УДК 681.3.06

© 2000 р. О.М.Дуда, М.О.Дуда, М.П.Карпінський

Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя,
Тернопільська академія народного господарства, Тернопіль

ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ У НЕКЛАСИЧНІЙ ДВОЗНАЧНІЙ АЛГЕБРІ ЛОГІКИ

Систематизовано елементарні функції у некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки із врахуванням середовища реалізації). Описано їх таблиці істинності, булеві формули і реалізації логічними елементами. Доведено, що кількість цих функцій дорівнює чотирнадцять.

There have been systemized elementary functions in non-classic two-digit logics algebra (two-digit logics algebra with taking into consideration of realization medium). There also have been defined the verisimilitude tables, Bull's formulas and realizations by logic elements. It has been proved that functions number is equal to fourteen.

У класичній двозначній алгебрі логіки не систематизовано елементарні функції і їх реалізації логічними елементами, а тому кількість цих функцій у літературі неоднозначна [1-3]. Таблиці істинності і булеві формули елементарних функцій описуються без врахування середовища реалізації, хоч при практичному застосуванні таких функцій середовище реалізації враховується. Наприклад, в обчислювальній техніці логічні елементи вмикаються до джерела живлення тощо. Деякі з цих функцій описуються обмежено і не завжди правильно. Як доведено у [4,5], теоретично для двох змінних булеві функції Антиеквівалентність і Еквівалентність вважаються елементарними, а для кількості змінних більше двох – складними, хоч практично вони реалізуються відповідними логічними елементами як елементарні функції [6,7]. Окрім того, класично елементарні функції "Константа 0", "Константа 1" і Повторення теоретично і практично взагалі трактуються неправильно [4,8-10], а у таблицях істинності і булевих формулах не використовуються пропозиційні зв'язки відповідного вигляду [1,3, 11]. Тому одна із головних теорем класичної двозначної алгебри логіки – теорема Поста-Кузнєцова-Яблонського про необхідні і достатні умови функціональної повноти (теорема про функціональну повноту) булевих систем [12,13] – неправильна.

Мета статті – систематизація у вигляді таблиць істинностей, булевих формул і їх технічних реалізацій логічними елементами усіх елементарних функцій класичної двозначної алгебри логіки із врахуванням середовища реалізації (називатимемо у подальшому, з метою зручності, некласичної двозначної алгебри логіки), а також доведення їх кількості.

У некласичній двозначній алгебрі логіки функції можна поділити на елементарні і складні. При цьому мають місце такі визначення.

<u>Визначення 1</u>. Булева функція $f(X,Q)$ некласичної двозначної алгебри логіки, в якій змінні $X\in\{x_i\}$, $x_i\in\{0;1\}$, $i=1,2,\ldots,n$, а середовище реалізації цієї алгебри логіки $Q\in\{0;1\}$, називається елементарною, якщо вона існує при $Q=1$, не існує при $Q=0$ і:

а) усі змінні множини X – істотні;
б) кожна змінна множини X зустрічається у булевій формулі не більше одного разу;
в) у булевій формулі використовується тільки одного відповідного вигляду пропозиційна зв'язка з множини $\{\lrcorner, \neg, \rightarrow, \leftarrow, \not\rightarrow, \not\leftarrow, \leftrightarrow, \leftarrow\!\!\mapsto, \vee, \wedge, \mathrm{I}, \downarrow, \amalg, \Pi\}$[1];
г) технічно реалізується за допомогою відповідного логічного елемента.

<u>Визначення 2.</u> Складною булевою функцією некласичної двозначної алгебри логіки називається функція, яка описується і реалізуються за допомогою однойменних чи різнойменних елементарних функцій, кількість яких – не менше двох.

[1] Пропозиційні зв'язки "$\lrcorner$", "$\amalg$" і "Π" запропоновано у [4] відповідно для некласичних елементарних функцій Повторення, "Константа 0" і "Константа 1".

До елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки можна віднести тільки чотирнадцять різновидів булевих функцій:

1. Повторення.
2. Заперечення.
3. Імплікація.
4. Обернена імплікація.
5. Антиімплікація.
6. Обернена антиімплікація.
7. Еквівалентність.
8. Антиеквівалентність.
9. Диз'юнкція.
10. Кон'юнкція.
11. Штрих Шефера.
12. Стрілка Пірса.
13. Константа 0.
14. Константа 1.

При цьому, у залежності від кількості змінних множини X і їх значень, наведені елементарні функції можна поділити на такі чотири групи:

1. Функції, котрі залежать від значень однієї істотної змінної (Повторення, Заперечення).
2. Функції, котрі залежать від значень двох істотних змінних (Імплікація, "Обернена імплікація", Антиімплікація, "Обернена антиімплікація").
3. Функції, котрі залежать від значень усіх істотних змінних множини X при $n\geq 2$ (Еквівалентність, Антиеквівалентність, Диз'юнкція, Кон'юнкція, "Штрих Шефера", "Стрілка Пірса").
4. Функції, котрі не залежать від значень усіх істотних змінних множини X при $n\geq 1$ ("Константа 0", "Константа 1").

Опис елементарних функцій по групах

Група 1. Для змінної, наприклад, x_1 (таблиця 1)[2]:

а) $f_1(x_1,Q)=Q^{*}\lrcorner x_1$ – елементарна функція Повторення[3]. Булева формула цієї функції містить істотну змінну x_1, яка зустрічається в ній тільки один раз, і пропозиційну зв'язку "$\lrcorner$". Її реалізує логічний елемент ПОВТОРЕННЯ (рис.1а), який має входи "x_1", "Q" і вихід "$Q^{*}\lrcorner x_1$". При Q=1 на

Таблиця 1. Істинність для елементарних функцій Повторення і Заперечення.

x_1, Q	$Q^{*}\lrcorner x_1$	$Q^{*}\neg x_1$
0,1	0	1
1,0	1	0

виході "$Q^{*}\lrcorner x_1$" одиничний сигнал виникає лише тоді, якщо на вході "x_1" є одиничний сигнал;

б) $f_2(x_1,Q)=Q^{*}\neg x$ – функція Заперечення. Булева формула цієї функції містить істотну змінну x_1, яка зустрічається в ній тільки один раз, і пропозиційну зв'язку "$\neg$". Її реалізує логічний елемент НЕ (рис.1б), який має входи "x_1", "Q" і вихід "$Q^{*}\neg x_1$". При Q=1 такий елемент забезпечує одиничний сигнал на виході "$Q^{*}\neg x_1$" тоді, якщо на його вході "x_1" є нульовий сигнал.

Група 2. Для змінних, наприклад, x_1 і x_2 (таблиця 2):

а) $f_3(x_1,x_2,Q)=Q^{*}(x_1\rightarrow x_2)$ – функція Імплікація. Булева формула цієї функції містить істотні змінні x_1 і x_2, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\rightarrow$". Її реалізує логічний елемент ІМПЛІКАЦІЯ (рис.1в). Він має входи "x_1", "x_2", "Q" і вихід "$Q^{*}(x_1\rightarrow x_2)$". При Q=1 на виході "$Q^{*}(x_1\rightarrow x_2)$" одиничний сигнал присутній в усіх випадках окрім випадку, коли на вході "x_1" є одиничний сигнал, а на вході "x_2" – нульовий сигнал;

б) $f_4(x_1,x_2,Q)=Q^{*}(x_1\leftarrow x_2)$ – функція "Обернена імплікація". Булева формула такої функції містить істотні змінні x_1 і x_2, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\leftarrow$". Її реалізує логічний елемент "ОБЕРНЕНА ІМПЛІКАЦІЯ" (рис.1г), який має входи "x_1", "x_2", "Q" і вихід "$Q^{*}(x_1\leftarrow x_2)$". При значенні Q=1 на виході "$Q^{*}(x_1\leftarrow x_2)$" одиничний сигнал присутній в усіх випадках окрім випадку, якщо на вході "x_1" є нульовий сигнал, а на вході "x_2" – одиничний сигнал;

в) $f_5(x_1,x_2,Q)=Q^{*}(x_1\not\rightarrow x_2)$ – функція Антиімплікація. Булева формула цієї функції містить істотні змінні x_1 і x_2, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\not\rightarrow$". Її реалізує логічний елемент ЗАБОРОНА (рис.1д). Він має входи "x_1", "x_2", "Q" і вихід "$Q^{*}(x_1\not\rightarrow x_2)$". При Q=1 цей логічний елемент забезпечує одиничний сигнал на виході "$Q^{*}(x_1\not\rightarrow x_2)$ " лише тоді, якщо на вході "x_1" є одиничний сигнал, а на вході "x_2" – нульовий сигнал;

[2] З метою спрощення таблиць істинності для елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки будемо зображати їх тільки при Q=1 і відповідних наборах значень змінних з множини X, тому що при Q=0 ці функції, як випливає із визначення 1, не існують.

[3] У класичній двозначній алгебрі логіки не використовувались наведені записи булевих формул елементарних функцій Антиеквівалентність і Еквівалентність при n>2, "Константа 0" і "Константа 1" при $n\geq 1$, Повторення, а отже, не використовувались і відповідні логічні елементи "ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ-НЕ" і ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ при n>2, "КОНСТАНТА 0" і "КОНСТАНТА 1", ПОВТОРЕННЯ.

Таблиця 2. Істинність для елементарних функцій: Імплікація, Обернена імплікація, Антиімплікація і Обернена антиімплікація.

x_1, x_2, Q	$Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$	$Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$	$Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$	$Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$
0,0,1	1	1	0	0
0,1,1	1	0	0	1
1,0,1	0	1	1	0
1,1,1	1	1	0	0

Таблиця 3. Істинність для елементарних функцій: Еквівалентність, Антиеквівалентність, Диз'юнкція, Кон'юнкція, "Штрих Шефера" і "Стрілка Пірса".

$x_1,\ldots,x_{n-1},x_n, Q$	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mid}} x_i$	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$
0,…,0,0,1	1	0	0	0	1	1
0,…,0,1,1	0	1	1	0	1	0
0,…,1,0,1	0	1	1	0	1	0
0,…,1,1,1	0	1	1	0	1	0
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
1,…,1,0,1	0	1	1	0	1	0
1,…,1,1,1	1	0	1	1	0	0

г) $f_6(x_1,x_2,Q)=Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$ – функція "Обернена антиімплікація". Булева формула такої функції містить змінні x_1 і x_2, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\nleftarrow$". Її реалізує логічний елемент "ОБЕРНЕНА ЗАБОРОНА" (рис.1е), який має входи "x_1", "x_2", "Q" і вихід "$Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$". При Q=1 такий елемент забезпечує одиничний сигнал на виході "$Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$" лише тоді, якщо на вході "x_1" є нульовий сигнал, а на вході "x_2" – одиничний сигнал.

Група 3. Для усіх змінних множини X при $n \geq 2$ (таблиця 3):

а) $f_7(X,Q)=Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$ – елементарна функція Еквівалентність, причому

$$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i = Q^*(x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow x_n)$$

і булева формула вигляду

$$Q^*(x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow x_n)$$

розглядається як єдине ціле, а не як формула вигляду $Q^*((\ldots((x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow x_3) \leftrightarrow \ldots) \leftrightarrow x_n)$. Ця булева формула містить істотні змінні $x_1,\ldots,x_n$, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\leftrightarrow$". Реалізує цю функцію логічний елемент ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ (рис.2а), який містить входи "x_1",..., "x_n", "Q" і вихід "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$".

При Q=1 на його виході виникає одиничний сигнал лише тоді, якщо на входах "x_1",..., "x_n" одночасно є тільки одиничні або лише нульові сигнали. Необхідно відзначити, що при n=2 елементарну функцію

$$f_7(x_1,x_2,Q)=Q^*(x_1 \leftrightarrow x_2)$$

можна називати ще функцією Рівнозначність;

б) $f_8(X,Q)=Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$ – логічна функція Антиеквівалентність, причому

$$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i = Q^*(x_1 \leftarrow\!\mapsto x_2 \leftarrow\!\mapsto \ldots \leftarrow\!\mapsto x_n)$$

і булева формула вигляду

$$Q^*(x_1 \leftarrow\!\mapsto x_2 \leftarrow\!\mapsto \ldots \leftarrow\!\mapsto x_n),$$

аналогічно до булевої формули функції Еквівалентність, розглядається як єдине ціле, а не як формула вигляду

$$Q^*((\ldots((x_1 \leftarrow\!\mapsto x_2) \leftarrow\!\mapsto x_3) \leftarrow\!\mapsto \ldots) \leftarrow\!\mapsto x_n).$$

Ця булева формула містить істотні змінні $x_1,\ldots, x_n$, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\leftarrow\!\mapsto$". Її реалізує елемент "ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ-НЕ" (рис.2б), який містить входи "x_1",...,"x_n", "Q" і вихід "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$". При Q=1 такий логічний елемент забезпечує одиничний сигнал на виході "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$" тільки у тих випадках, коли на входах "x_1",...,"x_n" одиничні або нульові сигнали не одночасні. Також необхідно відзначити, що при n=2 функцію

$$f_8(x_1,x_2,Q)=Q^*(x_1 \leftarrow\!\mapsto x_2)$$

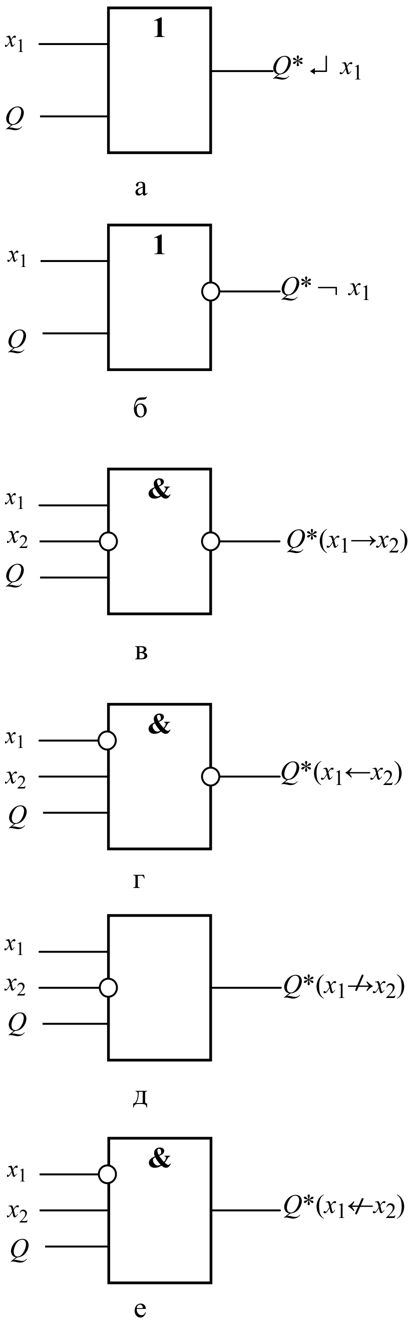

Рис.1. Логічні елементи: ПОВТОРЕННЯ (а), НЕ (б), ІМПЛІКАЦІЯ (в), ОБЕРНЕНА ІМПЛІКАЦІЯ (г), ЗАБОРОНА (д), ОБЕРНЕНА ЗАБОРОНА (е)

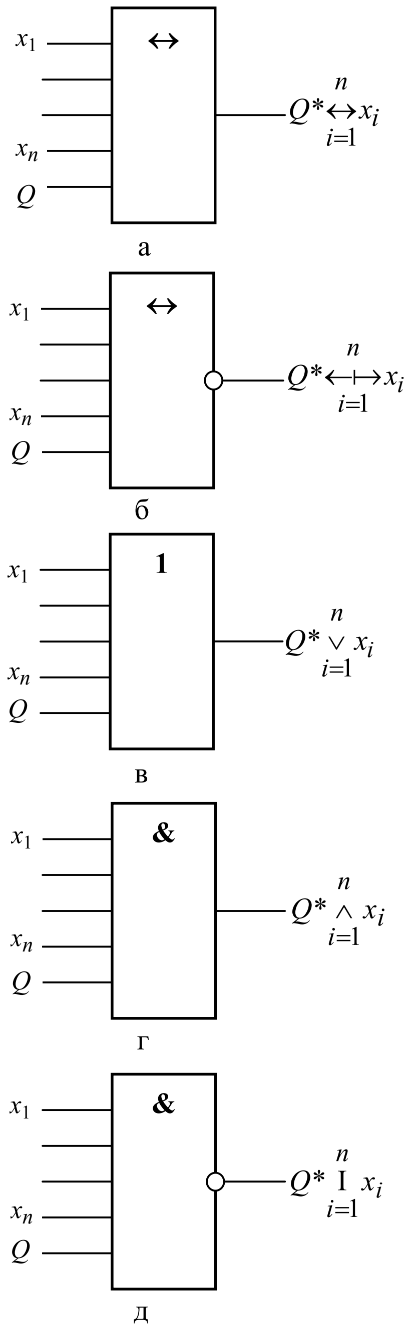

Рис.2. Логічні елементи: ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ (а), ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ-НЕ (б), АБО (в), І (г), І-НЕ (д).

можна записувати у вигляді

$$f_8(x_1,x_2,Q)=Q^*(x_1\oplus x_2)$$

і називати ще функцією "Додавання за *mod* 2";

в) $f_9(X,Q)=Q^*\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ – функція Диз'юнкція, причому

$$Q^*\bigvee_{i=1}^{n} x_i = Q^*(x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n)\ .$$

Тут булева формула вигляду

$$Q^*(x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_n)$$

може розглядатись як єдине ціле (раціональніший варіант) або як формула вигляду

$$Q^*((\ldots((x_1\vee x_2)\vee x_3)\vee\ldots)\ \vee x_n)\ .$$

У науковій літературі цю функцію називають ще "Логічне додавання". Булева формула цієї функції містить істотні змінні $x_1,\ldots,x_n$, які зустрічаються в її зображенні тільки один раз, і пропозиційну зв'язку "$\vee$". Дану функцію реалізує логічний елемент АБО (рис.2в), який має входи "x_1",..., "x_n", "Q" і вихід "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$". Він забезпечує одиничний сигнал на виході "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$" тільки тоді, якщо Q=1 і хоча би на одному з входів "x_1", ..., "x_n" є одиничний сигнал;

г) f_{10}=(X,Q)=$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ – елементарна функція Кон'юнкція, причому

$$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i = Q^*(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n),$$

і булева формула вигляду

$$Q^*(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$$

може також розглядатись як єдине ціле (раціональніший варіант) або як формула вигляду

$$Q^*((...((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \wedge ...) \wedge x_n).$$

У науковій літературі цю булеву функцію ще називають "Логічне множення". Булева формула такої функції містить істотні змінні $x_1,\dots, x_n$, які зустрічаються в її зображенні тільки один раз, і пропозиційну зв'язку "$\wedge$". Таку функцію реалізує логічний елемент І (рис.2г), який містить входи "x_1",..., "x_n", "Q" і вихід "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$". При Q=1 на виході "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$" одиничний сигнал є лише тоді, якщо на усіх входах "x_1",..., " x_n" одночасно – одиничні сигнали;

д) f_{11}=(X,Q)=$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$ – функція "Штрих Шефера", причому

$$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i = Q^*(x_1 \mathrm{I}\, x_2 \mathrm{I} \dots \mathrm{I}\, x_n),$$

і булева формула вигляду

$$Q^*(x_1 \mathrm{I}\, x_2 \mathrm{I} \dots \mathrm{I}\, x_n)$$

розглядається як єдине ціле, а не як формула вигляду

$$Q^*((...((x_1 \mathrm{I}\, x_2) \mathrm{I}\, x_3) \mathrm{I} \dots) \mathrm{I}\, x_n).$$

Ця булева формула містить істотні змінні $x_1,\dots,x_n$, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "І". Її реалізує логічний елемент "І-НЕ" (рис.2д), який містить входи "x_1",..., "x_n", "Q" і один вихід "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$". При Q=1 на його виході "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$" одиничний сигнал є завжди крім випадку, коли на усіх входах "x_1",..., "x_n" одночасно – одиничні сигнали;

е) $f_{12}(X,Q)$=$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$ – функція "Стрілка Пірса", причому

$$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i = Q^*(x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n),$$

і булева формула вигляду

$$Q^*(x_1 \downarrow x_2 \downarrow ... \downarrow x_n)$$

розглядається також як єдине ціле, а не як формула вигляду

$$Q^*((...((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow ...) \downarrow x_n).$$

Ця булева формула містить істотні змінні $x_1,\dots, x_n$, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\downarrow$". Її реалізує логічний елемент "АБО-НЕ" (рис.3а). Даний елемент містить входи "x_1",..., "x_n", "Q" і вихід "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$". При Q=1 він забезпечує одиничний сигнал на виході "$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$" тільки тоді, коли на усіх його входах "x_1",..., "x_n" одночасно є нульові сигнали.

Група 4. Для змінних множини X при $n \geq 1$ (таблиця 4)[4]:

а) $f_{13}(X,Q)$=$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\coprod}} x_i$ – елементарна функція "Константа 0", причому

$$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\coprod}} x_i = Q^*(\coprod x_1 \coprod x_2 \dots \coprod x_n)$$

і при n=1 ($\exists\, f_{13}(x_1,Q)$=$Q^* \coprod x_1$), а булева формула вигляду

$$Q^*(\coprod x_1 \coprod x_2 \dots \coprod x_n)$$

може розглядатись як єдине ціле (раціональніший варіант) або як, наприклад, формула вигляду

$$Q^*((...(((\coprod x_1) \coprod x_2) \coprod x_3) \dots) \coprod x_n).$$

Ця булева формула містить істотні змінні $x_1,\dots, x_n$, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "$\coprod$". Дану функцію реалізує логічний елемент "КОНСТАНТА 0" (рис.3б),

---

4 Згідно із визначеннями в [1,3,11], змінні множини X у класичних елементарних функціях "Константа 0" і "Константа 1" неістотні, тобто вони тільки фіктивні змінні. При цьому їх булеві формули такі: $f_{13}(X)$=0 – "Константа 0", $f_{14}(X)$=1 – "Константа 1". Але ці визначення і булеві формули – неправильні, що доведено в [9].

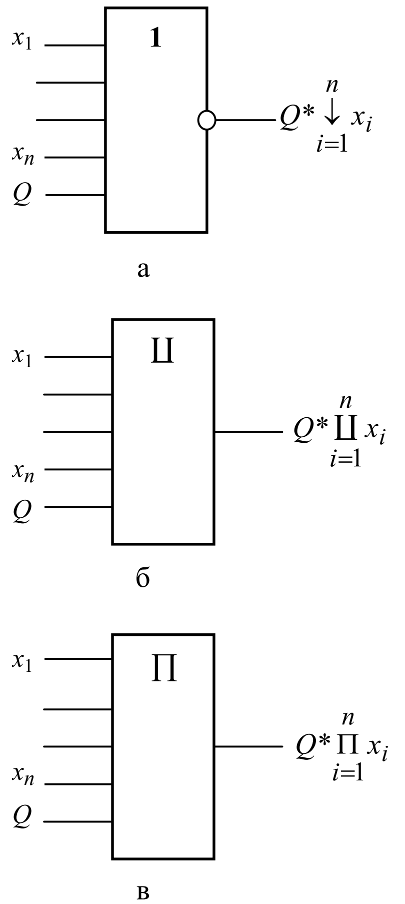

Рис.3. Логічні елементи. АБО-НЕ (а), КОНСТАНТА 0 (б), КОНСТАНТА 1 (в).

Таблиця 4. Істинність для елементарних функцій "Константа 0" і "Константа 1".

$x_1,\ldots,x_{n-1},x_n, Q$	$Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i$	$Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i$
0,…,0,0,1	0	1
0,…,0,1,1	0	1
0,…,1,0,1	0	1
0,…,1,1,1	0	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
1,…,1,0,1	0	1
1,…,1,1,1	0	1

який містить входи "x_1",..., "x_n", "Q" і вихід "$Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i$". При Q=1 на виході "$Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i$" присутній постійно нульовий сигнал незалежно від одиничних і нульових сигналів на входах "x_1",..., "x_n";

б) $f_{14}(X,Q)=Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i$ – елементарна функція "Константа 1", причому

$$Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i = Q^*(\Pi x_1\ \Pi x_2 \ldots \Pi x_n),$$

і при n=1 ($\exists\, f_{14}(X,Q)=Q^*\,\Pi x_1$), а булева формула вигляду

$$Q^*(\Pi x_1\ \Pi x_2 \ldots \Pi x_n)$$

може також розглядатись як єдине ціле (раціональніший варіант) або як, наприклад, формула вигляду

$$Q^*((...(((\Pi x_1)\ \Pi x_2)\ \Pi x_3)\ldots)\,\Pi x_n).$$

Ця булева формула містить істотні змінні $x_1,\ldots, x_n$, які зустрічаються в ній тільки по одному разу, і пропозиційну зв'язку "П". Таку функцію реалізує логічний елемент "КОНСТАНТА 1" (рис.3в), який містить входи "x_1",..., "x_n", "Q" і вихід "$Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i$".

При Q=1 на виході "$Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i$" є постійно одиничний сигнал незалежно від одиничних і нульових сигналів на входах "x_1",..., "x_n".

Опис елементарних функцій по групах завершено.

У булевих формулах елементарних функцій із множини {$Q^*\lrcorner x_1$, $Q^*\neg x_1$, $Q^*(x_1\to x_2)$, $Q^*(x_1\leftarrow x_2)$, $Q^*(x_1\not\to x_2)$, $Q^*(x_1\not\leftarrow x_2)$, $Q^*\bigvee_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\bigwedge_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\leftrightarrow_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\leftarrow\!\mapsto_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\downarrow_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\,\mathrm{I}_{i=1}^{n}x_i$} змінні істотні і кожна з цих змінних зустрічається не більше одного разу. У цих формулах для кожної елементарної функції використовується відповідна пропозиційна зв'язка з множини {$\lrcorner$, $\neg$, $\to$, $\leftarrow$, $\not\to$, $\not\leftarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\coprod$, $\leftarrow\!\mapsto$, П, $\downarrow$, I}, а технічна реалізація наведених елементарних функцій здійснюється відповідними логічними елементами з множини {ПОВТОРЕННЯ, НЕ, ІМПЛІКАЦІЯ, "ОБЕРНЕНА ІМПЛІКАЦІЯ", ЗАБОРОНА, "ОБЕРНЕНА ЗАБОРОНА", АБО, І, ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ, "КОНСТАНТА 0", "ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ-НЕ", "КОНСТАНТА 1", "АБО-НЕ", "І-НЕ"}. Тому перелічені булеві функції відповідають визначенню 1 і є елементарними функціями некласичної двозначної алгебри логіки.

Необхідно відзначити, що значення кожної функції з множини {$Q^*\neg x_1$, $Q^*(x_1\leftarrow x_2)$, $Q^*\leftrightarrow_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\bigvee_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\bigwedge_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i$, $Q^*(x_1\to x_2)$} – інверсні по відношенню до значень відповідної функції множини $\{Q^*\neg x_1,\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i,\ Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)\}$ при однакових наборах значень змінних. Наприклад, функції $Q^*\neg x_1$, і $Q^*\lrcorner x_1$, (таблиця 1), $Q^*(x_1\rightarrow x_2)$ і $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$ (таблиця 2), $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$ (таблиця 3), тощо. Внаслідок такої властивості функцій пропозиційні зв'язки з множини $\{\lrcorner,\ \nrightarrow,\ \nleftarrow,\ \leftarrow\!\mapsto,\ \downarrow,\ \mathrm{I},\ \Pi\}$ можна називати ще у некласичній двозначній алгебрі логіки антизв'язками по відношенню до відповідних зв'язок з множини $\{\neg,\ \rightarrow,\ \leftarrow,\ \leftrightarrow,\ \vee,\ \wedge,\ \coprod\}$. Разом з тим, у некласичній двозначній алгебрі логіки кожну зв'язку з множини $\{\rightarrow,\ \leftarrow,\ \nrightarrow,\ \nleftarrow,\ \leftrightarrow,\ \leftarrow\!\mapsto,\ \vee,\ \wedge,\ \downarrow,\ \mathrm{I}\}$ можна називати ще бінарною зв'язкою, адже для двох змінних, наприклад, x_1 і x_2 існують відповідні елементарні функції з множини $\{Q^*(x_1\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1\leftarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow\!\mapsto x_2),\ Q^*(x_1 \vee x_2),\ Q^*(x_1 \wedge x_2),\ Q^*(x_1\downarrow x_2),\ Q^*(x_1\ \mathrm{I}\ x_2)\}$. Окрім того, кожну ж зв'язку з множини $\{\lrcorner,\ \neg,\ \coprod,\ \Pi\}$ можна називати ще унарною зв'язкою, тому що для однієї змінної, наприклад x_1, існують елементарні функції з множини $\{Q^*\lrcorner x_1,\ Q^*\neg x_1,\ Q^*\coprod x_1,\ Q^*\Pi x_1\}$. При цьому, з метою спрощення булевих формул елементарних функцій, з множини

$$\{Q^*\lrcorner x_1,\ Q^*(x_1\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1\leftarrow x_2),$$
$$Q^*\lrcorner x_1,\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),$$
$$Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,$$
$$Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i,\ Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i\} \quad (1)$$

можна наводити їх булеві формули без середовища Q реалізації у вигляді функцій з множини

$$\{\lrcorner x_1,\ x_1\rightarrow x_2,\ x_1\leftarrow x_2,\ \neg x_1,\ x_1 \nrightarrow x_2,$$
$$x_1 \nleftarrow x_2,\ \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i,\ \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i,\ \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,$$
$$\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i,\ \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i,\ \coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i\}, \quad (2)$$

або тільки їх відповідні зв'язки з множини

$$\{\lrcorner,\ \rightarrow,\ \leftarrow,\ \neg,\ \nrightarrow,\ \nleftarrow,\ \leftrightarrow,$$
$$\leftarrow\!\mapsto,\ \vee,\ \wedge,\ \mathrm{I},\ \downarrow,\ \coprod,\ \Pi\}, \quad (3)$$

розуміючи під булевими формулами множини (2) і під зв'язками множини (3) функції множини (1).

Окрім того, в обчислювальній техніці при зображенні логічних елементів, що реалізують ці чотирнадцять елементарних функцій, можна не вказувати, з метою спрощення, джерело живлення Q, розуміючи, що ці елементи функціонують тільки при ввімкненому джерелі живлення (тобто при Q=1).

Прикладом складної булевої функції, як випливає з визначення 2, є будь-яка функція некласичної двозначної алгебри логіки, яка описується і реалізується за допомогою елементарних функцій, кількість яких не менша двох. Наприклад, булева функція від трьох змінних x_1, x_2 і x_3, вигляду

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge x_2\wedge x_3\vee x_1\rightarrow x_2$$

(з метою спрощення запису даної функції середовище її реалізації не вказується) складна, тому що описується за допомогою трьох елементарних функцій (Кон'юнкція, Диз'юнкція і Імплікація), а її технічна реалізація здійснюється трьома логічними елементами (І, АБО, ІМПЛІКАЦІЯ).

Після проведеної вище систематизації чотирнадцяти елементарних функцій некласичної двозначної алгебри логіки виникає запитання: "А чи усі елементарні функції систематизовано?"

Відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема. У некласичній двозначній алгебрі логіки кількість елементарних функцій для n змінних множини X, де n>1, дорівнює чотирнадцять.

Доведення. Припустимо, що у некласичній двозначній алгебрі логіки кількість елементарних функцій для n змінних множини X, де n>1, не дорівнює чотирнадцяти. Але для двох змінних, наприклад, x_1 і x_2 кількість булевих функцій дорівнює шістнадцяти (2^{2^2}=16). Це функції з множини $\{Q^*\lrcorner x_1,\ Q^*\neg x_1,\ Q^*\lrcorner x_2,\ Q^*\neg x_2,\ Q^*(x_1\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1\leftarrow x_2),\ Q^*(x_1\wedge x_2),\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^*(x_1\leftrightarrow x_2),\ Q^*(\Pi x_1\ \Pi x_2),\ Q^*(x_1\vee x_2),\ Q^*(x_1\downarrow x_2),\ Q^*(x_1\leftarrow\!\mapsto x_2),\ Q^*(x_1\,\mathrm{I}\,x_2),\ Q^*(\coprod x_1\ \coprod x_2)\}$, тобто розглянуті:

а) для змінної x_1 – елементарні функції Повторення і Заперечення;

б) для змінної x_2 – елементарні функції Повторення і Заперечення;

в) для змінних x_1 і x_2 – елементарні функції Імплікація, "Обернена імплікація", Кон'юнкція, Антиімплікація, "Обернена антиімплікація", Еквiвалентність, "Константа 1", Диз'юнкція, "Стрілка Пірса", Антиеквівалентність, "Штрих Шефера" і "Константа 0".

Кількість різновидів цих елементарних функцій дорівнює чотирнадцяти, що не відповідає початковому припущенню.

Для трьох змінних, наприклад, x_1, x_2 і x_3 кількість булевих функцій дорівнює двісті п'ятдесят шість (2^{2^3} =256). З них можна також виділити систематизовані чотирнадцять різновидів елементарних функцій з множини $\{Q^{*}\lrcorner x_1$, $Q^{*}\neg x_1$, $Q^{*}\lrcorner x_2$, $Q^{*}\neg x_2$, $Q^{*}(x_1\rightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1\leftarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1\nrightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1\nleftarrow x_2)$, $Q^{*}\overset{3}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^{*}\overset{3}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^{*}\bigvee_{i=1}^{3} x_i$, $Q^{*}\bigwedge_{i=1}^{3} x_i$, $Q^{*}\overset{3}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^{*}\overset{3}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^{*}\coprod_{i=1}^{3} x_i$, $Q^{*}\prod_{i=1}^{3} x_i\}$, що знову не відповідає початковому припущенню.

Аналогічно для n змінних множини X, де n>3, кількість булевих функцій дорівнює 2^{2^n}. З них можна також виділити систематизовані чотирнадцять різновидностей елементарних функцій з множини $\{Q^{*}\lrcorner x_1$, $Q^{*}\neg x_1$, $Q^{*}\lrcorner x_2$, $Q^{*}\neg x_2$, $Q^{*}(x_1\rightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1\leftarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1\nrightarrow x_2)$, $Q^{*}(x_1\nleftarrow x_2)$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$, $Q^{*}\bigvee_{i=1}^{n} x_i$, $Q^{*}\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q^{*}\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^{*}\coprod_{i=1}^{n} x_i$, $Q^{*}\prod_{i=1}^{n} x_i\}$, що також не відповідатиме початковому припущенню. Теорема доведена.

Отже, у некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки із врахуванням середовища реалізації) кількість елементарних функцій дорівнює чотирнадцять. Це елементарні функції Повторення, Заперечення, Імплікація, "Обернена імплікація", Антиімплікація, "Обернена антиімплікація", Еквівалентність, Антиеквівалентність, Диз'юнкція, Кон'юнкція, "Штрих Шефера", "Стрілка Пірса", "Константа 0" і "Константа 1". Кожна з цих функцій зображається відповідною таблицею істинності, булевою формулою і технічно реалізується за допомогою окремого логічного елемента.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. - М: Наука, гл. ред. физ-мат. лит, 1986.
2. *Данилов Р.В., Ельцова С.А., Иванов Ю. и др.* Применение интегральных микросхем в электронной вычислительной технике. Справочник / Под ред. Б.Файзулаева, В.Тарабрина.- М.: Радио и связь,1986.
3. *Цейтлін Г.О.* Алгебра логіки та конструювання програм. Елементи дискретної математики. - Київ: Наукова думка, 1994.
4. *Дуда М.А.* Применение элементарных функций в алгебре логики / Тернополь, 1989. - Деп. в УкрНИИНТИ 05.11.89, №2499-Ук89.
5. *Дуда М.А.* Применение элементарных функций Эквивалентность и Антиэквивалентность в наиболее простых полных системах алгебры логики / Тернополь, 1989. - Деп. в УкрНИИНТИ 15.12.89, №2954-Ук89.
6. А.с. №414591 (СССР). Устройство для сравнения кодов / *М.А.Дуда* // Открытия. Изобретения. - 1974. - №5.
7. А.с. №441669 (СССР). Цифровой элемент сравнения / *М.А.Дуда* // Открытия. Изобретения. - 1974. - №32.
8. *Дуда О.М., Дуда М.О.* Змінні та функції в середовищі реалізації двозначної алгебри логіки // Вісник Тернопільського державного технічного університету ім. Івана Пулюя. Том 4. №1. Тернопіль, 1999. - С.62-69.
9. *Дуда О.М., Дуда М.О., Бубняк М.М.* Використання теорії про істотні та фіктивні змінні в булевих і лінійних функціях // Вісник Тернопільського державного технічного університету ім. Івана Пулюя. Том 4. №2. Тернопіль, 1999. - С.5-11.
10. *Дуда О.М., Дуда М.О., Чірка М.І., Ніконенко В.В.* Визначення множини замкнених класів, що достатня для повної характеристики елементарних функцій в некласичній двозначній алгебрі логіки // Науково-технічний журнал "Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы". - 2000. - №1. - С.80-90.
11. *Гаврилов Г.П.* Функциональные системы дискретной математики. Текст лекций. - М.: Изд-во Московского ун-та, 1985.
12. *Дуда М.О.* Неправильність класичної теорії двозначної алгебри логіки про функціональну повноту (проблемна стаття) // Науково-технічний журнал "Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы". - 1999. - №2. - С.176-180.
13. *Дуда М.О., Дуда О.М.* Про доцільність використання в курсі "Дискретна математика" нової теорії про функціональну повноту // Тези другої української науково-методичної конференції "Використання персональних ЕОМ в навчальному процесі вищого навчального закладу", 17-19 листопада 1993, Львівський університет. - Львів, 1993. - С.49-51.