і пояснено фізично на основі моделі дифракції Юнга-Рубіновича.

Тут ми покажемо, що аналогія між реалізацією самозображення об'єкта у режимі узгодженої фільтрації за НГ та відновленням вейвлет-коефіцієнту вхідного сигналу, не лише зовнішня, а може бути обгрунтована й кількісно. У цьому обговоренні ми не торкатимемось (не розв'язаної до цього часу принципово) проблеми оптимальності вейвлету, який реалізується засобами нелінійної голографії.

Дифракційна ефективність нелінійної голограми Юнга

Результати, наведені на рис.2, призводять до наступних висновків: при даному u_r спектральне вікно є аподизованим (у відповідності до методології вейвлет-перетворення), з $\eta(0)=0$; при нелінійному голографічному записі має місце звуження залежності $\eta(\theta)$, при незмінному положенні максимуму; при зчитуванні НГ об'єктною хвилею (з неоднорідною за кутами дифракції амплітудою) відбувається подальше звуження спектрального вікна, яке супроводжується зміщенням максимуму в область менших кутів (нижчих просторових частот).

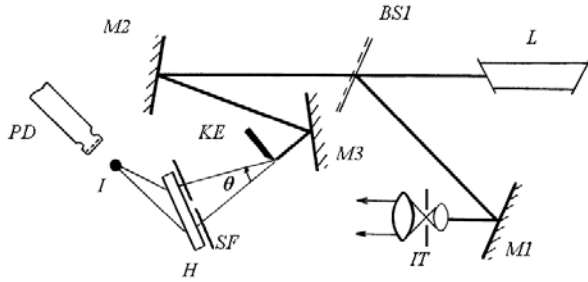


Рис.3. Схема запису та зчитування НГ за краєм напівплощини. *L* – лазер, *BS* – подільник, *M* – дзеркала, *KE* – край напівплощини, *IT* – обернений телескоп, *H* – голограма, *SF* – скануюча щілина, *I* – спряжене зображення, *PD* – фотодетектор.

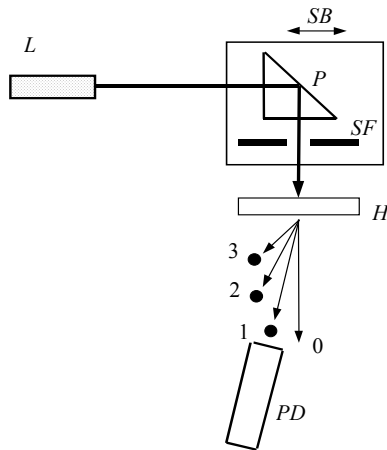


Рис.4. Схема вимірювання дифракційної ефективності НГ за краєм напівплощини у різних порядках дифракції. *L* – лазер, *SB* – скануючий блок, *P* – поворотна призма, *SF* – просторовий фільтр, *H* – голограма, *PD* – фотодетектор.

З метою експериментальної перевірки отриманих результатів, досліджувалась дифракційна ефективність НГ за краєм напівплощини у різних порядках дифракції.

НГ краю напівплощини записується у схемі, поданій на рис.3. Нерозширений лазерний пучок (лазер ЛГН-215 $\lambda=0,6328$ мкм, $P=50$ мВт) розділяється на опорну та об'єктну хвилі. Плоска хвиля (номінальний діаметр 1,8 мм) дифрагує на краю непрозорого металевго екрану *KE*. З використанням оберненої телескопічної системи *IT*, що складається з мікрооб'єктиву $20\times$, квазіточкової діафрагми $d=14$ мкм та проєкційного об'єктиву $F=300$ мм, формується плоска опорна хвиля з діаметром 45 мм. Дзеркала *M* використовуються для урівняння оптичних шляхів об'єктного та опорного полів від подільника *BS* до площини реєстрації голограми *H*. Кут дифракції, на якому інтенсивність опорної хвилі дорівнює інтенсивності КДХ – $\theta \approx 4,5^\circ$. Середній опорний кут приблизно $0,2$ рад. Голографічна платівка (ПФГ-03) реєструє суперпозицію КДХ, що поширюється

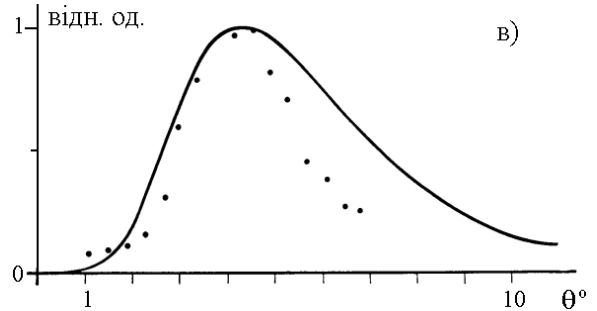
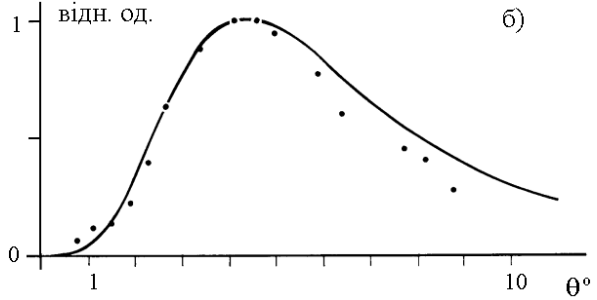
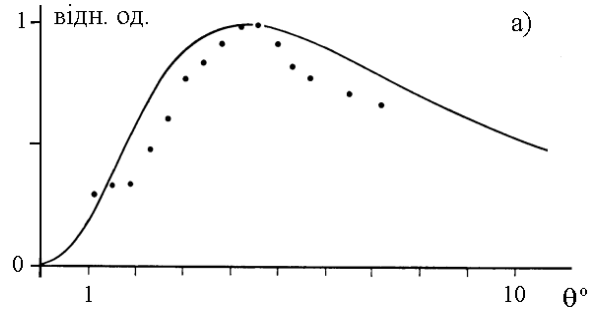


Рис.5. Дифракційна ефективність НГ за краєм напівплощини у вищих за нульовий – першому (а), другому (б), третьому (в) порядках дифракції.

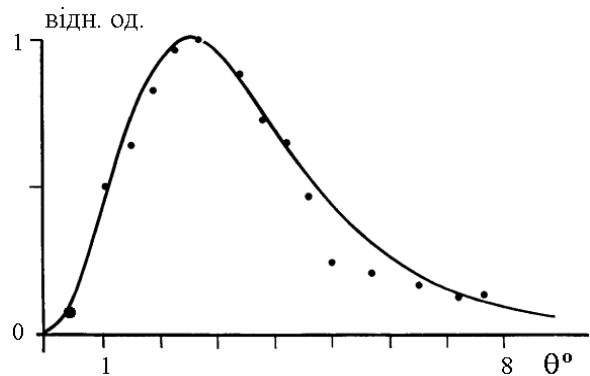


Рис.6. Кутова залежність інтенсивності ФС-відгуку НГ від краю напівплощини.

в область геометричної тіні, з плоскою опорною хвилею. Умови запису голограми: тривалий час експонування (від 1 до 3 хв), перепроявлення фотошару (обробка у проявнику ГП-2 до 5-10 хв). При зчитуванні НГ полем об'єкта за голограмою відновлюється дійсне спряжене зображення *I*. Для дослідження координатної залежності інтенсивності спряженого зображення, що відновлюється при зчитуванні НГ у режимі узгодженої

фільтрації, у площині голограми вводиться скануюча діафрагма, яка пересувається з кроком 3 мм. Інтенсивність зображення вимірюється за допомогою фотоелектронного помножувача *PD*.

Дифракційна ефективність НГ за краєм напівплощини у вищих за нульовий порядках дифракції (при зчитуванні голограми плоскою хвилею) визначалась у схемі рис.4. Рухомою платформою *SB*, на якій закріплені поворотна призма *P* та просторовий фільтр *SF* діаметром 1,8 мм, пересувалась з кроком 3 мм. Голограма сканувалась нерозширеним лазерним пучком, й вимірювалась інтенсивність зображення краю напівплощини у першому, другому та третьому порядках дифракції. Похибка вимірювань, оцінювана за відтворюваність результатів, не перевищувала 10%.

Результати вимірювань наведено на рис.5,6, де точками подано експериментальні дані, а суцільними лініями – теоретичні залежності. Запис НГ оптимізувався для другого порядку дифракції, і тому спостерігаються помітні відхилення експериментальних даних від теоретично обчислених залежностей для першого та третього порядків дифракції (рис.5,а,в), тоді як залежність $\eta_Q(\theta) \sim V^4(\theta)$ добре узгоджується з результатами експерименту.

Відповідність експериментально знайденої залежності обчислень $I_{SF}(\theta) \sim V^4(\theta) u_d^2(\theta)$ (рис.6) як за положенням максимуму, так і за напівшириною спектрального вікна, є цілком переконливою. На основі результатів вимірювань дифракційної ефективності у різних порядках нелінійної ГЮ і кутової залежності інтенсивності фазоспряженого відгуку такої голограми, відновлюваного у режимі самозображення об'єкта, можна конкретизувати висновки щодо наявності аналогії між самообертанням КДХ та вейвлет-перетворенням вхідного сигналу (дифракційної апертури).

Нелінійна юнгівська голограма – вейвлет-перетворювач

Залежність $\sqrt{\eta_Q(\mu)}$, яка визначає солітоноподібне спектральне вікно з нульовим пропусканням при $\mu=0$, має вигляд:

$$\Psi(\mu) \sim \sqrt{\eta_Q(\mu)} \sim \frac{\mu^2}{[\mu^2 + 4/c]^2}, \quad (6)$$

де *c* – параметр, який визначається вибором інтенсивності опорної хвилі. Формула (6) отримана із залежності $\eta_Q \sim V^4(\theta)$, при апроксимації амплітуди КДХ гіперболою (x^{-1} – головний доданок розкладу в ряд ctgx) і з урахуванням пропорційності кута дифракції просторовій частоті. Залежність (6) при $c=1$ подана на рис.7б кривою 1.

Фур'є-образ (6) має вигляд [15 (формула 7.10)]:

$$\psi(x) = \frac{\pi c}{16} (1 - 4|x|/c) \exp(-4|x|/c). \quad (7)$$

Формула (7) визначає віртуальний (синтезований непрямым чином) вейвлет, який відповідає квадратичній компоненті амплітудного відгуку нелінійної ГЮ. Легко переконатись, що середнє значення (7) дорівнює нулю. За формою, залежність (7) близька до сомбреро-вейвлету (5), показаному на рис.7а кривою 2. Такий сомбреро-вейвлет є Фур'є-образом функції $\psi(\mu) = 4\pi^2 \sigma^2 \mu^2 \times \exp(-2\pi\sigma^2 \mu^2)$ при $\sigma = (8\pi)^{-1}$, показаної кривою 2 на рис.7б. Так визначене σ забезпечує співпадання максимумів кривих 1 та 2 на рис.7б. При зчитуванні НГ у режимі узгодженої фільтрації добуток функції вікна з функцією кутового розподілу амплітуди зчитуючої хвилі (КДХ) такий – $\mu/(\mu^2 + 4/c)^2$. Ця залежність зображена на рис.7б кривою 3, а пунктирною кривою показано її квадрат модуля, який визначається формулою (1).

Обираючи інтенсивність опорної хвилі сумірною з інтенсивністю КДХ для різних кутів дифракції і записуючи послідовність голограм, можна сформувати набір солітоноподібних спектральних вікон зі зміщеними максимумами пропускання і, з огляду на відому кутову залежність амплітуди КДХ, ширинами, які збільшуються зі зростанням

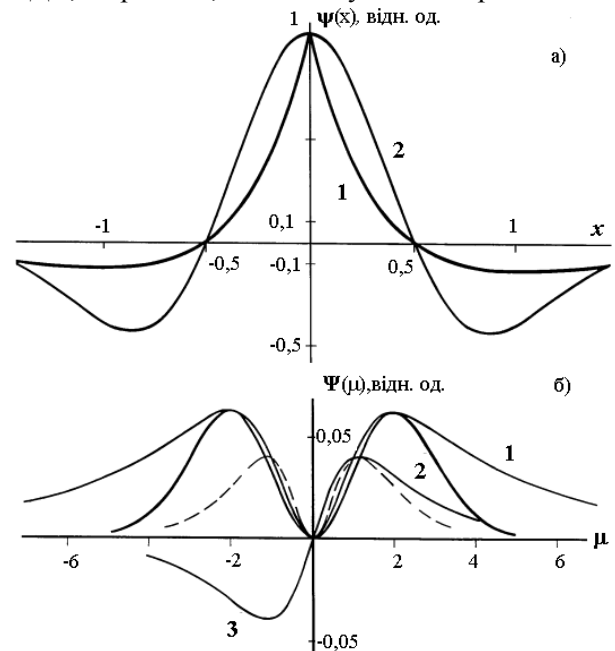


Рис.7. Вейвлет, асоційований з квадратичною компонентою амплітудного відгуку НГ (крива 1а) та "сомбреро"-вейвлет (2а). Спектральні вікна, асоційовані з вейвлетом НГ (1б) та "сомбреро"-вейвлетом (2б); добуток Фур'є-образів вейвлету НГ і вхідної функції (3б). Пунктирна крива – квадрат модуля залежності, показаної кривою 3б.

просторової частоти. Прагнення до ортогональності спектральних вікон (наприклад, за напівшириною функції $I_{SF}(\theta)$) визначає необхідність запису голограм у порівняно широкому кутовому діапазоні. З рис.2,5,6 видно, що використання саме НГ, зчитуваної у режимі узгодженої фільтрації, сприяє розв'язанню проблеми формування спектральних вікон завдяки звуженню кривої $\eta_Q(\theta)$ порівняно з $\eta_L(\theta)$ та зміщенню максимуму кривої $I_{SF}(\theta)$ у бік менших кутів дифракції.

На рис.8 показано нормовані по максимумам залежності $I_{SF}(\theta)$, отримані при $\theta_r=1^\circ, 5^\circ, 20^\circ$.

З рис.8 видно, що в інтервалі кутів, де застосовні методи Фур'є-оптики та є чинною МДЮР [8,14], вдається реалізувати принаймні три кроки вейвлет-перетворення. З аналізу наведених параметрів залежностей $I_{SF}(\theta)$ можна бачити, що відношення $Q=\bar{\mu}/\Delta\mu_{0,5} \sim \bar{\theta}/\Delta\theta_{0,5}$ є постійним і дорівнює $\approx 8,3$. Оскільки як напівширини, так і положення максимумів спектральних вікон визначаються вибором $I_r=I_d(\theta_r)$, то умова нормування (рівність площ під кривими $I_{SF}(\theta)$ при різних θ_r) виконується автоматично.

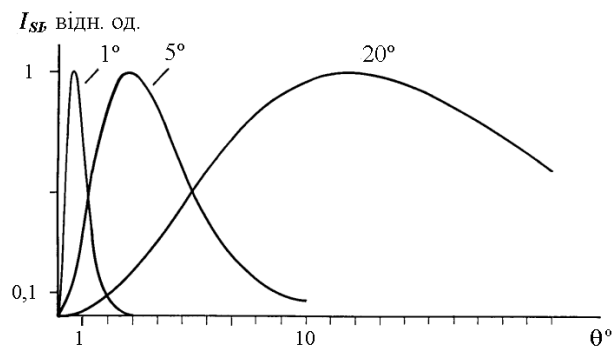


Рис.8. Ортогональні за напівшириною залежності інтенсивності самозображення за НГ від кута дифракції, $I_{SF}(\theta)$.

Висновки

При самообертанні хвильового фронту за нелінійної ГЮ від дифракційної апертури (недифузного вхідного сигналу) втілюються характерні ознаки вейвлет-перетворення: нульове середнє значення вейвлета $\langle \psi(x) \rangle = 0$, і, як наслідок, нульове пропускання спектрального вікна на нульовій просторовій частоті $\psi(\mu=0)=0$; "самоподібність" спектральних вікон – постійність відношення $Q=\bar{\mu}/\Delta\mu$; солітоноподібність (аподизованість функції пропускання) спектрального вікна; задовільнення умові нормування.

Усі перелічені ознаки оптичного вейвлет-перетворення, реалізованого методом нелінійно-

голографічного самообертання об'єктного хвильового фронту, здійснюються внаслідок природної кутової залежності амплітуди КДХ та відповідного вибору відношення інтенсивностей опорної й об'єктної хвиль. Одиничний голографічний експеримент в описаних у цій роботі умовах представляє собою відновлення окремого вейвлет-коефіцієнта вхідного сигналу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полянський П.В. Ассоциативные свойства голограм второго порядка // Оптич. журн. - 1997. - **64**, №4. - С.28-37.
2. Полянський П.В. Ассоциативная память с использованием статического фазообращающего зеркала на основе голограммы второго порядка // Оптика и спектроскопия. - 1998. - **84**, №2. - С.346-351.
3. Bogatiryova G.V. Edge-enhanced phase conjugation based on a quadric hologram // Proc. SPIE. - 1998. - **3573**. - P.170-173.
4. Rubinowicz A. Thomas Young and theory of diffraction // Nature. - 1957. - **180**. - P.160-162.
5. Полянський П.В., Полянська Г.В. Голограмма Юнга - пятый тип голограмм // Оптич. журн. - 1997. - **64**, №4. - С.52-63.
6. Miyamoto K., Wolf E. Generalization of the Maggi-Rubinowicz theory of the boundary diffraction wave // J.Opt.Soc. Amer. - 1962. - **52**, №6. - P.615-637.
7. Special section on Wavelet Transforms // Optical Engineering. - 1992. - **31**, №9. - P.1823-1916.
8. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. - М.: Мир, 1970.
9. Muzy J.F., Pouligny B., Argoul F., Arneodo A. Optical-diffraction measurement of fractal dimensions and $f(\alpha)$ spectrum // Phys. Rev. A. - 1992. - **45**, №12. - P.8961-8964.
10. Freysz E., Pouligny B., Argoul F., Arneodo A. Optical wavelet transform of fractal aggregates // Phys. Rev. Lett. - 1990. - **64**, №7. - P.745-748.
11. Sun M., Scialabassi R.J., Li C.-C., Zhang Y., Szu H.H. Symmetrical wavelet transform for edge localization // Optical Engineering. - 1994. - **33**, №7. - P.2272-2281.
12. Ye A., Casasent D. Morphological and wavelet transforms for object detection and image processing // Appl. Opt. - 1994. - **33**, №35. - P.8226-8239.
13. Polyanskii P.V., Polyanskaya G.V. On a consequence of the Young-Rubinowicz model of diffraction phenomena in holography // Opt. Appl. - 1995. - **25**, №3. - P.171-183.
14. Bogatiryova G.V., Polyanskii P.V. Structure of an edge diffraction wave over a wide angular range // Proc. SPIE. - 1999. - **3904**. - P.240-255.
15. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Наука, 1974.