УДК 621.315.592

© 2000 р. І.В.Гуцул, А.А.Ащеулов

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ПОПЕРЕЧНА ТЕРМОЕРС І ВОЛЬТ-ВАТНА ЧУТЛИВІСТЬ АНІЗОТРОПНОГО ОПТИКОТЕРМОЕЛЕМЕНТА У ВИПАДКУ ТЕРМОСТАТУВАННЯ ЙОГО БОКОВИХ ГРАНЕЙ

Проведено розрахунок поперечної термоЕРС і дослідження вольт-ватної чутливості анізотропного оптикотермоелемента для випадку термостатування його бокових граней.

The calculation of transverse thermoelectromotive is carried out and volt-watt sensitivity of anisotropic optic thermoelement is investigated for case of thermostating its lateral face.

Розглянемо прямокутну пластину розмірами $a\times b\times c$ (рис.1) з матеріалу, анізотропного за коефіцієнтами термоЕРС $\hat{\alpha}$ і теплопровідності $\hat{\chi}$. Тензори $\hat{\alpha}$ і $\hat{\chi}$ мають вигляд :

$$\hat{\alpha}=\begin{vmatrix} \alpha_{||}\sin^2\varphi+\alpha_{\perp}\cos^2\varphi & (\alpha_{||}-\alpha_{\perp})\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ (\alpha_{||}-\alpha_{\perp})\sin\varphi\cos\varphi & \alpha_{||}\cos^2\varphi+\alpha_{\perp}\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp} \end{vmatrix},$$

$$\hat{\chi}=\begin{vmatrix} \chi_{||}\sin^2\varphi+\chi_{\perp}\cos^2\varphi & (\chi_{||}-\chi_{\perp})\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ (\chi_{||}-\chi_{\perp})\sin\varphi\cos\varphi & \chi_{||}\cos^2\varphi+\chi_{\perp}\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\perp} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

На верхню грань термоелемента 1 падає променевий потік енергії густиною q_0. Бокові грані знаходяться в теплоконтакті із термостатом 2 при температурі $T=T_0$, а нижня і торцеві грані адіабатично ізольовані. Рівномірний монохроматичний потік густиною q_0 і довжиною хвилі λ_0, пройшовши через таку пластину, зумовлює появу в ній градієнта температури і однозначно зв'язаної з ним поперечної термоЕРС. При наявності внутрішніх джерел тепла розподіл температури в пластині знаходимо із закону теплопровідності [1], який для стаціонарного випадку $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ в наближенні $\chi_{12}<\chi_{22}$ має такий вигляд

$$\xi^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_0\gamma}{\chi_{33}}e^{-\gamma(b-y)}=0, \qquad (2)$$

де $\xi^2=\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}$, γ – коефіцієнт поглинання матеріалу пластини.

Крайові умови для рівняння теплопровідності (2) вибираємо так:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a}=0,\quad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b}=0,$$

$$T\big|_{z=0}=T_0,\qquad T\big|_{z=c}=T_0. \qquad (3)$$

Функція $\cos\omega_n y$ – власна функція задачі Штурма-Ліувіля

$$\frac{d^2 v}{dy^2}+\omega^2 v=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=b}=0, \quad (4)$$

яка відповідає власному значенню $\omega_n=n\pi/b$, де n=0,1,2,… . Система $\{\cos\omega_n y\}_{n=0}^{\infty}$ є повною, замкнутою, ортогональною системою функцій на відрізку $[0,b]$, що дозволяє ставити питання про розклад функцій $v(y)$ в ряд Фур'є за цією системою.

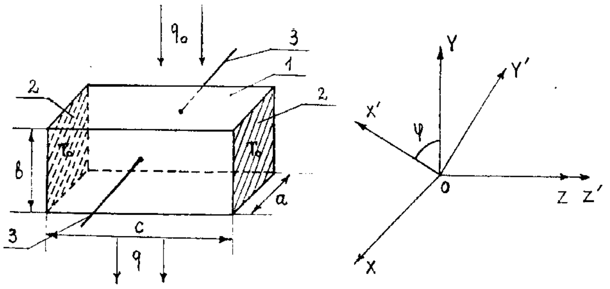

Рис.1. Схема АОТ: анізотропна пластина (1); термостат (2); електровиводи (3). Праворуч – лабораторна система координат *XYZ* і орієнтація кристалографічних осей *X'Y'Z'* монокристалічної пластини 1.

Тоді функція $v(y)$ за своїми зображенням [2]

$$\hat{\Phi}_n\left[v(y)\right]=\int_0^b v(y)\cos\omega_n y\,dy\equiv v_n \qquad (5)$$

однозначно відновлюється за правилом

$$v(y)=\hat{\Phi}_n^{-1}\left[v_n\right]=\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n v_n\cos\omega_n y\,, \qquad (6)$$

де $\delta_n=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n=1,2,...\end{cases}$.

Застосувавши до задачі (2)-(3) оператор $\hat{\Phi}_n$ за правилом (5), внаслідок тотожності

$$\hat{\Phi}_n\left[\xi^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]=\int_0^b\xi^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\cos\omega_n y\,dy\equiv-\xi^2\omega_n^2 T_n(z)\,,$$

де $T_n(z)=\int_0^b T\ (y,z)\cos\omega_n y\,dy$,

одержимо задачу побудови розв'язку рівняння

$$\frac{d^2T_n(z)}{dz^2}-\xi^2\omega_n^2T_n(z)=-\theta_n\,,\quad z\in(0,c) \qquad (7)$$

$$\theta_n=\int_0^b\frac{q_0\gamma}{\chi_{33}}e^{-\gamma(b-y)}\cos\omega_n y\,dy \qquad (8)$$

за крайовими умовами

$$T_n(z)\big|_{z=0}=T_{0n}\,,\quad T_n(z)\big|_{z=c}=T_{0n}\,,$$
$$T_{0n}=\int_0^b T_0\cos\omega_n y\,dy=\begin{cases}T_0\,b, & n=0\\ 0, & n=1,2,...\end{cases} \qquad (9)$$

При n=0 розв'язок задачі (7)-(9) такий

$$T_0(z)=T_0b+\frac{q_0\left(e^{-\gamma b}-1\right)}{2\chi_{33}}\left(z^2-c\,z\right). \qquad (10)$$

Для n>0 загальний розв'язок неоднорідного рівняння (7) шукаємо у вигляді

$$T_n(z)\big|_{n>0}=T_n^{\text{одн.}}(z)\Big|_{n>0}+T_n^{\text{неодн.}}(z)\Big|_{n>0}. \qquad (11)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння (7) такий

$$T_n^{\text{одн.}}(z)\Big|_{n>0}=B_{1n}\,\mathrm{ch}\omega_n z+B_{2n}\,\mathrm{sh}\omega_n z\,. \qquad (12)$$

Для часткового розв'язку неоднорідного рівняння (7) із врахуванням (8) одержимо

$$T_n^{\text{неодн.}}(z)\Big|_{n>0}=\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{33}}\frac{\left((-1)^n-e^{-\gamma b}\right)}{\xi^2\omega_n^2\left(\omega_n^2+\gamma^2\right)}. \qquad (13)$$

Коефіцієнти B_{1n} і B_{2n} знаходимо за крайовими умовами (9) для n>0:

$$B_{1n}=-\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{33}}\frac{\left[(-1)^n-e^{-\gamma b}\right]}{\xi^2\omega_n^2\left(\omega_n^2+\gamma^2\right)},$$
$$B_{2n}=B_{1n}\frac{\left[\mathrm{ch}(\xi\omega_n c)-1\right]}{\mathrm{sh}(\xi\omega_n c)}. \qquad (14)$$

Тоді загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (7) для $n\geq0$ при врахуванні (10)-(14) матиме вигляд

$$T_n(z)=T_0b+\frac{q_0\left(e^{-\gamma b}-1\right)}{2\chi_{33}}\left(z^2-c\,z\right)+$$
$$+\frac{q_0\gamma^2}{\chi_{33}\xi^2}\frac{\left[(-1)^n-e^{-\gamma b}\right]}{\omega_n^2\left(\omega_n^2+\gamma^2\right)}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\mathrm{sh}\left(\xi\omega_n(z-c)\right)-\mathrm{sh}\left(\xi\omega_n z\right)}{\mathrm{sh}\left(\xi\omega_n c\right)}\right]. \qquad (15)$$

Застосовуючи обернене інтегральне косинус-перетворення Фур'є (6) до розв'язку (15), одержимо такий вираз для розподілу температури АОТ

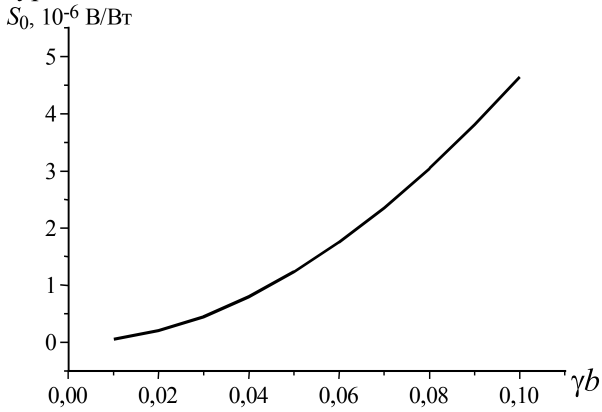

Рис.2. Залежність вольт-ватної чутливості S_0 АОТ із $ZnAs_2$ у випадку оптичного пропускання (γb<<1) при двобічному термостатуванні.

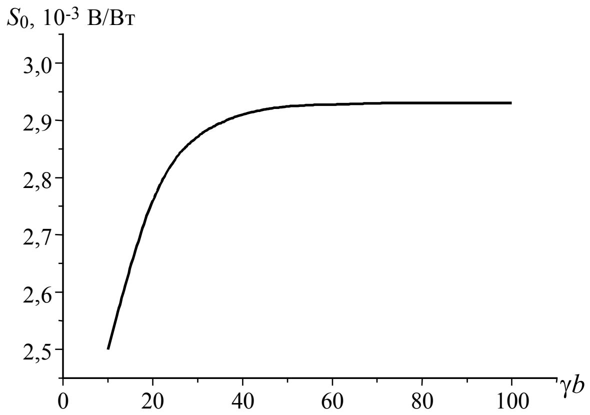

Рис.3. Залежність вольт-ватної чутливості S_0 АОТ із $ZnAs_2$ у випадку поверхневого поглинання (γb>>1) при двобічному термостатуванні.

$$T(y,z)=T_0+\frac{q_0\left(e^{-\gamma b}-1\right)}{2b\chi_{33}}\left(z^2-cz\right)+$$

$$+\frac{2q_0\gamma^2}{b\chi_{22}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-e^{-\gamma b}\right]}{\omega_n^2(\omega_n^2+\gamma^2)}\cos\omega_n y\times$$

$$\times\left[1+\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\omega_n(z-c)\right)-\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\omega_n z\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\omega_n c\right)}\right].\quad(16)$$

Поперечна термоЕРС згідно з [3] визначається співвідношенням

$$\varepsilon=\frac{1}{bc}\int_0^b dy\int_0^c dz\int_0^a E_x^T dx\,,\quad(17)$$

де $E_x^T=\alpha_{12}\,\partial T/\partial y$. Підставляючи (16) в (17), одержуємо

$$\varepsilon=\frac{4q_0\alpha_{12}}{\chi_{22}}\frac{a}{b^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+e^{-\gamma b}\right)(\gamma b)^2}{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{b^2}\left[(2k+1)^2\pi^2+(\gamma b)^2\right]}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{2b}{(2k+1)\pi c}\sqrt{\frac{\chi_{33}}{\chi_{22}}}\frac{\left[1-\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\frac{(2k+1)\pi c}{b}\right)\right]}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\frac{(2k+1)\pi c}{b}\right)}\right\}.\quad(18)$$

Вольт-ватна чутливість S_0 розглянутого АОТ визначається таким співвідношенням

$$S_0=\frac{\varepsilon}{q_0 ac}=\frac{4\alpha_{12}}{\chi_{22}c}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+e^{-\gamma b}\right)(\gamma b)^2}{(2k+1)^2\pi^2\left[(2k+1)^2\pi^2+(\gamma b)^2\right]}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{2b}{(2k+1)\pi c}\sqrt{\frac{\chi_{33}}{\chi_{22}}}\frac{\left[1-\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\frac{(2k+1)\pi c}{b}\right)\right]}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\frac{(2k+1)\pi c}{b}\right)}\right\}.\quad(19)$$

На рис.2, 3 наведено графіки залежності вольт-ватної чутливості від γb у випадках оптичного пропускання і поверхневого поглинання для АОТ із $ZnAs_2$ при двобічному термостатуванні.

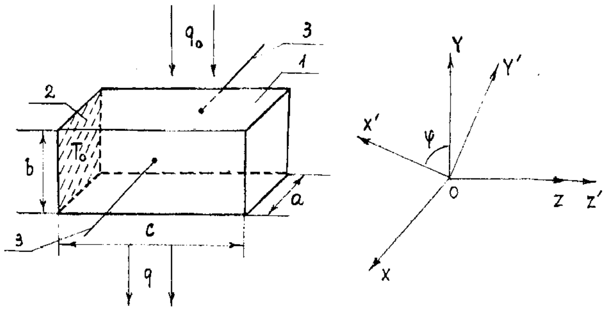

Рис.4. Схема АОТ: анізотропна пластина (1); термостат (2); електроконтакти (3).

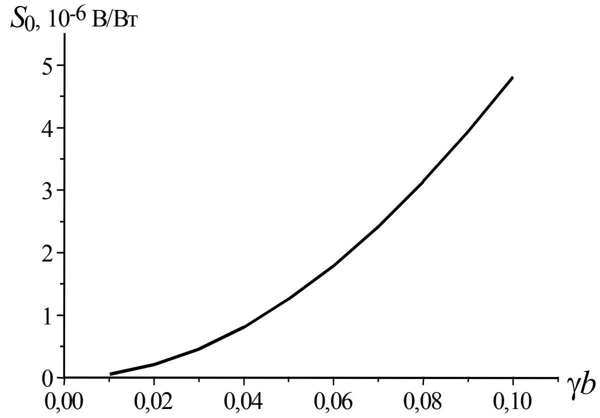

Рис.5. Залежність S_0 віл γb для АОТ із $ZnAs_2$ у випадку γb<<1 при однобічному термостатуванні.

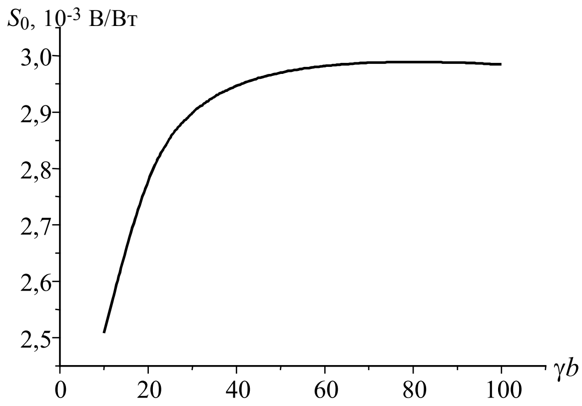

Рис.6. Залежність S_0 віл γb для АОТ із $ZnAs_2$ у випадку γb>>1 при однобічному термостатуванні.

Вольт-ватна чутливість АОТ, ліва бокова грань якого термостатована (рис.4), визначається за допомогою розподілу температури, одержаного з рівняння теплопровідності (2) за крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a}=0\,,\quad\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b}=0\,,$$

$$\left.T\right|_{z=0}=T_0\,,\quad\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=c}=0\,.\quad(20)$$

і має такий вигляд

$$S_0=\frac{4\alpha_{12}}{\chi_{22}c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+e^{-\gamma b}\right)(\gamma b)^2}{(2k+1)^2\pi^2\left[(2k+1)^2\pi^2+(\gamma b)^2\right]}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{b}{(2k+1)\pi c}\sqrt{\frac{\chi_{33}}{\chi_{22}}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{\chi_{22}}{\chi_{33}}}\frac{(2k+1)\pi c}{b}\right)\right\}. \qquad (21)$$

Співвідношенням (21) задається і вольт-ватна чутливість АОТ, права бокова грань якого термостатована, а всі інші – адіабатично ізольовані. На рис.5, 6 наведено графіки залежності вольт-ватної чутливості АОТ, виготовленого із $ZnAs_2$ і термостатованого через ліву бокову грань від γb у випадках оптичного пропускання і поверхневого поглинання.

Із порівняння графіків залежності S_0 АОТ від γb (рис.2, 3 і рис.5, 6) випливає, що вольт-ватна чутливість АОТ, термостатованих через ліву або праву бокову грань більша, ніж у випадку термостатування обох бокових граней. Застосування таких АОТ дозволяє проводити реєстрацію променевих потоків з найменшим спотворенням їх енергії. В цьому випадку непотрібно оптично прозорих тепловідводів і клеїв, що веде до зростання часової стабільності роботи приладів на їх основі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа. 1967.
2. *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования с раздельными переменными (Фурье-Ханкеля). - Киев, 1983. - (Препр. / Институт математики АН УССР: № 83.4).
3. *Снарский А.А.* ЭДС термоэлементов, использующих анизотропию термоЭДС // ФТП. - 1977. - **11**, вып.10. - С.2053-2055.