УДК 532.72, 541.15

© 2000 р. С.С. Лавренко

Інститут соціального управління, економіки і права, Черкаси

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ МІГРАЦІЇ РАДІОАКТИВНИХ РЕЧОВИН У ГРУНТІ ВОДОЗБІРНОГО БАСЕЙНУ

Запропонована аналітична модель процесів міграції радіоактивних речовин у грунті водозбірного басейну з урахуванням обміну радіоактивною домішкою між поверхневим прошарком грунту і поверхневою водою, дифузією радіоактивної домішки в грунт і її віднесенням при сході весняного паводка. На основі аналітичної моделі запропонована гранична умова для процесу дифузії радіоактивної домішки в грунті водозбірного басейну; що містить параметри, які можуть бути визначені по змінах концентрації радіоактивної домішки у воді річки в період двох послідовних паводків. Показано, що визначальну роль у міграції радіоактивних речовин визначає процес дифузії радіоактивної домішки всередину грунту. При цьому, інтегральним носієм інформації є вода річки в період паводка.

The article offers the analytical model of radioactive impurity migration process in river-by-lands considering the dissoluble impurity interaction with soil and surface water, radioactive impurity diffusion through soil and its removal by spring-time-flood recession. The analytical model is used to offer the boundary condition for the process of radioactive impurity diffusion through the river-by-lands top-soil. The parameters can be set through the analysis of changes in radioactive impurity concentration in watershed in course of two successive spring-time floods. The key-role of radioactive impurity diffusion through soil in the radioactive impurity long-term evolution is shown. The integral information source is spring-time-flood watershed.

Проведення заходів з моніторингу районів, які підпали під вплив радіації, пов'язано з небезпекою для здоров'я дослідників і необхідністю достатньо великих матеріальних вкладень. За цих обставин особло актуально – математичне моделювання природних процесів, яке б адекватно відображало стан районів, що підпали під вплив радіації, і дозволяло б прогнозувати еволюцію забруднення на достатньо довгі строки для вироблення відповідної програми реабілітації екологічно нестабільних районів. Особливо значні успіхи досягнуті у моніторингу атмосферного забруднення [1-4]. Менше вивчений – процес проникнення радіонуклідів углиб грунту, а саме, забруднення грунту водозбірного басейну річки радіоактивними речовинами [5-7].

Основні процеси, які визначають міграцію концентрації радіоактивної домішки у воді річки в періоди паводків, такі:

– інтегральний процес вимивання радіоактивної домішки з поверхневого прошарку грунту пасток, які захоплюють воду і розведення води у пастках;
– процес збіднення (або збагачення) поверхневого прошарку грунту за рахунок дифузії радіоактивної домішки в грунт;
– зв'язування радіоактивної домішки води за рахунок росту трави та її звільнення за рахунок перегнивання торішньої трави.

У запропонованій нижче моделі, яка заснована на розв'язку рівняння балансу води і радіоактивної домішки, ці процеси розглядаються як інтегральні, наприклад, обмін домішкою між водою і грунтом описується у релаксаційному наближенні, а часи релаксації розглядаються як феноменологічні параметри, характерні для даної, конкретної території.

При описанні міграції розчинних радіоактивних з'єднань, які випали в момент забруднення в області водозбірного басейну річки, будемо враховувати, що поверхня водозбору має деякий рельєф і являє собою чергування підвищень і поглиблень (пасток), які захоплюють воду. Принесені з водою розчинні з'єднання засвоюються поверхневим прошарком грунту пастки: дифундують у грунт, зв'язуються травою при її рості. З іншого боку, при переповнюванні пастки в період весняних паводків, частина радіоактивної домішки переходить з грунту у воду і з поверхневим стоком потрапляє в річку. Забруднена вода віддає частину домішки поверхневому прошарку грунту заплави, а залишок зноситься зі стоком річки.

Для складання рівняння балансу, розіб'ємо поверхню водозбору, віднесену до одиниці довжини русла річки $f_{\text{В}}$, на частини: - поверхня водозбору, яка зайнята пастками, із питомою площею f_{Π} і поверхня заплави з питомою площею $f_{З}$, обумовлені таким чином:

$$f_{\text{В}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F_{\text{В}}(z)}{\Delta z}, \quad f_{\Pi} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F_{\Pi}(z)}{\Delta z},$$

$$f_{З} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F_{З}(z)}{\Delta z},$$

де $F_{\text{В}}$, F_{Π}, $F_{З}$ - площа поверхні водозбору, пасток і заплави відповідно. Якщо об'єм води в річці в період паводка й об'єм води, захоплений пастками позначити як $V_{\text{Р}}$, V_{Π}, то відповідні питомі величини (на одиницю довжини русла) визначаються як:

$$\nu_{\text{Р}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{V_{\text{Р}}}{\Delta z}, \quad \nu_{\Pi} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{V_{\Pi}}{\Delta z},$$

Поверхневу щільність води в період наводка позначимо як q_0 [кг/м^{2}с], а кількість домішки як N. У грунті пасток і заплави будемо виділяти два прошарки: поверхневий прошарок грунту і власне грунт. У поверхневому прошарку грунту необхідно враховувати процеси, які впливають на міграцію домішки:

– омивання поверхні водою й обмін із нею домішкою за механізмои адсорбція-десорбція;
– зв'язування домішки при рості трави;
– звільнення пов'язаної домішки при розкладанні трави минулого сезону;
– дифузний відтік домішки в грунт.

Отже, будемо розглядати такі концентрації домішки: $C_{\text{В}}^{\Pi}$ – концентрація домішки у воді пасток, $C_{\text{В}}^{\text{Р}}$ – концентрація домішки у воді річки, $C_{\Pi}^{З}$ – домішка в поверхневому прошарку грунту заплави, $C_{\Gamma}^{З}$ – домішка в грунті заплави, C_{Π}^{Π} – концентрація в поверхневому прошарку грунту пасток і C_{Γ}^{Π} – концентрація в грунті пасток.

Протягом року будемо розрізняти такі періоди:

1. Період паводка. У цей період враховується тільки обмін домішкою між поверхневим прошарком грунту і поверхневою водою. Дифузією домішки у грунті можна знехтувати, вважаючи, що тривалість періоду паводка мала і дифузійні процеси не встигають зробитити значний внесок в обмін домішкою. Варто врахувати також те, що на початку паводка встигає розмерзтися тільки верхня частина грунту. Тому можна вважати, що спочатку здійснюється переповнювання пасток і розлив річки, і лише потім відбувається її забруднення з поверхневого прошарку грунту пасток.

2. Період сходу паводка. Будемо вважати, що схід паводка відбувається "миттєво", але при цьому вся домішка, захоплена пастками з водою, адсорбується грунтом пасток. У заплаві подібного не відбувається - домішка сходить зі стоком річки.

3. Літньо-осінній період. У грунті враховуються процеси, пов'язані з ростом нової і розкладанням старої трави, а також дифузійний відтік домішки в грунт. У грунті обмежуємося розглядом тільки процесу дифузії.

4. Зимовий період. Вважаємо, що зі зниженням температури всі процеси завмирають.

Для зручності періодизації аналізованих розмірів будемо використовувати таку систему позначень: верхній індекс змінної часу t вказує рік, перший нижній індекс – період року, а другий нижній – початок або кінець періоду. Наприклад, $C_{\Pi}^{\Pi}(t_3^2)$ - концентрація домішки в поверхневому прошарку грунту пасток на другий рік у літньо-осінній період. $C_{\Gamma}^{З}(t_{20}^3, x)$, $C_{\Gamma}^{З}(t_{21}^3, x)$ - початковий і кінцевий розподіл концентрації у грунті заплави на початку і в кінці періоду сходу паводка на третій рік після випадання домішки.

Система рівнянь, що описують еволюцію концентрації домішки

1. Період паводка.

Поверхневий прошарок грунту пасток:

$$\frac{dC_{\Pi}^{\Pi}}{dt} = \frac{1}{\tau_{\text{В}}} C_{\text{В}}^{\Pi} - \frac{1}{\tau_{\Gamma}} C_{\Pi}^{\Pi},$$

де $\tau_{\text{В}}$, τ_{Γ} - час релаксації прямого й оберненого процесів обміну домішкою між водою і поверхневим прошарком грунту. Вони не збігаються, тому що не збігаються рівноважні концентрації домішки. Для простоти тут виключений відтік домішки в грунт, тобто розглянутий випадок домішок, сильно пов'язаних грунтом. Аналітично це виражається умовою τ_{Γ}, $\tau_{\text{В}} \ll \tau_g = l^2/D$.

Вода в пастках:

$$\frac{dC_{\text{В}}^{\Pi}}{dt} = -q_0 \frac{f_{\text{В}}}{\nu_{\Pi}} C_{\text{В}}^{\Pi} - \frac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}} C_{\text{В}}^{\Pi} \frac{1}{\tau_{\text{В}}} + \frac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}} C_{\Pi}^{\Pi} \frac{1}{\tau_{\Gamma}}.$$

Перший доданок правої частини описує віднесення домішки з пасток із поверхневим стоком води в річку. Вважаючи, що режим у воді пасток і річки стаціонарний, величину q_0 визначаємо як об'ємний потік води на одиницю поверхні водозбору, $f_{\text{В}}$ – питома поверхня водозбору, $v_{\text{П}}$ – питомий об'єм пасток, $f_{\text{П}}$ – питома площа поверхні пасток, l – глибина поверхневого прошарку грунту. Другий і третій доданки рівняння описують обмін між поверхневим прошарком грунту і водою, яка обмиває поверхневий прошарок грунту.

Вода у річці:

$$\frac{dC_{\text{В}}^{\text{Р}}}{dt}=q_0\frac{f_{\text{В}}}{\nu_{\text{Р}}}C_{\text{В}}^{\text{П}}-q_0\frac{f_{\text{В}}}{\nu_{\text{Р}}}C_{\text{В}}^{\text{Р}}, \qquad (1)$$

де $v_{\text{Р}}$ - питомий об'єм води в річці (на одиницю русла) у період "стаціонарного" паводка Обміном між водою річки і поверхневим прошарком грунту заплави нехтуємо, тому що його внесок у зміну концентрації домішки у воді річки малий.

Поверхневий прошарок грунту заплави:

$$\frac{dC_{\text{В}}^{\text{З}}}{dt}=\frac{1}{\tau_{\text{В}}}C_{\text{В}}^{\text{Р}}-\frac{1}{\tau_{\Gamma}}C_{\text{П}}^{\text{З}}.$$

Тут обміном домішкою між водою і поверхневим прошарком грунту нехтувати не можна, тому що єдине джерело домішки з грунту заплави в період паводка – вода річки.

Початкові умови такі:

$$\begin{aligned}
&C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{10}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{31}^{i-1}),\\
&C_{\text{В}}^{\text{П}}(t_{10}^{i})=0,\\
&C_{\text{В}}^{\text{Р}}(t_{10}^{i})=0,\\
&C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{10}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{31}^{i-1}).
\end{aligned} \qquad (2)$$

2. Схід паводка.

Вважаємо, що схід паводка відбувається практично миттєво і єдиним його результатом є збагачення поверхневого прошарку грунту пасток за рахунок домішки, захопленої з водою пасток так, що

$$C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{21}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{11}^{i})+\frac{\nu_{\text{П}}}{lf_{\text{П}}}C_{\text{В}}^{\text{П}}(t_{11}^{i}),$$

$$C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{21}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{11}^{i}).$$

3. Літньо-осінній період.

Поверхневий прошарок грунту і грунт пасток:

$$\frac{dC_{\text{П}}^{\text{П}}}{dt}=-\lambda C_{\text{П}}^{\text{П}}+\alpha C'_{\text{П}0}\exp(-\alpha t)+D\frac{1}{l^2}\left.\frac{\partial C_{\Gamma}^{\text{П}}}{\partial x}\right|_0,$$

$$\frac{dC_{\Gamma}^{\text{П}}}{dt}=D\frac{\partial^2 C_{\Gamma}^{\text{П}}}{\partial x^2}.$$

Граничні умови:

$$C_{\Gamma}^{\text{П}}(0,t)-\frac{l}{2}\left.\frac{\partial C_{\Gamma}^{\text{П}}}{\partial x}\right|_0=C_{\text{П}}^{\text{П}}(t),$$

$$C_{\Gamma}^{\text{П}}(x,t)\to 0, \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Вісь X спрямована від поверхні у глибину грунту. Початкові умови такі:

$$C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{30}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{21}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{11}^{i})+\frac{\nu_{\text{П}}}{lf_{\text{П}}}C_{\text{В}}^{\text{П}}(t_{11}^{i}),$$

$$C_{\Gamma}^{\text{П}}(t_{30}^{i})=C_{\Gamma}^{\text{П}}(t_{31}^{i-1}).$$

Перший доданок правої частини рівняння враховує зв'язування домішки при рості трави у поточному сезоні, другий описує звільнення домішки, пов'язаної травою при її рості у наступному сезоні [8], третій описує дифузійний потік у грунт.

Поверхневий прошарок грунту і грунт заплави:

$$\frac{dC_{\text{П}}^{\text{З}}}{dt}=-\lambda C_{\text{П}}^{\text{З}}+\alpha C'_{\text{З}0}\exp(-\alpha t)+D\frac{1}{l}\left.\frac{\partial C_{\Gamma}^{\text{З}}}{\partial x}\right|_0,$$

$$\frac{dC_{\Gamma}^{\text{З}}}{dt}=D\frac{\partial^2 C_{\Gamma}^{\text{З}}}{\partial x^2}.$$

Граничні умови:

$$C_{\Gamma}^{\text{З}}(0,t)-\frac{l}{2}\left.\frac{\partial C_{\Gamma}^{\text{З}}}{\partial x}\right|_0=C_{\text{П}}^{\text{З}}(t),$$

$$C_{\Gamma}^{\text{З}}(x,t)\to 0, \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Початкові умови:

$$\begin{aligned}
&C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{30}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{21}^{i})=C_{\text{П}}^{\text{З}}(t_{11}^{i}),\\
&C_{\Gamma}^{\text{З}}(t_{30}^{i})=C_{\Gamma}^{\text{З}}(t_{31}^{i-1}).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Початкові концентрації домішки, які пов'язані травою, будуть дорівнювати:

$$C'_{\text{П}0}(t_{30}^{i})=\lambda\int_0^{(t_{31}^{i-1}-t_{30}^{i-1})}C_{\text{П}}^{\text{П}}\left(t_3^{i-1}\right)dt,$$

$$C'_{\text{З}0}(t_{30}^{i})=\lambda\int_0^{(t_{31}^{i-1}-t_{30}^{i-1})}C_{\text{П}}^{\text{З}}\left(t_3^{i-1}\right)dt.$$

У рік випадання домішки приймаємо такі початкові умови:

$$C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{30}^{0})=C_0 - C'_{\text{П}0}(t_{30}^{0})=0,$$

де C_0 - початкова концентрація домішки в поверхневому прошарку грушу пасток, яка розраховується як повна кількість домішки, що випала на площі водозбору, віднесена до обсягу поверхневого прошарку грунту пасток.

Розв'язання системи рівнянь

Використовуючи пряме й обернене перетворення Лапласа для кожного з тимчасових періодів, побудовано такий розв'язок системи рівнянь:

а) Період паводка. Пастки.

Використовуючи перетворення Лапласа в операторній формі виду:

$$L\left[C_{\Pi}^{\Pi}(t)\right]=S_{\Pi}^{\Pi},\ \ L\left[C_{B}^{\Pi}(t)\right]=S_{B}^{\Pi}.$$

Для похідних за часом маємо:

$$L\left[\frac{dC}{dt}\right]=-C(0)+pL\left[C(t)\right].$$

Діючи оператором на рівняння системи, одержуємо:

$$-C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i})+pS_{\Pi}^{\Pi}=\frac{1}{\tau_{B}}S_{B}^{\Pi}-\frac{1}{\tau_{\Gamma}}S_{\Pi}^{\Pi},$$

$$pS_{B}^{\Pi}=-\frac{q_0 f_B}{\nu_{\Pi}}C_{B}^{\Pi}-\frac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}\tau_{B}}S_{B}^{\Pi}+\frac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}\tau_{B}}C_{\Pi}^{\Pi}\frac{1}{\tau_{\Gamma}}.$$

Введемо позначення: $\tau_{\Pi}=\dfrac{\nu_{\Pi}}{q_0 f_B}$, $\chi=\dfrac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}}$.

Знаходимо розв'язок алгебраїчних рівнянь:

$$S_{B}^{\Pi}=\frac{\chi\tau_{\Gamma}^{-1}}{p^2+(\tau_{\Gamma}^{-1}+\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1})p+\tau_{\Gamma}^{-1}\tau_{\Pi}^{-1}}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i}),$$

$$S_{\Pi}^{\Pi}=\frac{p+\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1}}{p^2+(\tau_{\Gamma}^{-1}+\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1})p+\tau_{\Gamma}^{-1}\tau_{\Pi}^{-1}}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i}).$$

Прирівнявши знаменник до нуля, одержуємо:

$$p^2+(\tau_{\Gamma}^{-1}+\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1})p+\tau_{\Gamma}^{-1}\tau_{\Pi}^{-1}=0.$$

Знаходимо корені рівняння:

$$p_{1,2}=\mp\frac{1}{2}(\tau_{\Gamma}^{-1}+\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1})\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\tau_{\Gamma}^{-1}+\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1})^2-\tau_{\Gamma}^{-1}\tau_{\Pi}^{-1}}.$$

Дискримінант завжди більше від нуля, отже, корені дійсні. Крім того, вони негативні при будь-яких значеннях параметрів. Тоді:

$$S_{\Pi}^{B}=\frac{\chi\tau_{\Gamma}^{-1}}{(p-p_1)(p-p_2)}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i}),$$

$$S_{\Pi}^{\Pi}=\frac{p}{(p-p_1)(p-p_2)}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i})+$$

$$+\frac{\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1}}{(p-p_1)(p-p_2)}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i}).$$

Використовуючи таблицю оберненого перетворення Лапласа, знаходимо:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right]=\frac{1}{(p_2-p_1)}\times$$

$$\times\left(\exp(p_2 t)-\exp(p_1 t)\right),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}\right]=\frac{1}{(p_2-p_1)}\times$$

$$\times\left(\exp(p_1 t)-p_2\exp(p_2 t)\right).$$

Тоді розв'язок такий:

$$C_{B}^{\Pi}(t_1^{i})=\chi\tau_{\Gamma}^{-1}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i})\frac{1}{(p_2-p_1)}\times$$

$$\times\left(\exp(p_2 t)-\exp(p_1 t)\right),$$

$$C_{\Pi}^{\Pi}(t_1^{i})=(\chi\tau_{B}^{-1}+\tau_{\Pi}^{-1})C_{\Pi}^{\Pi}(t_{10}^{i})\frac{1}{(p_2-p_1)}\times$$

$$\times\left(\exp(p_2 t)-\exp(p_1 t)\right)-C_{\Pi}^{\Pi}\frac{1}{(p_2-p_1)}\times$$

$$\times\left(p_1\exp(p_1 t)-p_2\exp(p_2 t)\right).$$

Відкриваючи дужки і повертаючись до старих позначень, маємо:

$$C_{B}^{\Pi}(t_1^{i})=\frac{1}{\tau_{\Gamma}}\frac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}}\frac{1}{p_2-p_1}\times$$

$$\times\left[\exp(p_2 t)-\exp(p_1 t)\right]C_{\Pi}^{\Pi}(t_{30}^{i-1}),$$

$$C_{\Pi}^{\Pi}(t_1^{i})=\frac{\dfrac{q_0 f_B}{\nu_{\Pi}}+\dfrac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}\tau_{B}}+p_2}{p_2-p_1}\times$$

$$\times\left[\exp(p_1 t)-\exp(p_2 t)\right]C_{\Pi}^{\Pi}(t_{31}^{i-1}).$$

Відзначимо, що t_1^{i} – час, який вимірюється від початку паводка в i-му році, а t_{31}^{i-1} означає осінньо-літній період попереднього року.

б) Період паводка в заплаві.

Розв'язуючи рівняння (1) з початковою умовою (2) методом перетворення Лапласа, одержуємо розв'язок виду:

$$C_{B}^{\Pi}(t_1^{i})=\frac{1}{\tau_{\Gamma}}\frac{lf_{\Pi}}{\nu_{\Pi}}\frac{q_0 f_B}{\nu_p}C_{\Pi}^{\Pi}(t_{31}^{i-1})\times$$

$$\times\left[\frac{\exp\left(\dfrac{q_0 f_B}{\nu_p}t\right)}{\left(\dfrac{q_0 f_B}{\nu_p}+p_1\right)\left(\dfrac{q_0 f_B}{\nu_p}+p_2\right)}+\right.$$

$$
\left.+\frac{\exp(p_1 t)}{\left(\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}+p_1\right)(p_1-p_2)}+\frac{\exp(p_2 t)}{\left(\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}+p_1\right)(p_2-p_1)}\right],
$$

$$
C_{\text{В}}^{\text{П}}(t_1^i)=\frac{1}{\tau_{\Gamma}\tau_{\text{В}}}\frac{lf_{\text{П}}}{\nu_{\text{П}}}\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{31}^{i-1})\times
$$

$$
\times\left[\frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau_{\Gamma}}\right)}{\left(\frac{t}{\tau_{\Gamma}}-\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}\right)\left(\frac{t}{\tau_{\Gamma}}-p_1\right)\left(\frac{t}{\tau_{\Gamma}}+p_2\right)}+\right.
$$

$$
\frac{\exp(p_1 t)}{\left(p_1+\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}\right)(p_1-p_2)\left(p_1+\frac{t}{\tau_{\Gamma}}\right)}-
$$

$$
-\frac{\exp\left(-\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}t\right)}{\left(\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}+p_1\right)\left(\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}+p_2\right)\left(\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}-\frac{t}{\tau_{\Gamma}}\right)}+
$$

$$
\left.+\frac{\exp(p_2 t)}{\left(p_2+\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{р}}}\right)(p_2-p_1)\left(p_2+\frac{t}{\tau_{\Gamma}}\right)}\right].
$$

в) Схід наводка.

У період сходу паводка розв'язок рівняння такий:

$$
C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{21}^i)=C_{\text{П}}^{\text{П}}(t_{31}^{i-1})\frac{1}{p_2-p_1}[p_1\exp(p_1 t)-
$$

$$
-p_2\exp(p_2 t)+\left(\frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{П}}}+\frac{lf_{\text{П}}}{\nu_{\text{П}}}\frac{1}{\tau_{\text{В}}}-\frac{1}{\tau_{\Gamma}}\right)\times
$$

$$
\times(\exp(p_1 t)-\exp(p_2 t))],
$$

$$
C_{\text{П}}^{3}(t_{21}^i)=C_{\text{П}}^{3}(t_{11}^i).
$$

г) Літньо-осінній період.

У цей період система рівнянь, яка описує міграцію концентрації радіоактивної домішки у поверхневому прошарку грунту і грунті пасток із точністю до позначень збігається із системою, яка описує концентрацію в поверхневому прошарку грунту і грунті заплави. Розбіжність виникає лише при підстановці конкретних початкових умов. Оскільки формальний аналітичний розв'язок в обох випадках має однаковий вигляд, то наводячи його, опустимо індекси, що вказують на приналежність до пасток або заплави.

Отже, маємо систему рівнянь:

$$
\frac{dC_{\text{П}}}{dt}=-\lambda C_{\text{П}}+\alpha C'_{\text{П}0}\exp(-\alpha t)+\frac{D}{l^2}\frac{\partial C_{\Gamma}}{\partial x}\Bigg|_0,
$$

$$
\frac{\partial C_{\Gamma}}{\partial t}=D\frac{\partial^2 C_{\Gamma}}{\partial x^2},
$$

де λ - коефіцієнт захоплення домішки при рості трави α - коефіцієнт звільнення при розпаді трави. Граничні умови такі:

$$
x=0:\quad C_{\Gamma}(0,t)-\frac{1}{2}\frac{\partial C_{\Gamma}}{\partial x}\Bigg|_0=C_{\text{П}}(t),
$$

$$
x\to\infty:\ C_{\Gamma}(x,t)\to 0.
$$

Початкові умови, виду (3) вважаємо відомими. У загальному випадку вони знаходяться інтегруванням по сезонах із використанням отриманих формальних розв'язків, починаючи від "нульового" сезону, у якому в певний момент часу вся домішка опиняється в поверхневому прошарку грунту пасток

Що стосується граничних умов, то друга з них очевидна. Для обгрунтування першої, роздивимося поведінку функції C_{Γ} поблизу поверхні.

Введемо концентрацію поверхневого прошарку грунту як середнє:

$$
C_{\text{П}}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}C(x)dx.
$$

Вважаючи l невеликим (щодо глибини грунту), розкладемо функцію в ряд Тейлора щодо нуля:

$$
C(x,t)=C(0,t)+\frac{\partial C}{\partial x}\Bigg|_0 x,
$$

$$
C_{\text{П}}(t)\approx\frac{1}{l}\int_{-l}^{0}\left[C(0,t)+\frac{\partial C}{\partial x}\Bigg|_0 x\right]dx\approx
$$

$$
\approx C(0,t)\frac{1}{l}\frac{\partial C}{\partial x}\Bigg|_0\int_{-l}^{0}dx=C(0)\frac{1}{l}(0-(-1))+
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial x}\Bigg|_0\frac{1}{l}(0^2-(-l)^2=C(0,t)-\frac{l}{2}\frac{\partial C}{\partial x}\Bigg|_0,
$$

але $C(0,t)=C_{\Gamma}(0,t)$, тобто $\frac{\partial C}{\partial x}\Big|_0=\frac{\partial C_{\Gamma}(0,t)}{\partial x}\Big|_0$,

що і було потрібно.

Продовжуючи перетворення Лапласа для системи рівнянь поверхневий прошарок грунту-грунт, одержимо таку систему для зображень концентрацій:

$$(p+\lambda+\frac{2D}{l^2})S_\Pi(p)=$$

$$=C_\Pi(t_{21}^i)+\frac{\alpha}{p+\alpha}C_0'(t_{21}^i)+\frac{2D}{l^2}S_\Gamma(0,p),$$

$$\frac{d^2S_\Gamma}{dx^2}-\frac{p}{D}S_\Gamma(x,p)=\frac{C_\Gamma(t_{31}^i,x)}{D}.$$

Граничні умови при цьому:

$$x=0:\ \ S_\Gamma(0,p)-\frac{1}{2}\frac{dS_\Gamma}{dx}\bigg|_0=S_\Pi(p),$$

$$x\to\infty:\ \ S_\Gamma(x,p)\to 0.$$

Загальний розв'язок останнього рівняння, як відомо, такий:

$$S_\Gamma(x,p)=A\exp)-\sqrt{p/D}\,x)+B\exp(\sqrt{p/D}\,x)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{Dp}}\int_0^\infty\exp(-\sqrt{p/D}\left|x-x'\right|C_\Gamma(t_{31}^{i-1},x')dx'.$$

З іншого граничної умови випливає, що B=0. Тоді з урахуванням першої умови одержуємо:

$$S_\Gamma(x,p)=S_\Pi(p)\frac{1}{1+0{,}5l\sqrt{p/D}}\exp(-\sqrt{p/D}\,x)-\frac{1}{2\sqrt{Dp}}\times$$

$$\times\frac{1-0{,}5l\sqrt{p/D}}{1+0{,}5l\sqrt{p/D}}\int_0^\infty-\exp(-\sqrt{p/D}\left|x-x'\right|)C_\Gamma(t_{31}^{i-1},x')dx'+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{Dp}}\int_0^\infty\exp(-\sqrt{p/D}\left|x-x'\right|)C_\Gamma(t_{31}^{i-1},x')dx'.$$

Виразивши звідси $S_\Gamma(0,p)$ і підставивши у рівняння для зображення $S_\Pi(p)$ одержимо:

$$\left[(\frac{1}{2}\frac{l}{\sqrt{D}}p+\frac{1}{2}\frac{l}{\sqrt{D}}\lambda+\frac{\sqrt{D}}{l}\sqrt{p}+(p+\lambda)\right]S_\Pi(p)=$$

$$=(1+\frac{1}{2}l\sqrt{p/D})C_\Pi(t_{21}^i)+\alpha\frac{1+0{,}5l\sqrt{p/D}}{p+\alpha}C_0'(t_{21}^i)+$$

$$+\frac{1}{l}\int_0^\infty\exp(-\sqrt{p/D}\,x)C_\Gamma(t_{31}^{i-1},x)dx.$$

Звідси легко одержати вираз для S_Π, причому звільняючись від ірраціональності у знаменнику, одержуємо там поліном третього ступеня по p. Крім того, вираз можна спростити, маючи на увазі, що в цікавих для нас випадках значення коефіцієнта дифузії D знаходиться у межах $10^4\div10^2$ м^2/с, а товщина поверхневого про-шарку грунту l можливо грубо оцінити величиною 0,1-0,2 м. Тоді характерний дифузійний час $\tau_g=l^2/D$ дорівнює (1-100) с. Оскільки тривалість літньо-осіннього періоду складає декілька місяців, то правомірно використовувати асимптотику більших часів: $t\gg\tau_g$, або в області зображень $p\ll D/l^2$. Це дозволяє відкинути старші ступені p в чисельниках і знаменниках виразів, там, де це припустимо. Для зручності запису введемо позначення:

$$\tau_a=\frac{1}{\alpha},\quad \tau_\lambda=\frac{D/l^2+(l^2\lambda^2)/4D-\lambda}{\lambda^2}.$$

Використовуючи теорему про згортку, одержуємо залежність концентрації домішки у поверхневому прошарку грунту від часу для літньо-осіннього періоду в такому вигляді:

$$C_\Pi(t_3^i)=\frac{1}{\lambda\tau_\lambda}C_\Pi(t_{21}^i)\left[\frac{1}{\lambda\sqrt{\pi\tau_g t}}-(1-\frac{1}{\lambda\sqrt{\tau_g\tau_\lambda}}\times\right.$$

$$\left.\times\mathrm{erf}(\sqrt{t/\tau_\lambda})\exp(t/\tau_\lambda))\right]+\frac{1}{\lambda(\tau_\lambda+\tau_a)}C_{\Pi0}'(t_{21}^i)\times$$

$$\times\left[(1+\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda\sqrt{\tau_g\tau_a}}\mathrm{erf}(\sqrt{t/\tau_\lambda}))\exp(-t/\tau_\lambda)-(1-\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda\sqrt{\tau_g\tau_a}}\times\right.$$

$$\left.\times\mathrm{erfc}(\sqrt{t/\tau_\lambda}))\exp(\sqrt{t/\tau_\lambda})\right]+\frac{1+0{,}5\lambda\tau_g}{\lambda\tau_\lambda\sqrt{\tau_g}l}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\exp(-\frac{x^2}{4Dt})\times$$

$$\times C_\Gamma(t_{31}^{i-1})dx+\frac{1+0{,}5\lambda\tau_g-\lambda\sqrt{\tau_g\tau_\lambda}}{2\lambda^2\tau_\lambda\sqrt{\tau_g\tau_\lambda}l}\exp(t/\tau_\lambda)\times$$

$$\times\int_0^\infty\exp(-\frac{x}{\sqrt{D\tau_\lambda}})\mathrm{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}-\sqrt{t/\tau_\lambda})C_\Gamma(t_{31}^{i-1},x).$$

Нагадаємо, що t_3^i позначає час, який відраховується від початку осінньо-літнього періоду i-го року. Для полегшення запису в правій частині виразу індекси опущені і та ж змінна позначена індексом t.

Неважко одержати тимчасову залежність розподілу концентрації домішки в грунті заплави, але вирази виявляються занадто громіздким. Тому доцільніше використання аналітичних виразів для тимчасової залежності концентрації домішки у воді річки в періоди паводків і числовий розрахунок концентрації домішки у поверхневому прошарку грунту і грунті водозбірного басейну. Такий підхід – природний тому, що впливом поверхневого прошарку грунту і грунту запливи на міграцію концентрації домішки у воді можна знехтувати, тоді як перенос домішки водою у поверхневий прошарок грунту має вирішальне значення для зміни концентрації у поверхневому прошарку грунту. Відзначимо, що саме вода річки в періоди паводків – найзручнішим об'єктом моніторингу, адже вона несе в собі інтегральну інформацію про процеси обміну в області водозбору.

Розглянемо більш детально тимчасову залежність концентрації домішки у воді річки та у воді, захопленій пастками у період паводка Вважаючи, що початкова концентрація домішки дорівнює нулю, для води в пастках одержуємо:

$$C_{\text{В}}^{\text{П}}(t) = C_{\text{П}0}^{\text{П}} \frac{\tau_2}{\tau_\Gamma} \frac{lf_{\text{П}}}{\nu_{\text{П}}} \exp(-t/\tau_1)\,\text{sh}(t/\tau_2),$$

де $C_{\text{П}0}^{\text{П}}$ – початкова концентрація домішки у поверхневому прошарку грунту пасток, а

$$\tau_1 = \frac{2\tau_{\text{В}}\tau_\Gamma\nu_{\text{П}}}{\tau_{\text{В}}\nu_{\text{П}} + f_{\text{П}} l \tau_\Gamma + q_0 f_{\text{В}} \tau_{\text{В}} \tau_\Gamma},$$

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 - \dfrac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{П}}} \dfrac{\tau_1 \tau_1}{\tau_\Gamma}}}.$$

Даний розв'язок такий, як на рис.1.

Час досягнення концентрацією домішки максимального значення визначається виразом:

$$t_m = \frac{1}{2}\tau_2 \ln\left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\right).$$

Залежність концентрації домішки у воді річки, на відміну від пасток, більш складна, але якісний вигляд залежності такий же, що і для пасток (рис.1).

$$C_{\text{В}}^{\text{Р}} = C_{\text{П}0}^{\text{П}} \frac{\tau_2}{\tau_\Gamma} \frac{lf_{\text{П}}}{\nu_{\text{П}}} \frac{\tau_2 (q_0 f_B)/\nu_{\text{Р}}}{1 - (\tau_2/\tau_1 - \tau_2 (q_0 f_B)/\nu_{\text{Р}})^2} \times$$
$$\times \left\{ \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \left[\text{ch}\left(\frac{t}{\tau_2}\right) + \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - \tau_2 (q_0 f_B)/\nu_{\text{Р}}\right) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, \text{sh}\left(\frac{t}{\tau_2}\right) \right] - \exp(-(q_0 f_B)/\nu_{\text{Р}} t) \right\}.$$

Час досягнення максимуму концентрації визначається рівнянням:

$$\text{ch}\left(\frac{t_m^{\text{Р}}}{\tau_2}\right) - 0{,}5 \frac{\tau_2}{\tau_\Gamma} \left[1 + \frac{lf_{\text{П}}}{\nu_{\text{П}}} \frac{\tau_\Gamma}{\tau_{\text{В}}} + \frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{П}}} \tau_\Gamma - \right.$$
$$\left. -2 \frac{\nu_{\text{Р}}}{\nu_{\text{П}}} \right] \text{sh}\left(\frac{t_m}{\tau_2}\right) = \exp\left\{ \frac{\tau_2}{2\tau_\Gamma} \left(1 + \frac{lf_{\text{П}}}{\nu_{\text{П}}} \frac{\tau_\Gamma}{\tau_{\text{В}}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{П}}} \tau_\Gamma - 2 \frac{q_0 f_{\text{В}}}{\nu_{\text{Р}}} \tau_\Gamma \right) \frac{t_m^{\text{Р}}}{\tau_2} \right\}.$$

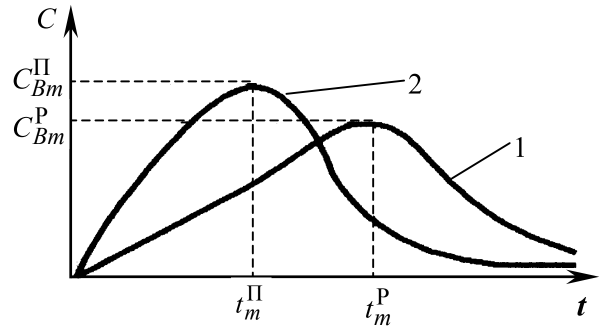

Рис.1. Залежність концентрації радіоактивної домішки у воді річки (1) і пасток (2) від часу.

Тимчасова залежнвсть концентрації домішки у воді в періоди паводка добре узгоджуються з даними, отриманими при побудові числових моделей, що описують дослідний розподіл радіоактивної домішки в грунті водозбірного басейну. Це дозволяє розглядати отримані результати як основу для побудови феноменологічної моделі, що описує еволюцію забруднення водозбірного басейну річки. Як вже зазначалось, частина параметрів цієї моделі може бути визначена за даними опису району водозбірного басейну конкретної річки, а інші можуть бути розраховані за кривими зміни концентрації домішки у воді річки в періоди одного, двох паводків.

Подальша еволюція забруднення може бути розрахована без залучення додаткових даних і дорогого моніторингу територій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чернобыль: радиоактивное загрязнение природных сред / Под ред. Ю.А Израэля. - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1990.
2. *Ветров В.А.* Мониторинг параметров миграции чернобыльских радионуклидов в естественных экосистемах // Тез. докл. 1 Всесоюзного радиобиологического съезда. - Москва. - 1989. - Том 3. - С.421-426.
3. Мониторинг загрязняющих веществ в окружающей среде: Сб. науч. ст. - М.: Энергоатомиздат, 1987.
4. *Белов П.Н.* Математическое моделирование антропогенного влияния на фоновое загрязнение атмосферы // Проблемы фонового мониторинга. - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. - С.115-120.
5. *Израэль Ю.А., Ветров В.А., Алексеенко В.А.* Радиационное загрязнение природных сред в зоне Чернобыльской АЭС. - М.: Атомиздат, 1988. - С.21-25.
6. *Павлоцкая Ф.И.* Миграция радиоактивных продуктов глобальных выпадений в почвах. - М.: Атомиздат, 1974.
7. *Прохоров В.М.* Миграция радиоактивных загрязнений в почвах. - М, 1981.
8. *Лавренко С.С.* Вплив захвату радіоактивної домішки травою на тимчасову залежність її концентрації у воді річки // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 66: Фізика.Електроніка - Чернівці:ЧДУ, 1999. - С.100-105.