

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФРАКЦІЇ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА СЕРВЕТКАХ СЕРПИНСЬКОГО

Подано результати теоретичних і експериментальних досліджень особливостей у полі випромінювання, дифрагованого на серветках Серпинського. Встановлено, що елементи будови серветок Серпинського повторюються у дифрагованому полі. Для серветок Серпинського 4-го рівня у дифрагованому полі спостерігаються зашумлені зображення фракталів від 1-го до 3-го рівнів. Результати експерименту добре узгоджуються з результатами комп'ютерного моделювання.

The results of a theoretical and experimental investigation concerning to some peculiarities of reproduction of the Sierpinski's carpets structure at the diffracted optical field are represent. The elements of Sierpinski's carpet are reproduced in the diffracted field. For the input fractal of the 4th level, image fractals of all levels from 1 to 3 are observed at the diffracted field, and the image is noised. The experimental results are shown to be in a good agreement with the ones obtained through computer simulation.

Фрактальна геометрія природних і штучних об'єктів, розвинута відомим математиком Бенуа Мандельбротом [1], привернула увагу вчених багатьох галузей природничих наук.

З погляду оптиків цікавою є задача дистанційної діагностики фрактальних об'єктів за полем оптичного випромінювання, яке дифрагувало на них. Такі дослідження провела група японських вчених під керівництвом професора Асакури [2]. Вони досліджували самоподібність, фрактальну розмірність, спектр потужності поля дифрагованого випромінювання [3,4].

Відомо, що поле оптичного випромінювання, дифрагированого на періодичних структурах, на певних відстанях відтворює їх будову. У праці [5] показано, що у полі, дифрагованому на смугах Кантора, є області, аналогічні зонам саморепродукції. Очевидно, щось подібне слід очікувати і для двовимірних фракталів.

У даній роботі приведені дослідження особливостей у полі оптичного випромінювання дифрагованого на серветках Серпинського.

Процедура побудови серветок Серпинського згідно праці [6] така. Спочатку розглядаємо квадрат одиничної площі і ділимо його на b^2 квадратиків. Потім вилучаємо a квадратиків і залишається $b^2 - a$ ділянок. Така процедура є одиничним кроком побудови серветки Серпинського і називається генератором цього фрактала. Повторюючи крок генерації N разів, будемо мати сер-

ветку Серпинського N -го рівня. Виходячи з такої процедури, фрактальна розмірність d_f серветок Серпинського визначиться як

$$d_f = \frac{\ln(b^2 - a)}{\ln b}. \quad (1)$$

Коли $b=3$, $a=1$, то маємо $d_f=1,893$.

Амплітуду поля, що отримується у результаті дифракції плоскої хвилі на килимку Серпинського, можна розрахувати, використовуючи дифракційний подвійний інтеграл Релея-Зомерфельда [7]:

$$U(\xi, \zeta) = \frac{z}{i\lambda} \iint \frac{F(x, y)}{R^3(x, y, \xi, \zeta)} \times \exp(-ikR(x, y, \xi, \zeta)) dx dy, \quad (2)$$

де $F(x)$ – апертурна функція, що відповідає амплітудному пропусканню килимка Серпинського,

$R(x, y, \xi, \zeta) = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}$ – відстань від точки на фракталі до точки на площині спостереження, z – відстань між площиною, в якій розміщений фрактал, і площиною спостереження, x, y, ξ, ζ – прямокутні координати на площині об'єкта і на площині спостереження відповідно, $k=2\pi/\lambda$ – хвильове число. На протипагу дифракційному інтегралу Кірхгофа, співвідношення (2) можна застосовувати для довільних відстаней від об'єкта до площини спостереження.

У нашому дослідженні ми заміняємо інтегру-

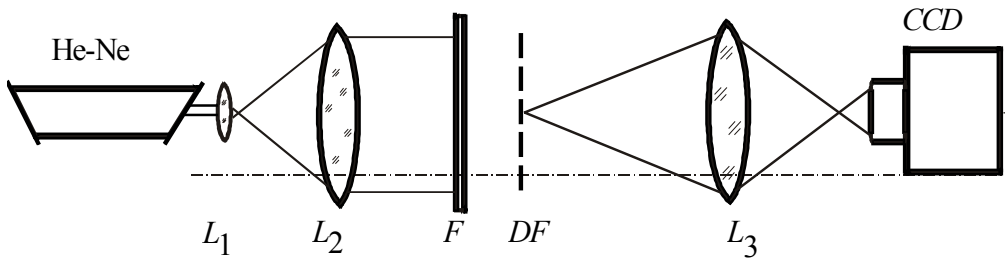


Рис.1. Схема експерименту.

вання сумуванням, поділяючи об'єкт і поле дифракції у площині спостереження на елементарні площинки зі стороною $\sim 0,1\lambda$.

Розподіл інтенсивності $I(\xi, \zeta) = |U(\xi, \zeta)|^2$ знаходиться з розрахованої величини амплітуди у полі $U(\xi, \zeta)$.

Експериментальні дослідження виконувалися у схемі, наведеній на рис.1. Плоска хвиля, сформована телескопічною системою L_1-L_2 з випромінюванням He-Ne-лазера ($\lambda=0,6328$ мкм), освітлює досліджуваний фрактал F . Довільна площина дифрагованого поля DF проектується об'єктивом L_3 на площину прийому CCD камери. Далі розподіл інтенсивності поля вводиться у комп'ютер. Досліджувані фрактали виготовлялися фотолітографічним методом у вигляді фотошаблону розміром 2×2 мм.

Наведено експериментально отримані (рис.2а) і розраховані (рис.2б) розподіли інтенсивності поля дифрагованого на серветці Серпинського 4-го рівня для різних зон реєстрації. Спостерігається задовільний збіг теорії і експерименту.

Для кількісного аналізу експериментальних результатів і комп'ютерного моделювання корисним виявилось використання взаємної поздовжньої кореляційної функції інтенсивності дифрагованого поля $I(\xi, \zeta, z)$ і розподілу пропускання досліджуваного транспаранта $I_0(\xi, \zeta)$:

$$\Psi_I(z) = \frac{\langle I_0(\xi, \zeta) \cdot I(\xi, \zeta, z) \rangle}{\langle I_0(\xi, \zeta) \cdot I(\xi, \zeta, 0) \rangle} \quad (3)$$

Для експериментального вимірювання функції поздовжньої взаємної кореляції у площину DF (рис.1) розміщався транспарант і мірялась сумарна інтенсивність випромінювання, що пройшла через систему. На рис.3 показані функції поздовжньої взаємної кореляції поля, дифрагованого на серветці Серпинського 4-го рівня, і транспарантами чотирьох типів: регулярними транспарантами з розміром елементів 25 мкм, 74 мкм, 222 мкм, що є складовими будови серветки Серпинського 4-го рівня і серветкою Сер-

пинського 4-го рівня. Спостерігається періодична кореляція дифрагованого поля з регулярними структурами. Це свідчить про існування в полі, дифрагованому на серветках Серпинського, зон, аналогічних зонам саморепродукції, притаманним регулярним структурам. Розташування цих зон визначається співвідношенням:

$$z = 2m(3d)^2 / \lambda, \quad m=1,2,3,\dots, \quad (4)$$

d – розмір елемента регулярної структури. На рис.2 у дифрагованому полі для $z=18$ мм видно саморепродукцію мінімальних елементів фрактала як для розрахованих, так і для експериментально отриманих полів.

Окрім саморепродукції, у дифрагованому полі виявлено ефект пониження рівня фракталу. Так, міряючи функцію поздовжньої кореляції поля дифрагованого на серветці Серпинського 4-го рівня і транспаранта у вигляді серветки Серпинського нижчих рівнів, отримали максимуми кореляційної функції для зони реєстрації, що визначається таким співвідношенням:

$$z_n \approx (N-n)3^{(N-n+1)} d_{\min}^2 / \lambda, \quad (5)$$

де N – рівень фрактала-об'єкта, n – рівень фрактала в полі, d_{\min} – мінімальний елемент фрактала.

На рис.4 наведено інтенсивності розрахованих і експериментально отриманих дифрагованих полів для зон реєстрації, яким відповідають максимуми функцій поздовжньої взаємної кореляції для транспарантів 3-го (рис.4а, $z=9$ мм) і 2-го (рис.4б, $z=63$ мм) рівнів. У цих полях проглядаються зашумлені контури фракталів 3-го і 2-го рівнів. Застосування процедури вейвлет-перетворення дозволяє дещо поліпшити зображення фракталів. Ми використовували стандартний пакет *MatLab-6*, програму *Wavelet Toolbox*, процедуру *2-D Denoising*.

Отже, у полі оптичного випромінювання, дифрагованого на серветках Серпинського, теоретично і експериментально ми спостерігали саморепродукцію елементів будови фракталу і пониження його рівня з віддаленням зони реєстрації.

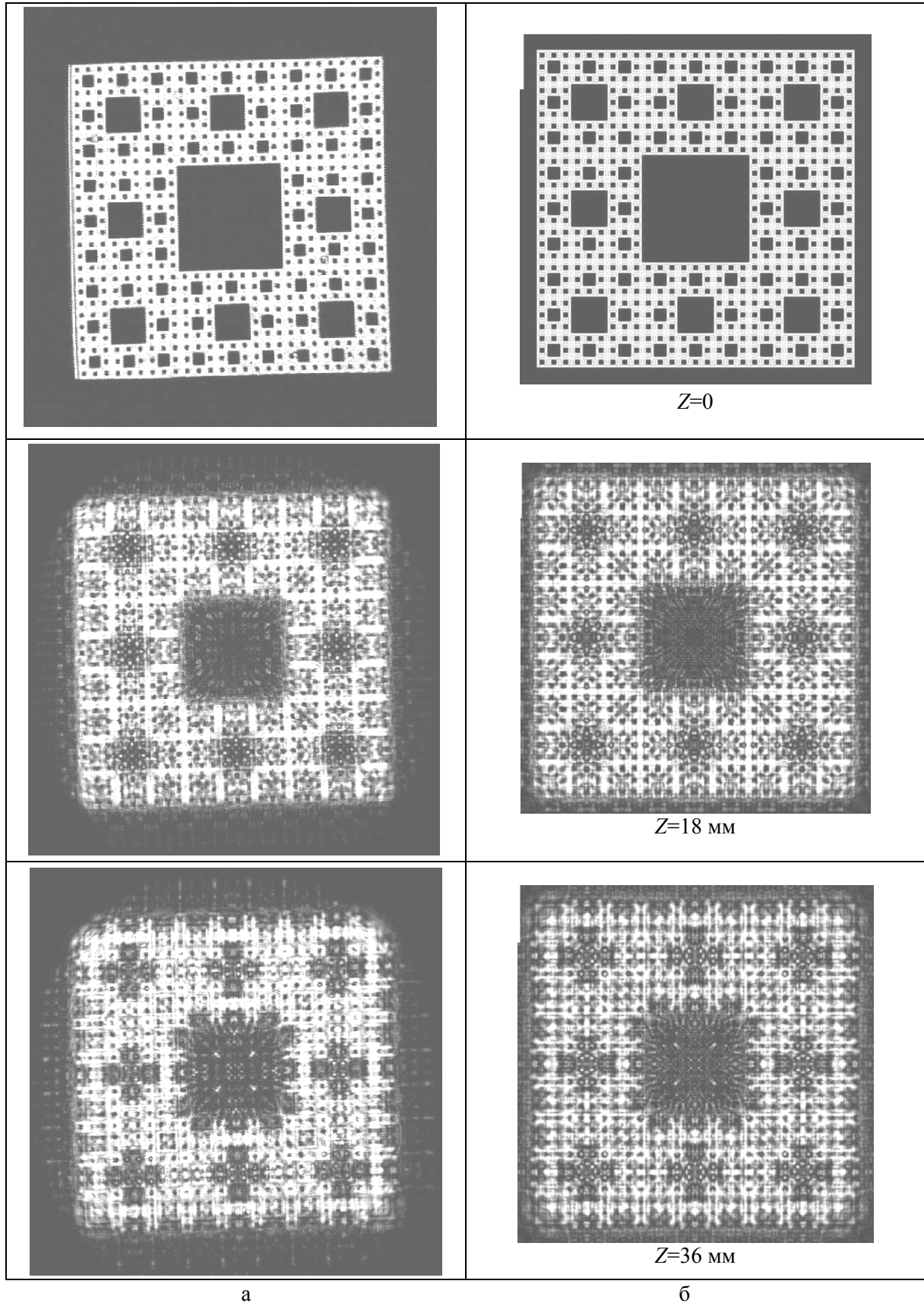


Рис.2. Інтенсивності експериментально отриманих (а) і розрахованих (б) полів, дифрагованих на серветці Серпінського 4-го рівня.

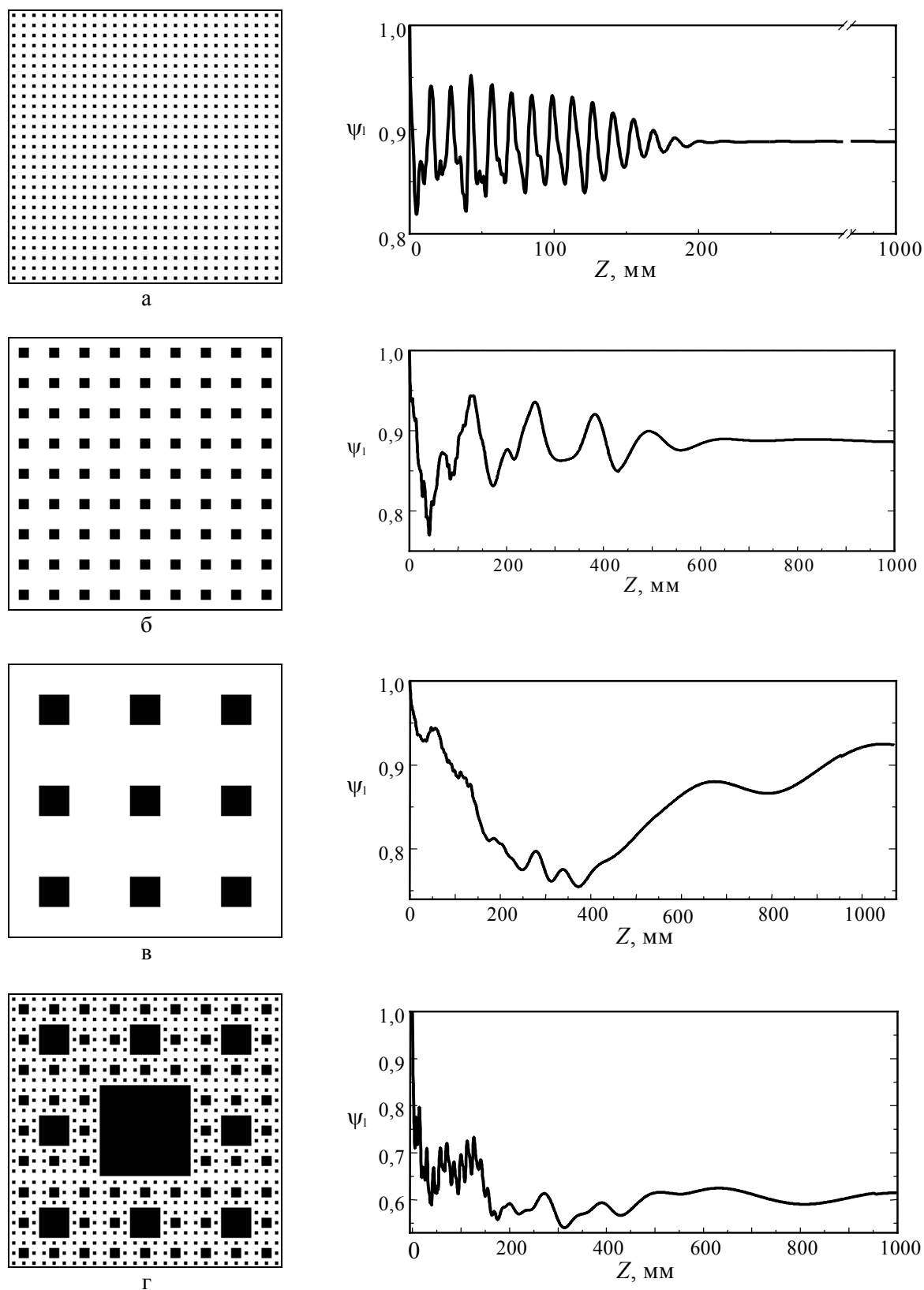


Рис.3. Функції поздовжньої взаємної кореляції для регулярних транспарантів з розміром елементів 25 мкм (а), 74 мкм (б), 222 мкм (в) і серветки Серпинського 4-го рівня (г).

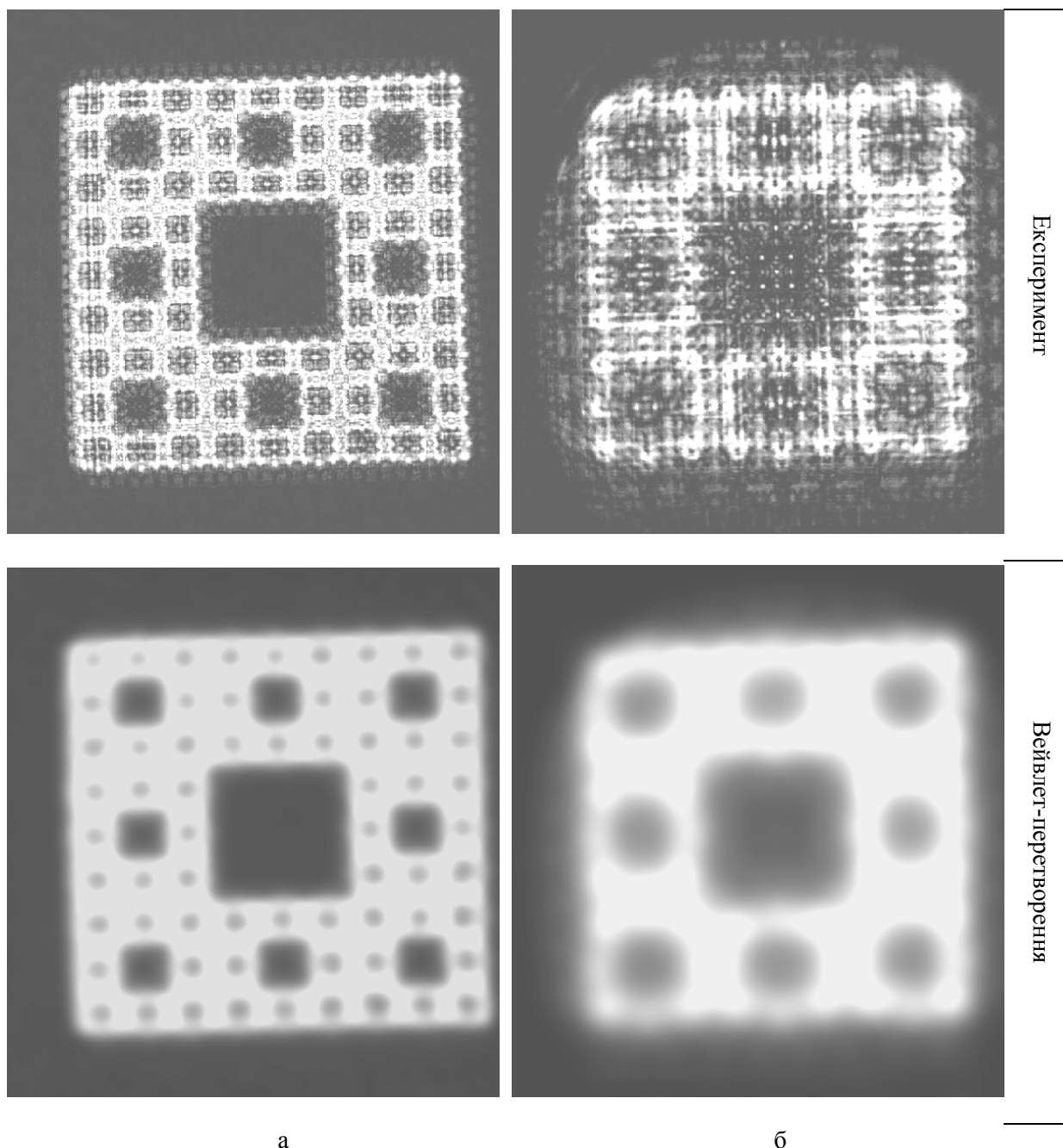


Рис.4. Експериментально отримані інтенсивності дифрагованих полів в зонах пониження рівня фракталу $z=9$ мм (а), $z=53$ мм (б) та вейвлет-перетворення від них.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. - New York: Freeman, 1982. - Chapt.6. - P.37-57, and Chapt.39. - P.362-365.
2. Sakurada Y., Uozumi J., Asakura T. // Pure Appl. Opt. - 1994. - **3**, No.3. - P.371-380.
3. Dogariu A., Uozumi J., Asakura T. // J. Mod. Opt. - 1994. - **41**, No.4. - P.729-738.
4. Dogariu A., Uozumi J., Asakura T. // Pure. Appl. Opt. - 1993. - **2**. - P.339-350.
5. Montgomery W.D. // JOSA. - 1967. - **57**, No.4. - P.772-778.
6. Федер Е. Фракталы. - М.: Мир, 1991.
7. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. - М.: Мир, 1970.