УДК 539.101:538.3

© 2001р. А.В. Константинович, С.В. Мельничук, І.А. Константинович

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК.

І. ЗАПІЗНЮЮЧІ І ВИПЕРЕДЖАЮЧІ ПОТЕНЦІАЛИ ТА НАПРУЖЕНОСТІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ І МЕТОД СИЛИ САМОДІЇ ЛОРЕНЦА

Дана робота є узагальненням і подальшим розвитком досліджень авторів в області випромінювання заряджених частинок, що рухаються в електромагнітних полях, у ізотропних непоглинаючих середовищах і у вакуумі. Отримано інтегральні вирази для запізнюючих і випереджаючих потенціалів та напруженостей електричного і магнітного полів у середовищах. Методом сили самодії Лоренца досліджені миттєва і середня потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються вздовж довільної траєкторії у непоглинаючому ізотропному середовищі і у вакуумі.

The work is the generalization and further development of the studies of the authors in the field of the radiation of charged particles moving in electromagnetic fields in nonabsorbablee isotropic medium and vacuum. The integral expressions for retarded and advanced potentials and intensities of electric and magnetic fields in media are obtained. The expressions of the momentary and average radiation power of the charged particles moving on an arbitrary trajectory in nonabsorbable isotropic medium and vacuum are studied by using the Lorentz's self-interaction method.

Вступ

Одним з нерозв'язаних питань класичної теорії заряджених частинок є дослідження впливу її власного електромагнітного поля на закон руху і на величину потужності випромінюваної енергії. Послідовне дослідження цього питання повинно включати розгляд структури електрона і його власного поля. Перша спроба такого дослідження на основі чисто електромагнітної моделі зарядженої частинки запропонована Абрагамом (1903) і Лоренцом (1904) [1].

У методі сили самодії Лоренца вирази для сили реакції випромінювання і електромагнітної маси електрона, які входять у нерелятивістські рівняння руху Абрагама-Лоренца, розраховують за допомогою запізнюючих потенціалів [1-3]. Очевидні недоліки підходу Абрагама-Лоренца – нерелятивістська природа моделі і той факт, що чисто електромагнітна маса електрона входить у рівняння руху із невірним коефіцієнтом $\frac{4}{3}m_{el}$.

Сили притягання, які описують натяги Пуанкаре, повинні компенсувати електростатичні сили відштовхування, щоб забезпечити стійкість зарядженої частинки [1,3]. Проблема полягає у тому, що натяги Пуанкаре неможливо безпосередньо ввести у рівняння електродинаміки, а також у гамільтоніан [4].

Дірак, виходячи з ряду гіпотез [5], побудував новий варіант класичної релятивістської теорії точкового електрона. Реакцію випромінювання Дірак визначив, використовуючи у розрахунках напіврізницю запізнюючих і випереджаючих потенціалів. Електромагнітна маса електрона перетворюється у нуль (m_{el}=0), якщо електромагнітне поле визначається через напіврізницю запізнюючих і випереджаючих потенціалів. При довільних інших комбінаціях (лише запізнюючі, лише випереджаючі, напівсума запізнюючих і випереджаючих потенціалів) власна польова маса точкової частинки перетворюється у нескінченність.

Отже, можна розглядати такі електродинаміки:

1) електродинаміка запізнюючих взаємодій,
2) електродинаміка випереджаючих взаємодій,
3) електродинаміка напівсуми запізнюючих і випереджаючих взаємодій (електродинаміка Уілера-Фейнмана),
4) електродинаміка напіврізниці запізнюючих і випереджаючих взаємодій (електродинаміка Дірака).

У методі біполя Соколова [2,4] із запізнюючого поля відраховується напівсума запізнюючого і випереджаючого полів, щоб прийти до гіпотези Дірака [5], тобто до гіпотези непольової маси.

На важливість використання випереджаючих потенціалів і гіпотези Дірака [5] у класичній теорії точкового електрона вказують автори досліджень [6-10] і автори інших робіт. Ці дослідження мають важливе значення для встановлення послідовної вільної від розбіжностей класичної електродинаміки [5, 9-10]

За результатами праці [11], система зарядів, які рухаються і описуються тільки запізнюючими потенціалами, повинна випромінювати завжди, а система, яка описується випереджаючими потенціалами, повинна завжди поглинати. Обмін енергії між зарядами і полем в обох напрямках може бути описаний тільки при одночасному використанні як запізнюючих, так і випереджаючих потенціалів. Автор праці [11] доходить висновку, що у рамках класичної електродинаміки зарядів, зокрема, можливі стаціонарні електронні орбіти.

У праці [12] відкидається точка зору, згідно з якою випереджаючі потенціали порушують наші уявлення про причинність і внаслідок цього не можуть бути використані для опису реальних явищ. Основний висновок праці [12] виражається у формулюванні, згідно з яким запізнюючі розв'язки визначають хвилю, яка генерується даним джерелом і виходить із системи, а випереджаючі розв'язки хвилю, яка встановлюється системою струмів або зарядів і входить у систему.

Застосований у працях [13-26] метод сили самодії, в якому власне електричне поле визначається через напіврізницю запізнюючих і випереджаючих потенціалів (гіпотеза Дірака), дозволив розрахувати роботу сили самодії за одиницю часу як у вакуумі, так і в ізотропних непоглинаючих середовищах.

Проведені дослідження показали, що дія на заряджену частинку поля, яке визначається згідно з гіпотезою Дірака, зумовлює два ефекти: випромінювання електромагнітних хвиль і появу енергії прискорення [13,24].

Поняття енергії прискорення вперше ввів Шотт (1912) при дослідженні декількох конкретних видів руху, у тому числі при русі в постійному електричному полі, коли швидкість заряду завжди паралельна полю (при гіперболічному русі) [1,3, 27-29]. При гіперболічному русі згідно з Шоттом енергія випромінювання повністю отримується із енергії прискорення [27-28].

Дана робота є узагальненням і подальшим розвитком методу сили самодії Лоренца, розробленого у [14-26], для дослідження спектрально-кутових і спектральних розподілів випромінювання заряджених частинок, які рухаються в електромагнітних полях в ізотропних непоглинаючих середовищах і у вакуумі. Послідовно досліджено запізнюючі і випереджаючі потенціали і поля заряджених частинок, що рухаються в електромагнітних полях у ізотропних непоглинаючих середовищах і розглянуто інші важливі питання класичної електродинаміки.

Запізнюючі і випереджаючі потенціали та поля у ізотропних непоглинаючих середовищах

Власні електромагнітні поля заряджених частинок можна визначити, знаходячи розв'язки рівнянь Максвела при заданих граничних і початкових умовах. Виходимо із рівнянь Максвела для середовищ [1], записаних у системі СГС:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{4}$$

Система рівнянь Максвела для середовища буде визначеною, якщо відома залежність між вектором індукції електричного поля $\vec{D}$ і напруженістю електричного поля $\vec{E}$, між вектором індукції магнітного поля $\vec{B}$ і напруженістю магнітного поля $\vec{H}$. Щоб описати електричний стан речовини, необхідно поряд з полями ввести ще дві функції координат і часу: густину заряду ρ та густину струму $\vec{j}$. Якщо швидкість заряду в деякий момент часу $\vec{V}$, тоді густина струму дорівнює

$$\vec{j} = \rho\vec{V}. \tag{5}$$

З рівнянь Максвела (1), (2) легко вивести рівняння неперервності

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

З іншого боку, рух заряджених частинок у заданому електромагнітному полі визначається густиною сили Лоренца

$$\vec{k} = \rho\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}\times\vec{B}]\right\}, \tag{7}$$

де $\vec{k}$ – густина сили, яка діє на густину заряду ρ, c – швидкість світла у вакуумі.

У релятивістській динаміці рівняння руху зарядженої частинки набуває такого вигляду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\int \vec{p}_0\, d\vec{r}=\int\left\{\rho(\vec{E}+c^{-1}[\vec{V}\times\vec{B}])\right\}d\vec{r}\,, \quad (8)$$

де $\vec{p}$ – релятивістський імпульс частинки. Розіб'ємо повне електромагнітне поле на власне $\vec{E}^{self}$, $\vec{B}^{self}$ і зовнішнє $\vec{E}^{ext}$, $\vec{B}^{ext}$ [1]:

$$\vec{E}=\vec{E}^{self}+\vec{E}^{ext}, \quad \vec{B}=\vec{B}^{self}+\vec{B}^{ext}. \quad (9)$$

Вибір власного поля у співвідношеннях (8), (9) зумовлює величину польової маси зарядженої частинки і вигляд сили радіаційного тертя у рівняннях руху [1-5].

Рівняння руху точкової зарядженої частинки отримують з (8), якщо $\rho(\vec{r},t)=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_p(t))$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q\left\{\left(\vec{E}^{self}+\vec{E}^{ext}\right)+c^{-1}\left[\vec{V}\times\left(\vec{B}^{self}+\vec{B}^{ext}\right)\right]\right\}, \quad (10)$$

де $\vec{p}=\dfrac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. (11)

Тут q – заряд частинки, m_0 – маса спокою частинки, $\vec{r}_p(t)$ – закон руху точкової зарядженої частинки.

Якщо втрати енергії зарядженої частинки на випромінювання малі у порівнянні з її власною енергією, тоді власними полями у рівняннях руху можна знехтувати і вони набувають вигляду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q\left\{\vec{E}^{ext}+c^{-1}[\vec{V}\times\vec{B}^{ext}]\right\}. \quad (12)$$

Рівняння руху (12) дозволяють отримати закон руху зарядженої частинки, який, у свою чергу, дозволяє задати функції джерел $\vec{j}(\vec{r},t)$ і $\rho(\vec{r},t)$ у рівняннях Максвела.

Власне електромагнітне поле заряджених частинок, які рухаються у нескінченному просторі, визначимо, розв'язавши рівняння Максвела методом перетворень Фур'є. Запишемо багатовимірні перетворення Фур'є, які задають зв'язок між простором оригіналів на $\{\vec{r},t\}$ і простором зображень на $\{\vec{k},\omega\}$:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\vec{E}(\vec{k},\omega)\exp\left(i\vec{k}\vec{r}-i\omega t\right), \quad (13)$$

$$\vec{E}(\vec{k},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\vec{E}\left(\vec{r}\,',t'\right)\exp\left(-i\vec{k}\vec{r}\,'+i\omega t'\right), \quad (14)$$

а для $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$, ρ, $\vec{j}$ перетворення Фур'є визначаються через (13) і (14), тільки $\vec{E}$ треба кожного разу замінювати відповідною величиною, $\vec{k}$ – хвильовий вектор, ω – циклічна частота.

Використовуючи повноту системи функцій $\exp\{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t\}$, запишемо рівняння Максвела у просторі зображень:

$$i\left[\vec{k}\times\vec{H}(\vec{k},\omega)\right]=\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega)-i\frac{\omega}{c}\vec{D}(\vec{k},\omega), \quad (15)$$

$$i\left(\vec{k}\vec{D}(\vec{k},\omega)\right)=4\pi\rho(\vec{k},\omega), \quad (16)$$

$$\left[\vec{k}\times\vec{E}(\vec{k},\omega)\right]=\frac{\omega}{c}\vec{B}(\vec{k},\omega), \quad (17)$$

$$\left(\vec{k}\vec{B}(\vec{k},\omega)\right)=0. \quad (18)$$

Рівняння зв'язку між векторами електричної і магнітної індукції і напруженостями електричного й магнітного полів відповідно для неоднорідних ізотропних середовищ у просторі зображень з урахуванням дисперсії можна записати у вигляді:

$$\vec{D}(\vec{k},\omega)=\varepsilon(\vec{k},\omega)\vec{E}(\vec{k},\omega), \quad (19)$$

$$\vec{B}(\vec{k},\omega)=\mu(\vec{k},\omega)\vec{H}(\vec{k},\omega), \quad (20)$$

де ε – діелектрична проникність, μ – магнітна проникність.

Рівняння (1)-(4), (15)-(20) справедливі для випадку, коли середовища, які знаходяться в електромагнітному полі, нерухомі, а величини ε і μ не залежать від векторів поля.

Введемо потенціали

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (21)$$

Запишемо рівняння (21) у просторі $\{\vec{k},\omega\}$

$$\vec{B}(\vec{k},\omega)=i[\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k},\omega)], \quad (22)$$

$$\vec{E}(\vec{k},\omega)=-i\vec{k}\varphi(\vec{k},\omega)+i\frac{\omega}{c}\vec{A}(\vec{k},\omega). \quad (23)$$

Врахуємо співвідношення (22)-(23) і умову калібровки Лоренца у просторі зображень

$$\vec{k}\vec{A}(\vec{k},\omega)-\frac{\varepsilon(\vec{k},\omega)\mu(\vec{k},\omega)}{c}\omega\varphi(\vec{k},\omega)=0. \quad (24)$$

Тоді для випадку ізотропного неоднорідного непоглинаючого безмежного середовища запізнюючі і випереджаючі потенціали, з урахуванням частотної і просторової дисперсій, після ряду перетворень, аналогічних проведеним у праці [1], запишуться у такому вигляді:

$$\varphi^{ret,adv}\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\vec k,\omega)}\frac{\exp\left\{i\vec k(\vec r-\vec r\,')-i\omega(t-t')\right\}}{k^2-\dfrac{n^2(\vec k,\omega)}{c^2}(\omega\pm i\alpha)^2}, \qquad (25)$$

$$\vec A^{ret,adv}(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec k\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\mu(\vec k,\omega)\times$$

$$\times\frac{\vec j(\vec r\,',t')}{c}\frac{\exp\left\{i\vec k(\vec r-\vec r\,')-i\omega(t-t')\right\}}{k^2-\dfrac{n^2(\vec k,\omega)}{c^2}(\omega\pm i\alpha)^2}. \qquad (26)$$

Тут α – нескінченно мала величина, яка перетворюється у нуль після розрахунку інтегралу, $n(\vec k,\omega)=\sqrt{\varepsilon(\vec k,\omega)\mu(\vec k,\omega)}$.

Запізнюючі і випереджаючі потенціали електромагнітного поля в однорідному ізотропному непоглинаючому середовищі при врахуванні частотної дисперсії можна переписати у вигляді:

$$\left\{\varphi^{ret,adv}(\vec r,t),\,\vec A^{ret,adv}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec k\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times\left[\left(\omega\pm i\alpha+\frac{kc}{n(\omega)}\right)^{-1}-\left(\omega\pm i\alpha-\frac{kc}{n(\omega)}\right)^{-1}\right]\times$$

$$\times\frac{c}{2n(\omega)k}\exp\left[i\vec k(\vec r-\vec r\,')-i\omega(t-t')\right]. \qquad (27)$$

Для однорідних середовищ, враховуючи парність і плавність залежності функцій $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ і $n(\omega)$ від частоти, проінтегруємо по частоті методом теорії лишків [1,30]. Для запізнюючих потенціалів замкнемо контур C^{ret} у нижній напівплощині комплексної площини ω (рис.1). Для випадку, коли $\mathrm{Re}\{i\omega(t'-t)\}<0$ при $t>t'$ інтеграл по нескінченному напівколу у нижній напівплощині не робить внеску [1,30].

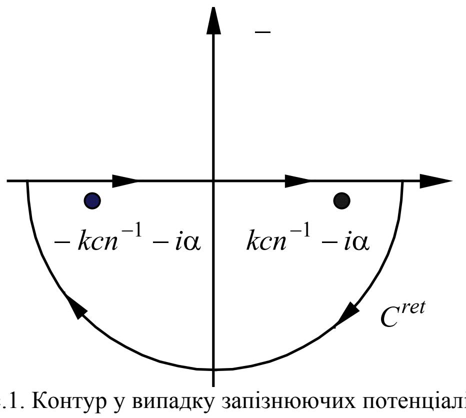

Рис.1. Контур у випадку запізнюючих потенціалів.

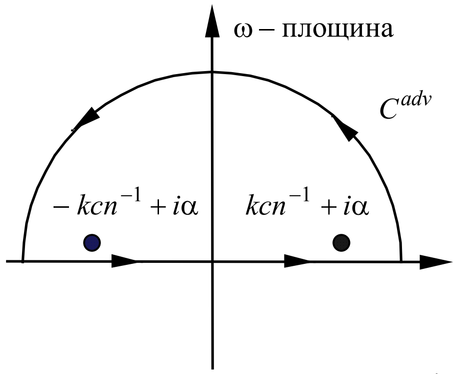

Рис.2. Контур у випадку випереджаючих потенціалів.

У випадку випереджаючих потенціалів замкнемо контур у верхній напівплощині комплексної площини ω (рис.2). Для випадку $\mathrm{Re}\{i\omega(t'-t)\}>0$ при $t'>t$ інтеграл по нескінченному напівколу у верхній напівплощині ω не робить внеску [1,30].

Тоді після використання методу теорії лишків [30] при інтегруванні по ω вирази запізнюючих і випереджаючих потенціалів можуть бути подані у вигляді:

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec r,t),\vec A^{ret}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec k\frac{c}{n[\omega(k)]k}\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r,t)}{\varepsilon(\omega(k))},\frac{\mu(\omega(k))\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times\exp\left[i\vec k(\vec r-\vec r\,')\right]\sin\left[\frac{kc}{n[\omega(k)]}(t-t')\right], \qquad (28)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec r,t),\vec A^{adv}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int\limits_{t}^{\infty}dt'\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec k\frac{c}{n[\omega(k)]k}\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega(k))},\frac{\mu(\omega(k))\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times\exp\left[i\vec k(\vec r-\vec r\,')\right]\sin\left[\frac{kc}{n[\omega(k)]}(t'-t)\right]. \qquad (29)$$

Перейдемо до сферичної системи координат:

$$k_x=k\sin\theta\cos\varphi,\quad k_y=k\sin\theta\sin\varphi, \qquad (30)$$

$$k_z=k\cos\theta,\qquad k=\frac{n(\omega)}{c}\omega. \qquad (31)$$

Тоді перепишемо запізнюючі і випереджаючі потенціали у вигляді:

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec r,t),\vec A^{ret}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}d\theta\sin\theta\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\big(\cos\varphi(x-x')+\sin\varphi(y-y')\big)\right]\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t-t'), \quad (32)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec r,t),\vec A^{adv}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_t^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\big(\cos\varphi(x-x')+\sin\varphi(y-y')\big)\right]\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t'-t). \quad (33)$$

Проінтегруємо вирази (32) і (33) по φ, використовуючи співвідношення для функції Бесселя цілочисельного індексу [31]:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\{a\cos\varphi+b\sin\varphi\}=2\pi J_0\left(\sqrt{a^2+b^2}\right), \quad (34)$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя нульового індексу. Тоді отримаємо

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec r,t),\vec A^{ret}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t-t'), \quad (35)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec r,t),\vec A^{adv}(\vec r,t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_t^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t'-t). \quad (36)$$

Проінтегруємо співвідношення (35) і (36) по θ за допомогою співвідношення для функцій Бесселя цілочисельного індексу [31]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta J_0(\alpha\sin\theta)\cos(\beta\cos\theta)=\frac{\sin\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \quad (37)$$

Тоді

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec r,t),\vec A^{ret}(\vec r,t)\right\}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times|\vec r-\vec r\,'|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec r-\vec r\,'|\right)\sin\omega(t-t'), \quad (38)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec r,t),\vec A^{adv}(\vec r,t)\right\}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_t^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times|\vec r-\vec r\,'|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec r-\vec r\,'|\right)\sin\omega(t'-t). \quad (39)$$

Використовуючи співвідношення (21), (38) і (39), запишемо вирази для запізнюючих і випереджаючих напруженостей електричного поля і векторів магнітної індукції:

$$\vec E^{ret}(\vec r,t)=-\frac{2}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\omega\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{|\vec r-\vec r\,'|}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec r-\vec r\,'|\right)\cos\omega(t-t')+\right.$$

$$+\sin\omega(t-t')\frac{c^2\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)}\frac{(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^2}\times$$

$$\times\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}\cos\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec r-\vec r\,'|\right)-\right.$$

$$\left.\left.-|\vec r-\vec r\,'|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec r-\vec r\,'|\right)\right]\right\}, \quad (40)$$

$$\vec E^{adv}(\vec r,t)=\frac{2}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec r\,'\int_t^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\omega\mu(\omega)\vec j(\vec r\,',t')}{|\vec r-\vec r\,'|}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec r-\vec r\,'|\right)\cos\omega(t-t')-\right.$$

$$-\sin\omega(t'-t)\frac{c^2\rho(\vec r\,',t')}{\varepsilon(\omega)}\frac{(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^2}\times$$

$$\times\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}\cos\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\right]\right\}, \qquad (41)$$

$$\vec{B}^{ret}(\vec{r},t)=\frac{2}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\mu(\omega)\left[(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\vec{j}(\vec{r}\,',t')\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{2}}\sin\omega(t-t')\times\right.$$

$$\times\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}\cos\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\right]\right\}, \qquad (42)$$

$$\vec{B}^{adv}(\vec{r},t)=\frac{2}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{t}^{t\infty}dt'\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\mu(\omega)\left[(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\vec{j}(\vec{r}\,',t')\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{2}}\sin\omega(t'-t)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}\cos\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\right]\right\}. \qquad (43)$$

Розглянемо випадок, коли діелектрична і магнітна проникності постійні величини. Тоді, інтегруючи у (38) і (39) по частоті, отримаємо

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec{r},t),\vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{\varepsilon},\frac{\mu\vec{j}(\vec{r}\,',t')}{c}\right\}\frac{\delta\left\{t'-t+\frac{n}{c}\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right\}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}, \qquad (44)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec{r},t),\vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{t}^{\infty}dt'\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{\varepsilon},\frac{\mu\vec{j}(\vec{r}\,',t')}{c}\right\}\frac{\delta\left\{t'-t-\frac{n}{c}\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right\}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}. \qquad (45)$$

Точковому заряду, який знаходиться у точці з радіус-вектором $\vec{r}_p(t)$ і рухається зі швидкістю $\vec{V}(t)$, відповідають розподіли зарядів і струмів:

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\vec{V}(t),\quad \rho(\vec{r},t)=q\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_p(t)\right). \qquad (46)$$

Для випадку точкових зарядів, які рухаються у вакуумі, співвідношення (44), (45) можна переписати у вигляді

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec{r},t),\vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=$$

$$=q\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\left\{1,\frac{\vec{V}(t')}{c}\right\}\frac{\delta[t'-t+c^{-1}\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|}, \qquad (47)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec{r},t),\vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=$$

$$=q\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\left\{1,\frac{\vec{V}(t')}{c}\right\}\frac{\delta[t'-t-c^{-1}\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|}. \qquad (48)$$

Використовуючи правило інтегрування з δ-функцією, аргумент якої є складною функцією змінної інтегрування [1,3]

$$\int g(x)\delta\left[f(x)-a\right]dx=\left[g(x)\left|\frac{df(x)}{dx}\right|^{-1}\right]_{f(x)=a}, \qquad (49)$$

отримаємо співвідношення для запізнюючих і випереджаючих потенціалів у вакуумі:

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec{r},t),\vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=q\left[\left\{1,\frac{\vec{V}(t')}{c}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|-\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right)}{c}\vec{V}(t')\right)^{-1}\right]_{t'=t-\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|}{c}}, \qquad (50)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec{r},t),\vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=q\left[\left\{1,\frac{\vec{V}(t')}{c}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|+\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right)}{c}\vec{V}(t')\right)^{-1}\right]_{t'=t+\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}_p(t')\right|}{c}}.$$

Запізнюючі потенціали точкової зарядженої частинки, визначені співвідношеннями (50), називаються потенціалами Лиєнара-Віхерта [1,3] і мають важливе значення у теорії випромінювання заряджених частинок.

Співвідношення (38) і (39) для запізнюючих і випереджаючих потенціалів можна переписати у вигляді:

$$\left\{\varphi^{ret}(\vec{r},t),\vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{0}^{\infty}d\xi\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t-\xi)}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}\,',t-\xi)}{c}\right\}\times$$

$$\times\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\sin\omega\xi, \qquad (52)$$

$$\left\{\varphi^{adv}(\vec{r},t),\vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{0}^{\infty}d\xi\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t+\xi)}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}\,',t+\xi)}{c}\right\}\times$$

$$\times\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\sin\omega\xi. \quad (53)$$

Потенціали в електродинаміці Дірака визначаються такими співвідношеннями [3-10, 13-26]:

$$\varphi^{Dir}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{ret}-\varphi^{adv}\right),\quad \vec{A}^{Dir}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}^{ret}-\vec{A}^{adv}\right). \quad (54)$$

Тоді отримаємо

$$\left\{\varphi^{Dir}(\vec{r},t),\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t-\xi)}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}\,',t-\xi)}{c}\right\}\times$$

$$\times\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\sin\omega\xi. \quad (55)$$

Потенціали в електродинаміці Уілера-Фейнмана визначаються співвідношеннями [32]:

$$\varphi^{WF}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{ret}+\varphi^{adv}\right),\quad \vec{A}^{WF}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}^{ret}+\vec{A}^{adv}\right), \quad (56)$$

$$\left\{\varphi^{WF}(\vec{r},t),\vec{A}^{WF}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{0}^{\infty}d\xi\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t-\xi)+\rho(\vec{r}\,',t+\xi)}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu\left(\vec{j}(\vec{r}\,',t-\xi)+\vec{j}(\vec{r}\,',t+\xi)\right)}{c}\right\}\times$$

$$\times\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^{-1}\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|\right)\sin\omega\xi. \quad (57)$$

Для подальшого розвитку класичної теорії випромінювання заряджених частинок важливе значення має порівняння електродинамік Дірака, Уілера-Фейнмана і інших підходів [33].

Миттєва і середня у часі потужності випромінювання заряджених частинок

Власне електромагнітне поле заряджених частинок, які рухаються у зовнішньому електромагнітному полі, зумовлює силу радіаційного тертя у рівняннях руху [1-5] і визначає втрати енергії цими частинками на випромінювання як в ізотропному непоглинаючому середовищі, так і у вакуумі [13-26]. Власне електромагнітне поле зарядженої частинки разом із зовнішнім полем діють на заряджену частинку, визначаючи закон руху частинки.

Робота сили самодії Лоренца за одиницю часу у непоглинаючому ізотропному середовищі і у вакуумі визначається за допомогою співвідношення [13-15, 20,24,26]:

$$P^{tot}(t)=-\int\limits_{\tau}\vec{j}(\vec{r},t)\vec{E}^{Dir}(\vec{r},t)d\vec{r}. \quad (58)$$

де τ – об'єм. $\vec{E}^{Dir}(\vec{r},t)$ – напруженість електричного поля, яка визначена через напіврізницю запізнюючих і випереджаючих потенціалів.

Миттєву потужність, зумовлену силою самодії Лоренца, можна виразити через потенціали

$$P^{tot}(t)=$$

$$=\int\limits_{\tau}\vec{j}(\vec{r},t)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)}{\partial t}+\operatorname{grad}\varphi^{Dir}(\vec{r},t)\right)d\vec{r}. \quad (59)$$

Проінтегрувавши співвідношення (59) по частинах, враховуючи, що потенціали на нескінченності дорівнюють нулю [13], знаходимо:

$$P^{tot}(\vec{r},t)=\int\limits_{\tau}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t)\varphi^{Dir}(\vec{r},t)\right)d\vec{r}. \quad (60)$$

Враховуючи рівняння неперервності

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}=0, \quad (61)$$

визначимо повну миттєву потужність, зумовлену силою самодії Лоренца $P^{tot}(t)$, через суму потужностей випромінюваної енергії $P^{rad}(t)$ та енергії прискорення $P^{acc}(t)$ [13,24]:

$$P^{tot}(t)=P^{rad}(t)+P^{acc}(t), \quad (62)$$

$$\dot{P}^{rad}(t)=\int\limits_{\tau}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}}{\partial t}-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi^{Dir}}{\partial t}\right)d\vec{r}, \quad (63)$$

$$P^{acc}(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau}\rho(\vec{r},t)\varphi^{Dir}(\vec{r},t)d\vec{r}. \quad (64)$$

Отже, у ізотропному непоглинаючому середовищі і у вакуумі, дія на заряджену частинку електричного поля, яке визначається згідно з гіпотезою Дірака, зумовлює два ефекти: випромінювання електромагнітних хвиль і появу енергії прискорення [13,24].

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_1(t,\omega,\theta,\varphi)$ заряджених частинок, з урахування співвідношення (32), (33), (63), набуває вигляду:

$$P^{rad}(t)=\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta d\theta W_1(t,\omega,\theta,\varphi), \quad (65)$$

$$W_1(t,\omega,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$

$$\times\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega(\sin\theta\cos\varphi(x-x')+\right.$$
$$\left.+\sin\theta\sin\varphi(y-y'))\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right]. \quad (66)$$

Миттєву потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_2(t,\omega,\theta)$, можна отримати, враховуючи співвідношення (35), (36), (63). Тоді знаходимо:

$$P^{rad}(t)=\int_0^\infty d\omega\int_0^\pi \sin\theta d\theta W_2(t,\omega,\theta), \quad (67)$$

$$W_2(t,\omega,\theta)=\frac{1}{2\pi c^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\times$$
$$\times J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right]. \quad (68)$$

Миттєву потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектральний розподіл потужності випромінювання $W_3(t,\omega)$, можна отримати, враховуючи співвідношення (38), (39), (63):

$$P^{rad}(t)=\int_0^\infty d\omega W_3(t,\omega), \quad (69)$$

$$W_3(t,\omega)=\frac{1}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega\mu(\omega)\times$$
$$\times|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1}\sin\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left\{\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right\}. \quad (70)$$

Вираз (70) збігається із виразами, отриманими у працях [34,35].

Співвідношення (66), (68), (70) дають можливість визначити спектрально-кутовий і спектральний розподіли миттєвої потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються по довільній траєкторії в електромагнітному полі у непоглинаючому ізотропному середовищі.

Середня у часі потужність випромінювання заряджених частинок визначається виразом [20, 24,26]

$$\overline{P}^{rad}=\overline{P}^{tot}=$$
$$=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\left(\int_\tau \vec{j}(\vec{r},t)\vec{E}^{Dir}(\vec{r},t)dr\right). \quad (71)$$

Співвідношення (71) можна перетворити до вигляду

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P^{rad}(t)dt=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\int_\tau\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)}{\partial t}-\right.$$
$$\left.-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi^{Dir}(\vec{r},t)}{\partial t}\right)d\vec{r}. \quad (72)$$

Співвідношення (71) і (72) вказують на те, що середнє у часі значення енергії прискорення за одиницю часу дорівнює нулю.

Середню потужність випромінювання заряджених частинок отримаємо, підставляючи миттєве значення потужності (65)-(70) у співвідношення (72). Тоді отримаємо результати праці [26], у якій за теорією лишків інтегрування ведеться по k_z. Отримані у даній роботі співвідношення (66), (68) для спектрально-кутових розподілів потужності випромінювання заряджених частинок після інтегрування по кутах приводять до співвідношення для спектрального розподілу потужності випромінювання $W_3(t,\omega)$, отриманого вперше Швінгером і іншими [34] методом теорії джерел. Співвідношення (66), (68), (70) для спектрально-кутових і спектрального розподілів потужності випромінювання заряджених частинок дають можливість досліджувати спектр випромінювання різноманітних розподілів заряджених частинок, у тому числі систем точкових заряджених частинок, які рухаються в електромагнітних полях, в ізотропному непоглинаючому середовищі і у вакуумі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.
2. *Лоренц Г.А.* Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. - М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956.
3. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля. - М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1951.
4. *Соколов А.А.* К классической теории элементарных частиц (точечный электрон) // Вестник Московского у-та. - 1947. - № 2. - С.33-48.
5. *Dirac P.A.M.* Classical Theory of Radiating Electrons

// Proc Roy.Soc.Ser.A. - 1938. - **167**, No.1. - P.148-169.
6. *Lopes J.L.*, *Schönberg M.* The Radiation Field of a Point Electron // Phys. Rev. - 1945. - **67**, No.3-4. - P.122-123.
7. *Schönberg M.* Classical Theory of the Point Electron // Phys Rev. - 1946. - **69**, No.5-6. - P.211-224.
8. *Gupta S.N.* On the Elimination of Divergencies from Classical Electrodynamics // Proc. Phys. Soc. Ser. A. - 1951. - **64**, No1. - P.50-53.
9. *Botric S.*, *Lyolyc K.* On the Self-Interaction in Classical Electrodynamics // Nuovo Cimento. Ser. B. - 1992. - **107**, No.1. - P.51-57.
10. *Botric S.* On the Separation of the Point Charge Field in Classical Electrodynamics // Nuovo Cimento. Ser. B. - 1996. - **111**, No.10. - P.1161-1172.
11. *Bomze J.* Über die Modlikeit der konservativen elektrischen Landungs-bewengungen mit nicht stationären Felden im Rahmen der classischen Electrodynamyk // Sitzungsber. Österr. Acad. Wiss. Math.-Naturwiss. K1. - 1956. - **165**, Abt.2, №8-10. - S.313-325.
12. *Heberle J.* Interpretation of the Advanced Potentials // Phys. Lett. Ser. A. - 1976. - **56**, No.2. - P.65-66.
13. *Schwinger J.* On the Classical Radiation of Accelerated Electrons // Phys. Rev. - 1949. - **75**, No.12. - P.1912-1925.
14. *Константинович А.В.*, *Ницович В.М.* Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // Известия высших учебных заведений. Физика. - 1973. - №2.- С.59-62.
15. *Константинович А.В.*, *Ніцович В.М.* Спектральний розподіл потужності випромінювання заряду, що рухається по спіралі в диспергуючому прозорому феродіелектрику // УФЖ. - 1973. - **18**, №5. - С.853-854.
16. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Об одной задаче классической теории излучения // ЖТФ. - 1973. - **43**, №8. - С.1778-1780.
17. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* К теории излучения электрическим зарядом, движущимся в постоянном электрическом поле // Вестник Московского ун-та. Сер. физ.-астрон. - 1973.- **14**, №5. - С.627-629.
18. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Об одной задаче теории излучения протяженными заряженными сгустками // Оптика и спектроскопия. - 1974. - **36**, № 6. - С.1217-1219.
19. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Применение метода силы самодействия Лоренца к решению некоторых задач классической теории излучения // Вестник Московского ун-та. Сер. физ.-астрон. - 1975. - **16**, №6. - С.706-710.
20. *Константинович А.В.*, *Фортуна В.В.* К теории излучения невзаимодействующих зарядов, движущихся в постоянном магнитном поле в вакууме // Известия высших учебных заведений. Физика. - 1983, № 12. - С.102-104.
21. *Константинович А.В.* Спектр випромінювання заряджених частинок, які рухаються в ізотропному ідеальному феродіелектрику // Науковий вісник ЧДУ. Вип.29: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.21-26.
22. *Константинович А.В.* Класична теорія випромінювання електрона. I. Потужність випромінювання системи електронів, які рухаються вздовж довільної траєкторії в ізотропному ідеальному феродіелектрику // Науковий вісник ЧДУ. Вип.32: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.3-7.
23. *Константинович А.В.*, *Мельничук С.В.*, *Константинович І.А.*, *Жаркой В.П.* Особливості спектра випромінювання системи електронів, які рухаються в ізотропному феродіелектрику // Науковий вісник ЧДУ. Вип.32: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.8-12.
24. *Константинович А.В.* Класична теорія випромінювання електрона. II. Миттєва потужність випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж довільної траєкторії у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧДУ. Вип.40: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.14-15.
25. *Константинович А.В.*, *Константинович І.А.* Класична теорія випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються вздовж довільної траєкторії у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧДУ. Вип.66 Фізика. Електроніка. - Чернівці: ЧДУ, 1999. - С.41-42.
26. *Константинович А.В.*, *Мельничук С.В.*, *Раренко І.М.*, *Константинович І.А.*, *Жаркой В.П.* Спектр випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі // Журнал фізичних досліджень. - 2000. - **4**, №1. - С.48-56.
27. *Schott G.A.* Electromagnetic Radiation. - Cambridge: Cambridge University Press, 1912.
28. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Об излучении при гиперболическом движении // История и методология естественных наук. - Изд-во Московского ун-та, 1979. - С.105-109.
29. *Соколов А.А.*, *Тернов И.М.* Релятивистский электрон. - М.: Наука, 1974.
30. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.В.* Методы функций комплексного переменного. - М.: Наука. 1973.
31. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука. 1971.
32. *Browne P.F.* Advanced Fields in Classical Electrodynamics and Mach's Principle // Phys. Lett. Ser. A. - 1969. - **29**, No.10. - P.588-589.
33. *Beils R.G.* Alternative Formulations in Classical Electrodynamics // Phys. Rev. Ser. D. - 1975. - **12**, No.8. - P.2266-2268.
34. *Schwinger J.*, *Tsai Wu-yang*, *Erber T.* Classical and Quantum Theory of Synergic Synchrotron-Čerenkov Radiation // Ann. of Phys. - 1976. - **96**, No.2. - P.303-332.
35. *Константинович А.В.*, *Фортуна В.В.* Метод силы самодействия Лоренца в классической теории излучения зарядов движущихся в прозрачном ферродиэлектрике и в вакууме // Черновицкий университет. - Черновцы, 1982. - Деп. в ВИНИТИ 09.11.82, №3524.