

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК. II. ВПЛИВ СЕРЕДОВИЩА НА СПЕКТР ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК, ЩО РУХАЮТЬСЯ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛЯХ

Узагальнено і розвинуто дослідження авторів в області випромінювання заряджених частинок, що рухаються в електромагнітних полях, в ізотропних непоглинаючих середовищах і у вакуумі. Методом сили самодії Лоренца досліджені миттєва та середня потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються вздовж довільної траєкторії в ізотропному середовищі і у вакуумі. Особлива увага приділена дослідженню особливостей спектрального розподілу синхротронного, черенковського та синхротронно-черенковського випромінювань заряджених частинок, що рухаються по гвинтовій лінії.

The work is the generalization and further development of the studies of the authors in the field of the radiation of charged particles moving in electromagnetic fields in nonabsorbable isotropic medium and in vacuum. The expressions for the momentary and average radiation powers of the charged particles moving on an arbitrary trajectory in nonabsorbable isotropic media and in vacuum are studied by using the Lorentz's self-interaction method. Special attention is given to the research of particularities of the spectral distribution of the Cherenkov, synchrotron and synchrotron-Cherenkov radiations of charged particles moving in a spirale.

Вступ

Упродовж майже ста років неперервний інтерес являють дослідження спектра випромінювання заряджених частинок, що рухаються в постійному магнітному полі у вакуумі і в ідеальних (прозорих) феродіелектриках (непоглинаючих середовищах з $\varepsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$). При русі заряджених частинок у магнітному полі в середовищі можливі три види випромінювання: синхротронне, черенковське і синхротронно-черенковське, а у вакуумі можливе синхротронне випромінювання.

Докладні дослідження властивостей випромінювання, яке випускається електроном при його русі по колу, вперше проведені Шоттом [1-3] у зв'язку зі спробою пояснити дискретну природу атомних спектрів. Шотт [1-3], використовуючи в розрахунках модель, згідно з якою електрони в атомі рухаються навколо позитивного заряду по колах типу кілець Сатурна, спробував строгими методами класичної електродинаміки розрахувати спектр електрона. Його спроби пояснити випромінювання атома на основі класичної електродинаміки виявились безуспішними. Значення праць Шотта по справжньому усвідомили майже через 40 років, коли виникло цілком нове питання про

випромінювання заряду, що рухається по колу вздовж макроскопічної траєкторії [4].

Існування радіаційних втрат енергії електронів, що рухаються в магнітному полі прискорювача, було підтверджено дослідями Блюїтта [5], який вперше виявив скорочення радіусів орбіт електронів у міру збільшення їх енергії.

Для електронів, які рухаються у синхротроні по колу, випромінювання вперше встановлено в 1948 році [6].

Важливий крок у теоретичних дослідженнях спектрального складу синхротронного випромінювання – асимптотичні формули [7-8], які добре узгоджуються з дослідом у видимій області [9], в ультрафіолетовій області [10] та в рентгенівському діапазоні [11].

Необхідно підкреслити, що теоретичні дослідження поляризаційних властивостей синхротронного випромінювання [12,13] добре узгоджуються з експериментальними даними досліджень [14]. Досить повне експериментальне дослідження поляризації синхротронного випромінювання проведено в роботах [15-19].

Багато цінної інформації з класичної теорії синхротронного випромінювання і її дослідного

підтвердження можна знайти у монографіях, підручниках та збірниках [12,20-27].

Важливе значення має встановлення того факту, що нетеплове випромінювання Галактики пояснюється механізмом синхротронного випромінювання [28-31].

Стосовно астрофізичних задач доцільно використовувати узагальнення формули Шотта на випадок руху електрона по гвинтовій лінії [20, 24].

Ондуляторне випромінювання, інтерес до якого проявляється у зростаючому ступені, являє собою електромагнітне випромінювання заряджених частинок при їх русі в системах із періодичним зовнішнім полем. Ондуляторне випромінювання за своєю природою близьке до синхротронного, а різниця між цими двома типами випромінювання пов'язана тільки з ефективною довжиною траєкторії, на якій вони формуються [4]. Вперше на можливість випромінювання релятивістськими електронами при їх русі в періодичних системах (електричний ондулятор) вказав Гінзбург ще в 1947 р. [32].

Термін "ондулятор" ввів Мотц [33-35]. Магнітний ондулятор – це послідовний ряд магнітних полів різної полярності.

За допомогою магнітного ондулятора Мотц [35] провів перші досліди із спостереження ондуляторного випромінювання.

Важливий крок у цьому напрямку – встановлення ондулятора у прямолінійний проміжок синхротрона або накопичувального кільця [4,36-37].

Важливу інформацію про ондуляторне випромінювання наведено в роботах [38-42].

Останнім часом значення досліджень ондуляторів зростає у зв'язку з реалізацією програми створення генераторів когерентного випромінювання на вільних електронах (лазерів на вільних електронах) [4,26,43-47].

При русі вздовж дуги кола має місце генерація низькочастотного випромінювання, з'являються інші особливості в порівнянні з синхротронним випромінюванням [4,48-50].

Явище інтерференції при випромінюванні електромагнітних хвиль окремими електронами може спричинити вплив на повну потужність випромінювання, тобто виникає когерентне синхротронне випромінювання [1-3,21,51-56].

Останні спостереження за когерентним синхротронним випромінюванням [57-59] вказують на необхідність дослідження впливу форми і розмірів згустка на когерентне синхротронне випромінювання [60-62].

Когерентність синхротронного випромінювання в області радіодіапазону викликала інтерес у

зв'язку з дослідженням радіовипромінювання, яке приходить від пульсарів [63-64]. Оцінка потужності цього випромінювання приводить до припущення, що радіовипромінювання відбувається когерентно і зумовлене зарядами, згрупованими у вигляді згустків, які обертаються навколо поверхні пульсара [4, 63, 64].

При прямолінійному русі заряджених частинок у прозорих феродіелектриках, для швидкостей частинок більших, ніж фазова швидкість світла в цих середовищах, відбувається колективний процес, який отримав назву випромінювання Черенкова [65-70]. Потужність випромінювання Черенкова при проходженні зарядженої частинки крізь ідеальний (прозорий) діелектрик, властивості якого задаються через макроскопічний параметр – діелектричну проникність, вперше отримана Таммом і Франком [71]. Вираз для потужності випромінювання Черенкова від зарядженої частинки, що рухається в прозорому феродіелектрику (непоглинаюче середовище з $\epsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$), отримали О.Г. Ситенко [70,72], а потім Д.Д. Іваненко і В.Н. Цитович [73], Наг і Саїд [74].

Подальший розвиток теорії випромінювання Черенкова дає змогу пояснити випромінювання електричних і магнітних диполів, мультиполів і осциляторів [69, 70, 75-78], що рухаються прямолінійно у непоглинаючих середовищах.

Випромінювання Черенкова пучками електронів розглянуто в роботах [33,35,79-80].

В останній час викликають інтерес дослідження спектра випромінювання Черенкова неточкових розподілів, згустків заряджених частинок та систем точкових заряджених частинок [81-83], які рухаються прямолінійно і рівномірно в ізотропних прозорих (непоглинаючих) середовищах.

Спектр випромінювання заряджених частинок, які рухаються в площині, паралельній нескінченній площині діелектрика, досліджено в роботах [32, 79, 84-87].

В.Н. Цитович [88] докладно розглянув випадок руху релятивістської зарядженої частинки по колу в постійному магнітному полі в диспергуючому середовищі. При цьому можливі два типи випромінювання – черенковське випромінювання і синхротронне випромінювання. Однак результуюче випромінювання не є простою суперпозицією цих двох випромінювань, а має специфічні особливості. Випромінювання зарядженої частинки, що рухається по колу в середовищі, докладно дослідив також Кітао [89]. Ефект Черенкова при русі електрона по колу розглянуто також у працях [90-91].

Спектр випромінювання електрона, що рухається по гвинтовій лінії в магнітоактивній плазмі та в прозорих феродіелектриках, досліджено в роботах [92-103], де підтверджено ефективність методу сили самодії Лоренца в непоглинаючих середовищах. У розвинутому методі сили самодії Лоренца використовується гіпотеза Дірака [8, 95, 104-106], згідно з якою потенціали, які визначають роботу сили самодії, розраховуються через напіврідницю запізнюючих і випереджаючих потенціалів.

Розвинутий метод сили самодії Лоренца, який базується на гіпотезі Дірака, виявився ефективним при подальшому дослідженні спектра випромінювання систем заряджених частинок, особливо при їх русі в непоглинаючих середовищах [106-117].

Отримані в роботі [106] співвідношення для спектрально-кутових та спектральних розподілів миттєвої та середньої потужностей випромінювання дозволяють дослідити спектр випромінювання різноманітних розподілів заряджених частинок, а також спектр випромінювання систем точкових заряджених частинок.

Мета даної роботи – подальший розвиток методу сили самодії, який ґрунтується на гіпотезі Дірака [8, 95, 104-106]. Значна увага буде приділена дослідженню впливу ефекту Доплера на особливості спектра випромінювання зарядженої частинки при її русі по гвинтовій лінії в прозорому феродіелектрику. Метою роботи є також числовий розрахунок спектра випромінювання зарядженої частинки при її русі по гвинтовій лінії в постійному магнітному полі в прозорому феродіелектрику і у вакуумі у нерелятивістському й релятивістському випадках.

Використовуючи отримані точні інтегральні співвідношення для спектрального розподілу потужності випромінювання заряджених частинок, аналітичними та числовими методами досліджені особливості спектра синхротронного, черенковського і синхротронно-черенковського випромінювань.

Миттєва і середня за часом потужності випромінювання заряджених частинок

У даній роботі при дослідженні спектра випромінювання заряджених частинок використовується метод та позначення роботи [106]. Робота сили самодії Лоренца за одиницю часу $P^{tot}(t)$ у ізотропному непоглинаючому середовищі, а також у вакуумі визначається за співвідношенням:

$$P^{tot}(t) = - \int_{\tau} \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{E}^{Dir}(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (1)$$

де τ – об'єм, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ – густина струму $\vec{E}^{Dir}(\vec{r}, t)$ – напруженість електричного поля.

Скалярний $\varphi^{Dir}(\vec{r}, t)$ та векторний $\vec{A}^{Dir}(\vec{r}, t)$ потенціали, згідно з гіпотезою Дірака [8, 95, 104-106] визначаються через напіврідницю запізнюючих та випереджаючих потенціалів:

$$\varphi^{Dir} = \frac{1}{2} (\varphi^{ret} - \varphi^{adv}), \quad (2)$$

$$\vec{A}^{Dir} = \frac{1}{2} (\vec{A}^{ret} - \vec{A}^{adv}). \quad (3)$$

Миттєву потужність, зумовлену силою самодії Лоренца, можна виразити через потенціали [8, 106],

$$P^{tot}(t) = \int_{\tau} \vec{j}(\vec{r}, t) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^{Dir}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{grad} \varphi^{Dir}(\vec{r}, t) \right) d\vec{r}. \quad (4)$$

Визначимо повну миттєву потужність, зумовлену силою самодії Лоренца $P^{tot}(t)$, через суму потужностей випромінюваної енергії $P^{rad}(t)$ і енергії прискорення $P^{acc}(t)$ [8, 106]:

$$P^{tot}(t) = P^{rad}(t) + P^{acc}(t), \quad (5)$$

$$P^{rad}(t) = \int_{\tau} \left[\vec{j}(\vec{r}, t) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^{Dir}}{\partial t} - \rho(\vec{r}, t) \frac{\partial \varphi^{Dir}}{\partial t} \right] d\vec{r}, \quad (6)$$

$$P^{acc}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho(\vec{r}, t) \varphi^{Dir}(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (7)$$

де $\rho(\vec{r}, t)$ – густина заряду.

Отже, в ізотропному непоглинаючому середовищі та у вакуумі дія на заряджену частинку електричного поля, яке визначається згідно з гіпотезою Дірака, зумовлює два ефекти: випромінювання електромагнітних хвиль і появу енергії прискорення [8, 106, 113].

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_1(t, \omega, \theta, \varphi)$, отримана зі співвідношення (6) в роботі [106]:

$$P^{rad}(t) = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta W_1(t, \omega, \theta, \varphi), \quad (8)$$

$$W_1(t, \omega, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \times \\ \times \omega^2 \mu(\omega) n(\omega) \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega (\sin \theta \cos \varphi (x - x') + \right. \\ \left. + \sin \theta \sin \varphi (y - y')) \right] \times$$

$$\times \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega \cos \theta (z - z') \right] \cos \omega(t - t') \times \left[\vec{j}(\vec{r}, t) \vec{j}(\vec{r}', t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \rho(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}', t') \right]. \quad (9)$$

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_2(t, \omega, \theta)$, отримана в [106] шляхом інтегрування (8) і (9) по куту φ за допомогою співвідношення [118, 119]:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega (\sin \theta \cos \varphi (x - x') + \sin \theta \sin \varphi (y - y')) \right] = 2\pi J_0 \left(\frac{n(\omega)}{c} \omega \sin \theta \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \right). \quad (10)$$

Тоді

$$P^{rad}(t) = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta W_2(t, \omega, \theta), \quad (11)$$

$$W_2(t, \omega, \theta) = \frac{1}{2\pi c^3} \int_{-\infty}^\infty d\vec{r} \int_{-\infty}^\infty d\vec{r}' \int_{-\infty}^\infty dt' \omega^2 \mu(\omega) n(\omega) \times J_0 \left(\frac{n(\omega)}{c} \omega \sin \theta \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \right) \times \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega \cos \theta (z - z') \right] \cos \omega(t - t') \times \left[\vec{j}(\vec{r}, t) \vec{j}(\vec{r}', t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \rho(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}', t') \right]. \quad (12)$$

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектральний розподіл потужності випромінювання $W_3(t, \omega)$, отримана в роботах [103, 106].

Проінтегруємо співвідношення (11) і (12) по θ за допомогою співвідношення для функцій Бесселя цілочисельного індексу згідно з роботами [106, 118, 119]:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta J_0(\alpha \sin \theta) \cos(\beta \cos \theta) = \frac{\sin \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (13)$$

Тоді отримаємо:

$$P^{rad}(t) = \int_0^\infty d\omega W_3(t, \omega), \quad (14)$$

$$W_3(t, \omega) = \frac{1}{\pi c^2} \int_{-\infty}^\infty d\vec{r} \int_{-\infty}^\infty d\vec{r}' \int_{-\infty}^\infty dt' \omega \mu(\omega) \times$$

$$\times \frac{\sin \left[\frac{n(\omega)\omega}{c} |\vec{r} - \vec{r}'| \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cos \omega(t - t') \times \left\{ \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{j}(\vec{r}', t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \rho(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}', t') \right\}. \quad (15)$$

Співвідношення (9), (12), (15) дають можливість визначити спектрально-кутовий і спектральний розподіли миттєвої потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються по довільній траєкторії в електромагнітному полі в непоглинаючому ізотропному середовищі.

Середня за часом потужність випромінювання заряджених частинок визначається виразом [106, 110-115]:

$$\bar{P}^{rad} = \bar{P}^{tot} =$$

$$= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \left(\int_{\tau} \vec{j}(\vec{r}, t) \vec{E}^{Dir}(\vec{r}, t) d\vec{r} \right). \quad (16)$$

Співвідношення (16) можна перетворити до вигляду

$$\bar{P}^{rad} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P^{rad}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{\tau} \left[\vec{j}(\vec{r}, t) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^{Dir}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \rho(\vec{r}, t) \frac{\partial \varphi^{Dir}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] d\vec{r}. \quad (17)$$

Співвідношення (16) і (17) вказують на те, що середня за часом потужність енергії прискорення дорівнює нулю.

Середню потужність випромінювання заряджених частинок отримуємо, підставляючи миттєву потужність (8)-(9), (11)-(12), (14)-(15) у співвідношення (17).

Миттєва потужність випромінювання не-взаємодіючої системи гетерогенних точкових заряджених частинок

При нехтуванні силою радіаційного тертя закон руху l -ї точкової зарядженої частинки визначається з рівнянь руху:

$$\frac{d\vec{p}_l}{dt} = q_l \vec{E} + \frac{q_l}{c} [\vec{V}_l \times \vec{B}], \quad (18)$$

$$\vec{p}_l = \frac{m_{0l} \vec{V}_l}{\sqrt{1 - V_l^2 / c^2}}, \quad (19)$$

де q_l , m_{0l} , \vec{V}_l і \vec{p}_l відповідно заряд, маса спокою, швидкість та релятивістський імпульс l -ї частинки.

Використовуємо функції джерел N точкових заряджених частинок

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^N \vec{V}_l(t) \rho_l(\vec{r}, t), \quad \rho(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^N \rho_l(\vec{r}, t), \quad (20)$$

$$\rho_l(\vec{r}, t) = q_l \delta(\vec{r} - \vec{r}_l(t)), \quad (21)$$

де $\vec{r}_l(t)$ – закон руху l -ї частинки.

Тоді отримуємо спектрально-кутові і спектральний розподіли миттєвої потужності випромінювання незв'язаної гетерогенної системи N точкових заряджених частинок

$$\begin{aligned} W_1(t, \omega, \theta, \varphi) = & \frac{1}{4\pi^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \omega^2 \mu(\omega) n(\omega) \times \\ & \times \sum_{l,j=1}^N q_l q_j \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega (\sin \theta \cos \varphi (x_l(t) - x_j(t')) + \right. \\ & \left. + \sin \theta \sin \varphi (y_l(t) - y_j(t'))) \right] \times \\ & \times \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega \cos \theta (z_l(t) - z_j(t')) \right] \cos \omega(t - t') \times \\ & \times \left[\vec{V}_l(t) \vec{V}_j(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2(t, \omega, \theta) = & \frac{1}{2\pi c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \omega^2 \mu(\omega) n(\omega) \sum_{l,j=1}^N q_l q_j \times \\ & \times J_0 \left(a \sin \theta \sqrt{(x_l(t) - x_j(t'))^2 + (y_l(t) - y_j(t'))^2} \right) \times \\ & \times \cos \left[a \cos \theta (z_l(t) - z_j(t')) \right] \cos \omega(t - t') \times \\ & \times \left[\vec{V}_l(t) \vec{V}_j(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right], \quad (23) \end{aligned}$$

де $a = \frac{n(\omega)}{c} \omega$.

$$\begin{aligned} W_3(t, \omega) = & \frac{1}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \omega \mu(\omega) \times \\ & \times \sum_{l,j=1}^N q_l q_j \frac{\sin \left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega |\vec{r}_l(t) - \vec{r}_j(t')| \right\}}{|\vec{r}_l(t) - \vec{r}_j(t')|} \times \\ & \times \cos \omega(t - t') \left\{ \vec{V}_l(t) \vec{V}_j(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Підставляючи співвідношення (24) в (14), приходимо до виразу миттєвої потужності випромінювання системи заряджених частинок у прозорих феродіелектриках, який одержаний в роботі [114]:

$$\begin{aligned} P^{rad}(t) = & \frac{1}{\pi c^2} \int_0^{\infty} d\omega \omega \mu(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \times \\ & \times \sum_{l,j=1}^N q_l q_j \frac{\sin \left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega |\vec{r}_l(t) - \vec{r}_j(t')| \right\}}{|\vec{r}_l(t) - \vec{r}_j(t')|} \times \\ & \times \cos \omega(t - t') \left\{ \vec{V}_l(t) \vec{V}_j(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Середню потужність випромінювання можна одержати з виразу (17)

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P^{rad}(t) dt = \\ = & \frac{1}{\pi c^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} d\omega \omega \mu(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \times \\ & \times \sum_{l,j=1}^N q_l q_j \frac{\sin \left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega |\vec{r}_l(t) - \vec{r}_j(t')| \right\}}{|\vec{r}_l(t) - \vec{r}_j(t')|} \times \\ & \times \cos \omega(t - t') \left\{ \vec{V}_l(t) \vec{V}_j(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

Розглянемо систему тотожних точкових заряджених частинок ($q_l = e$), які рухаються одна за одною вздовж довільної траєкторії. Тоді закон руху та швидкість l -ї частинки цієї системи визначаються співвідношеннями [115]:

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_p(t + \Delta t_j), \quad \vec{V}_j(t) = \vec{V}(t + \Delta t_j). \quad (27)$$

Спектрально-кутовий розподіл середньої потужності випромінювання одержимо, підставляючи вирази (8), (22), (27) в (17). Тоді дістанемо вираз, наведений у роботі [115]:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} = & \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \times \\ & \times \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \mu(\omega) n(\omega) \omega^2 \times \\ & \times S_N(\omega) \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega (\sin \theta \cos \varphi (x_p(t) - x_p(t')) + \right. \\ & \left. + \sin \theta \sin \varphi (y_p(t) - y_p(t'))) \right] \times \\ & \times \cos \left[\frac{n(\omega)}{c} \omega \cos \theta (z_p(t) - z_p(t')) \right] \cos \omega(t - t') \times \\ & \times \left[\vec{V}(t) \vec{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right], \quad (28) \end{aligned}$$

де фактор когерентності $S_N(\omega)$ визначається співвідношенням:

$$S_N(\omega) = \sum_{l,j=1}^N \cos\{\omega(\Delta t_l - \Delta t_j)\}. \quad (29)$$

Інтегруючи по φ (28), за допомогою співвідношення (10), знаходимо:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \frac{e^2}{2\pi c^3} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' \times \\ &\times \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi \sin\theta d\theta \mu(\omega) n(\omega) \omega^2 S_N(\omega) \times \\ &\times J_0 \left(a \sin\theta \sqrt{(x_p(t) - x_p(t'))^2 + (y_p(t) - y_p(t'))^2} \right) \times \\ &\times \cos[a \cos\theta (z_p(t) - z_p(t'))] \cos\omega(t - t') \times \\ &\times \left[\vec{V}(t) \vec{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right], \quad (30) \end{aligned}$$

де $a = \frac{n(\omega)}{c} \omega$.

Після інтегрування по θ згідно зі співвідношенням (13), знаходимо:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \frac{e^2}{\pi c^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' \int_0^\infty d\omega \mu(\omega) \omega S_N(\omega) \times \\ &\times \sin\left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega |\vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(t')| \right\} \times \\ &\times \frac{\cos\omega(t - t')}{|\vec{r}_p(t) - \vec{r}_p(t')|} \times \\ &\times \left[\vec{V}(t) \vec{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

Отже, отримані вирази середньої потужності випромінювання гетерогенної системи заряджених частинок у випадку тотожних частинок підтверджують результати роботи [115].

Числові і аналітичні дослідження особливостей спектрів випромінювання заряджених частинок, які рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорому феродіелектрику і у вакуумі

Розглянемо частковий випадок, коли електрон рухається по гвинтовій лінії в ідеальному (прозорому) феродіелектрику та у вакуумі. Закон руху та швидкість електрона визначаються співвідношеннями:

$$\vec{r}_p(t) = r_0 \cos\omega_0 t \vec{i} + r_0 \sin\omega_0 t \vec{j} + V_{\parallel} t \vec{k}, \quad (32)$$

$$\vec{V}_p(t) = \frac{d\vec{r}_p(t)}{dt}. \quad (33)$$

Тут

$$r_0 = V_{\perp} \omega_0^{-1}, \quad \omega_0 = ceB^{ext} \tilde{E}^{-1}, \quad \tilde{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

V_{\perp}, V_{\parallel} – компоненти швидкості, p, \tilde{E} – імпульс і енергія електрона, e і m_0 – заряд і маса спокою електрона, \vec{B}^{ext} – зовнішня магнітна індукція.

Для закону руху (32) співвідношення (31) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \int_0^\infty W_3(\omega) d\omega, \quad (34) \\ W_3(\omega) &= \frac{2e^2}{\pi c^2} \int_0^\pi dx \mu(\omega) \omega \times \\ &\times \frac{\sin\left\{ \frac{n(\omega)}{c} \omega \eta(x) \right\}}{\eta(x)} \cos\omega x \times \\ &\times \left[V_{\perp}^2 \cos(\omega_0 x) + V_{\parallel}^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right], \quad (35) \end{aligned}$$

де

$$\eta(x) = \sqrt{V_{\parallel}^2 x^2 + 4 \frac{V_{\perp}^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2} x\right)}. \quad (36)$$

Інтегральне зображення (34) являє інтерес при дослідженні спектра випромінювання заряджених частинок, які рухаються в ідеальному (прозорому) феродіелектрику та у вакуумі [95, 118].

Підставляючи вираз для закону руху (32) у співвідношення (30), знаходимо

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi \sin\theta d\theta W_2(\omega, \theta), \quad (37) \\ W_2(\omega, \theta) &= \frac{e^2}{\pi c^3} \int_0^\pi dx \mu(\omega) n(\omega) \omega^2 \times \\ &\times \cos\left(\frac{n(\omega)}{c} \omega V_{\parallel} \cos\theta x\right) \times \\ &\times \cos(\omega x) J_0 \left(2 \frac{n(\omega)}{c} \frac{\omega}{\omega_0} V_{\perp} \sin\theta \sin\left(\frac{\omega_0}{2} x\right) \right) \times \\ &\times \left[V_{\perp}^2 \cos(\omega_0 x) + V_{\parallel}^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

Використовуючи ряди по функціях Бесселя цілочисельного індексу [119]

$$J_0(z \sin\alpha) = J_0^2\left(\frac{z}{2}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2\left(\frac{z}{2}\right) \cos(2m\alpha), \quad (39)$$

рекурентні співвідношення [119]

$$J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) = 2 \frac{m}{z} J_m(z), \quad (40)$$

$$J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z) = 2 J'_m(z), \quad (41)$$

та інтегральне зображення для дельта-функції

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i\alpha x), \quad (42)$$

знаходимо спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання по гармоніках [96]:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} = & \frac{e^2}{c^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \mu(\omega) n(\omega) \omega^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \times \\ & \times \delta \left\{ \omega \left(1 - \frac{n(\omega)}{c} V_{\parallel} \cos \theta \right) - m\omega_0 \right\} \times \\ & \times \left\{ V_{\perp}^2 \left[\frac{m^2}{q^2} J_m^2(q) + J_m'^2(q) \right] + \right. \\ & \left. + \left(V_{\parallel}^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)} \right) J_m^2(q) \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

де
$$q = \frac{n(\omega)}{c} \frac{\omega}{\omega_0} V_{\perp} \sin \theta, \quad (44)$$

$J_m(q)$, $J_m'(q)$ – функція Бесселя цілочисельного індексу та її похідна відповідно.

Для $V_{\parallel} < c/n(\omega)$ кожна гармоніка представляє набір частот, які є розв'язком рівняння

$$\omega \left(1 - \frac{n(\omega)}{c} V_{\parallel} \cos \theta \right) - m\omega_0 = 0. \quad (45)$$

У випадку постійних величин ϵ та μ для швидкостей $V < c/n$ отримуємо [120]

$$\begin{aligned} \bar{P}^{rad} = & \frac{e^2}{c^3} \mu n \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \frac{(m\omega_0)^2}{\left(1 - \frac{nV_{\parallel}}{c} \cos \theta \right)^3} \times \\ & \times \left\{ V_{\perp}^2 \left[\frac{m^2}{q_m^2} J_m^2(q_m) + J_m'^2(q_m) \right] + \right. \\ & \left. + \left(V_{\parallel}^2 - \frac{c^2}{n^2} \right) J_m^2(q_m) \right\}, \quad (46) \end{aligned}$$

де
$$q_m = \frac{nV_{\perp}}{c} \frac{m \sin \theta}{1 - \frac{nV_{\parallel}}{c} \cos \theta}. \quad (47)$$

Межі m -ї гармоніки визначаються частотами

$$\omega_m^{\max} = \frac{m\omega_0}{1 - \frac{nV_{\parallel}}{c}}, \quad \omega_m^{\min} = \frac{m\omega_0}{1 + \frac{nV_{\parallel}}{c}}. \quad (48)$$

Сумуючи у співвідношенні (46) ряди по функціях Бесселя цілого індексу та інтегруючи по θ , отримуємо потужність випромінювання електрона у середовищі з постійними ϵ і μ [95, 120].

$$P_m^{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \mu n}{c^3} \frac{\omega_0^2 V_{\perp}^2}{\left(1 - \frac{n^2 V^2}{c^2} \right)^2}, \quad (49)$$

де
$$\omega_0 = \frac{eB^{ext}}{m_0 c} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \omega_{00} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (50)$$

У вакуумі потужність випромінювання (49) переходить у вираз, наведений в роботі [121].

Визначимо, для яких швидкостей заряджених частинок потужності випромінювання цих частинок у вакуумі і у ідеальному (прозорому) діелектрику ($\mu=1, \epsilon \neq 1$) рівні, якщо для векторів швидкостей у вакуумі \vec{V}_{vac} і у середовищі \vec{V}_m існує зв'язок:

$$\vec{V}_{vac} = n \vec{V}_m, \quad (51)$$

де n – показник заломлення.

Потужності випромінювання у вакуумі і у ідеальному діелектрику ($\mu=1$) визначаються співвідношеннями:

$$P_{vac}^{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\omega_{00}^2 V_{\perp vac}^2}{\left(1 - \frac{V_{vac}^2}{c^2} \right)}, \quad (52)$$

$$P_m^{tot} = \frac{2}{3} \frac{e^2 n}{c^3} \frac{\omega_{00}^2 \left(1 - \frac{V_m^2}{c^2} \right) V_{\perp m}^2}{\left(1 - \frac{n^2 V_m^2}{c^2} \right)^2}. \quad (53)$$

Враховуючи рівність потужностей

$$P_{vac}^{tot} = P_m^{tot} \quad (54)$$

і співвідношення (51), отримуємо рівняння

$$n \left(1 - \frac{n^2 V_m^2}{c^2} \right) = 1 - \frac{V_m^2}{c^2}. \quad (55)$$

Звідси знаходимо швидкості ($\mu=1$, таблиця 1), для яких виконується рівність потужностей (54)

$$V_m^0 = \frac{c}{\sqrt{n^2 + n + 1}}, \quad (56)$$

$$V_{vac}^0 = \frac{cn}{\sqrt{n^2 + n + 1}}. \quad (57)$$

Наведемо проведені числові розрахунки спектрального розподілу потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються по гвинтовій лінії у вакуумі і у ідеальному (прозорому) діелектрику ($\mu=1$), використовуючи співвідношення

(35). Розглянемо особливості спектрального розподілу потужності випромінювання, коли компонента швидкості зарядженої частинки вздовж магнітного поля більша, ніж компонента швидкості, перпендикулярна магнітному полю (випадок відповідає №8 таблиці 1).

Таблиця 1. Швидкості заряджених частинок, які зумовлюють однакові потужності випромінювання у вакуумі і в середовищах

№	n	$V_m^0 \times 10^{10}$, см/с	$V_{vac}^0 \times 10^{10}$, см/с
1	1,2	1,5713	1,8856
2	1,4	1,4357	2,0100
3	1,6	1,3198	2,1116
4	1,8	1,2198	2,1957
5	2,0	1,1331	2,2662
6	3,0	0,8315	2,4944
7	4,0	0,6542	2,6168
8	5,0	0,5384	2,6922
9	6,0	0,4572	2,7431
10	7,0	0,3971	2,7796
11	8,0	0,3509	2,8070
12	9,0	0,3143	2,8284
13	10,0	0,2846	2,8455
14	11,0	0,2599	2,8595

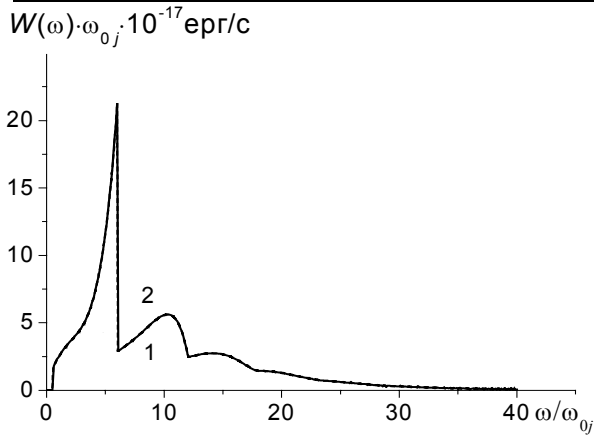


Рис.1. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

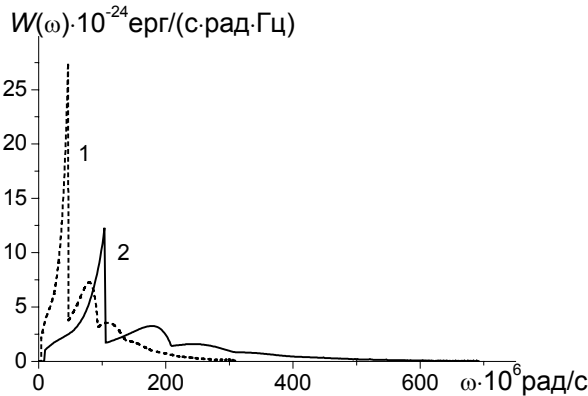


Рис.2. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті.

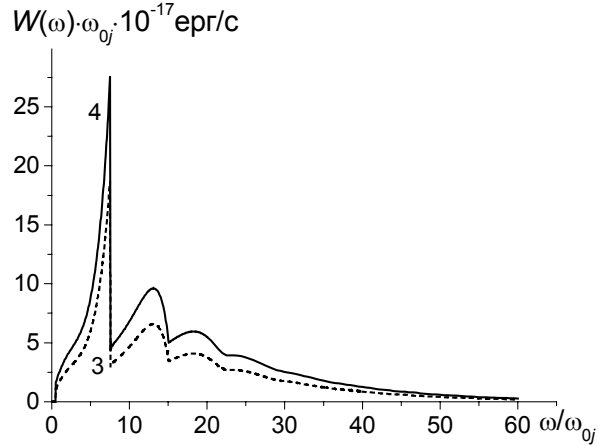


Рис.3. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті

Всі розрахунки проведені для випадку, коли у вакуумі $H=1$ Ерстед, а в ідеальному (прозорому) діелектрику $B=1$ Гс= 10^{-4} Тл.

Спектральні розподіли по відносній частоті ω/ω_{0j} потужності випромінювання заряджених частинок (криві 1, 2 на рис.1) у вакуумі і у середовищі ($n=5$) збігаються.. Ті ж самі розподіли потужності випромінювання по частоті ω зображені на рис.2. З рис.2 випливає, що для швидкостей, які задовольняють співвідношенням (56) і (57), випромінювання у вакуумі відбувається на більш низьких частотах ніж у діелектрику.

Крива 1: $n=1$, $V_{\perp vac}=0,1 \cdot 10^{11}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,25 \cdot 10^{11}$ см/с, $\omega_{01}=0,773 \cdot 10^7$ рад/с,
 $r_{01}=1293,1$ см, $P_{vac}^{tot}=0,913 \cdot 10^{-15}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int}=0,91 \cdot 10^{-15}$ ерг/с.

Крива 2: $n=5$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{02}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{02}=115,6$ см, $P_m^{tot}=0,914 \cdot 10^{-15}$ ерг/с
 $P_m^{int}=0,915 \cdot 10^{-15}$ ерг/с.

Розрахована за співвідношенням (52) повна потужність випромінювання у вакуумі $P_{vac}^{tot}=0,913 \cdot 10^{-15}$ ерг/с добре узгоджується з $P_{vac}^{int}=0,91 \cdot 10^{-15}$ ерг/с, отриманою шляхом інтегрування у (34) по частоті спектрального розподілу випромінювання (35). У середовищі потужності випромінювання відповідно рівні $P_m^{tot}=0,914 \cdot 10^{-15}$ ерг/с згідно (53) і $P_m^{int}=0,915 \cdot 10^{-15}$ ерг/с згідно (34), (35).

Крива 3: $n=1$, $V_{\perp vac}=0,104 \cdot 10^{11}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,26 \cdot 10^{11}$ см/с, $\omega_{03}=0,628 \cdot 10^7$ рад/с,
 $r_{03}=1656,0$ см, $P_{vac}^{tot}=0,1498 \cdot 10^{-14}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int}=0,1475 \cdot 10^{-14}$ ерг/с.

Крива 4: $n=5,2$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{04}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{04}=115,6$ см, $P_m^{tot} = 0,2186 \cdot 10^{-14}$ ерг/с,
 $P_m^{int} = 0,2165 \cdot 10^{-14}$ ерг/с.

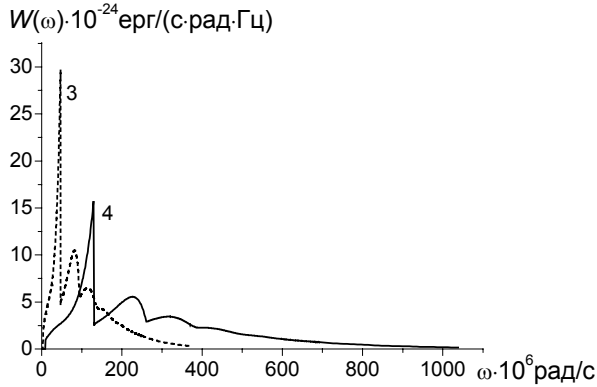


Рис.4. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті

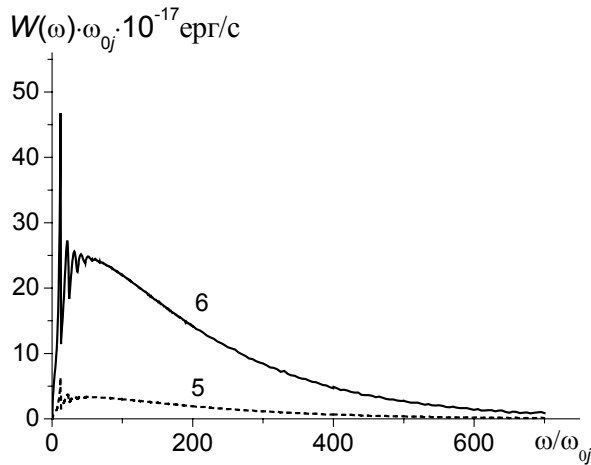


Рис.5. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті

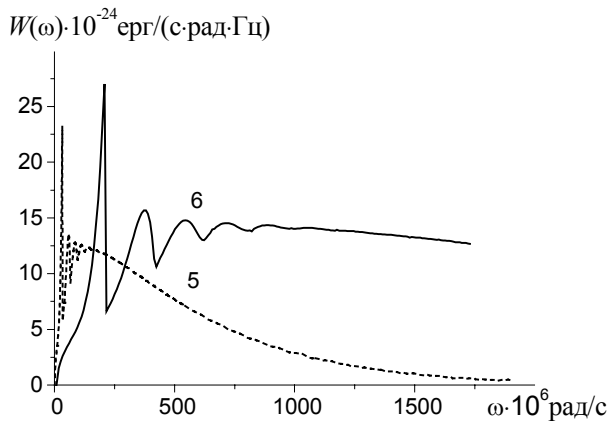


Рис.6. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті.

При русі в середовищі для швидкостей, які задовольняють співвідношення (51), при $|\vec{V}_m| > |\vec{V}_m^0|$, $|\vec{V}_{vac}| > |\vec{V}_{vac}^0|$, потужність випромінювання більша у середовищі, ніж у вакуумі (рис.3). У середовищі значно збільшується діапазон частот, в якому відбувається випромінювання електромагнітної енергії зарядженими частинками (рис.4).

Зокрема, спектральний розподіл потужностей випромінювання заряджених частинок при проходженні вакууму, крива 3 рис.3, за виглядом мало відрізняється від спектрального розподілу потужності випромінювання в спіральному ондуляторі [122]. При проходженні заряджених частинок через середовище (крива 4 рис.3) спектральний розподіл потужності випромінювання заряджених частинок близькій за формою до потужності випромінювання при проходженні через кристал [122, 123].

При наближенні до черенковського бар'єра спектр випромінювання в середовищі має структуру, зображену на рис.5 і 6. Для швидкостей, які задовольняють умову (51), при наближенні швидкостей заряджених частинок у середовищі до черенковського бар'єра, потужність випромінювання в середовищі вже набагато більша, ніж у вакуумі (рис.5, 6). Окрім того, вплив ефекту Доплера зумовлює можливість випромінювання електромагнітної енергії на високих частотах.

Крива 5: $n=1$, $V_{\perp vac}=0,11 \cdot 10^{11}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,275 \cdot 10^{11}$ см/с, $\omega_{05}=0,272 \cdot 10^7$ рад/с,
 $r_{05}=4043,1$ см, $P_{vac}^{tot} = 0,8928 \cdot 10^{-14}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int} = 0,8889 \cdot 10^{-14}$ ерг/с.

Крива 6: $n=5,5$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{06}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{06}=115,6$ см, $P_m^{tot} = 0,6565 \cdot 10^{-13}$ ерг/с,
 $P_m^{int} = 0,6507 \cdot 10^{-13}$ ерг/с.

Для показника заломлення $n=5,6$, при швидкостях $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, виконуються умови існування синхротронно-черенковського випромінювання. Синхротронно-черенковське випромінювання в середовищі або єдиний процес [103, 115], або складна суперпозиція синхротронного і черенковського випромінювань [88, 95, 96, 115, 118], як впливає з рисунків 7 і 8. У тому випадку, коли компонента швидкості, перпендикулярна магнітному полю, мала у порівнянні з величиною повної швидкості, спектр синхротронно-черенковського випромінювання

мало відрізняється від спектра випромінювання Черенкова при прямолинійному русі в ідеальному (прозорому) діелектрику (крива 8, рис.7,8). Потужність черенковського випромінювання при прямолинійному русі визначається співвідношенням (ϵ, μ – постійні величини):

$$P_{ch}^{tot} = \frac{e^2}{2c^2} V \omega_{max}^2 \left(1 - \frac{c^2}{V^2 n^2} \right). \quad (58)$$

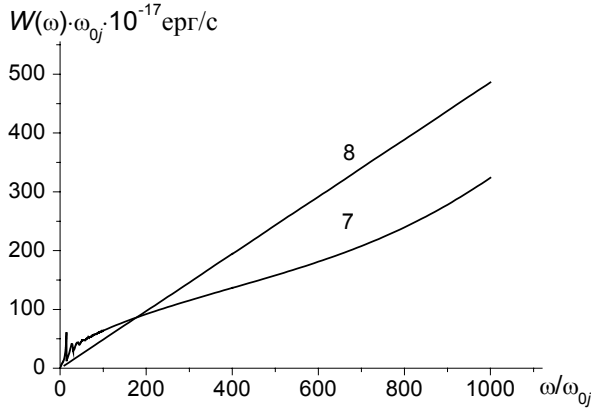


Рис.7. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

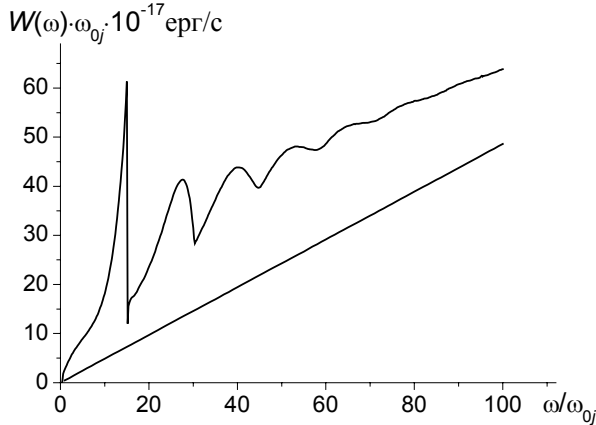


Рис.8. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

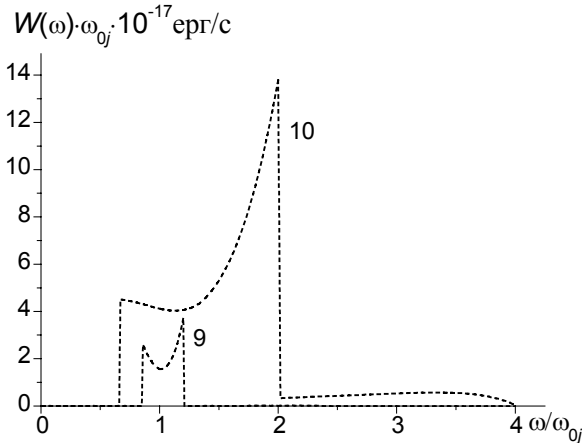


Рис.9. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

Потужність випромінювання Черенкова при прямолинійному русі $P_{ch}^{tot} = 0,2431 \cdot 10^{-11}$ ерг/с (співвідношення (58)) добре узгоджується з потужністю синхротронно-черенковського випромінювання $P_m^{int} = 0,2454 \cdot 10^{-11}$ ерг/с, яка розрахована при русі зарядженої частинки з малою компонентою швидкості, перпендикулярної магнітному полю (модулі швидкостей рівні).

Крива 7: $n=5,6, V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{07}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{07}=115,6$ см, $P_m^{int} = 0,1656 \cdot 10^{-11}$ ерг/с.

Крива 8: $n=5,6, V_{\perp m}=0,1 \cdot 10^8$ см/с,
 $V_{\parallel m}=0,5385156 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{08}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{08}=0,6$ см, $P_{ch}^{tot} = 0,2431 \cdot 10^{-11}$ ерг/с,
 $P_m^{int} = 0,2454 \cdot 10^{-11}$ ерг/с.

У вакуумі у випадку коли $V_{\perp vac}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel vac}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с випромінювання відбувається на основній частоті, яка внаслідок впливу ефекту Доплера розширюється в смугу (крива 9, рис.9, 10), межі якої визначаються співвідношеннями (48). Із рисунків 9 і 10 випливає, що при малих швидкостях випромінювання в основному відбувається перпендикулярно площині кола як в напрямку компоненти V_{\parallel} , так і в напрямку, протилежному напрямку швидкості V_{\parallel} . Для випадку, коли $V_{\perp vac}=0,6 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel}=0,15 \cdot 10^{11}$ см/с, випромінювання відбувається на першій і другій гармоніках (крива 10, рис.9 і 10).

Крива 9: $n=1, V_{\perp vac}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{09}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{09}=115,6$ см, $P_{vac}^{tot} = 0,7298 \cdot 10^{-17}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int} = 0,745 \cdot 10^{-17}$ ерг/с.

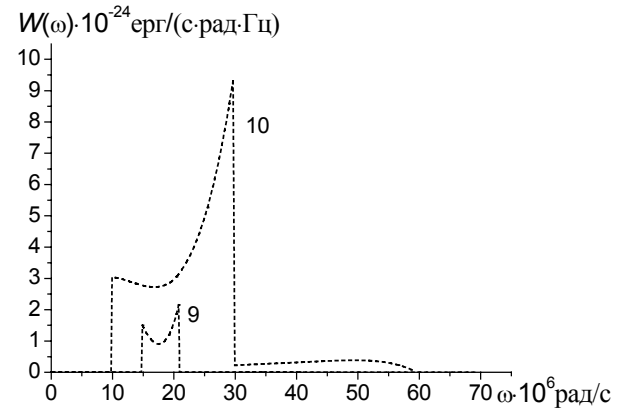


Рис.10. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті.

Крива 10: $n=1$, $V_{\perp vac}=0,6 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,15 \cdot 10^{11}$ см/с, $\omega_{010}=0,148 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{010}=405,0$ см, $P_{vac}^{tot}=0,8958 \cdot 10^{-16}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int}=0,8935 \cdot 10^{-16}$ ерг/с.

У вакуумі, у випадку коли $V_{\perp vac}=0,4 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,1 \cdot 10^{11}$ см/с, випромінювання відбувається
на першій гармоніці, зумовленій основною частотою
(крива 11, рис.11, 12), а друга гармоніка тільки
починає з'являтися (рис.11, 12). Для швидкостей
 $V_{\perp vac}=0,8 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel vac}=0,2 \cdot 10^{11}$ см/с,
починає з'являтися випромінювання на третій
гармоніці.

Крива 11: $n=1$, $V_{\perp vac}=0,4 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,1 \cdot 10^{11}$ см/с, $\omega_{011}=0,1641 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{011}=243,7$ см, $P_{vac}^{tot}=0,244 \cdot 10^{-16}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int}=0,3296 \cdot 10^{-16}$ ерг/с.

Крива 12: $n=1$, $V_{\perp vac}=0,8 \cdot 10^{10}$ см/с,
 $V_{\parallel vac}=0,2 \cdot 10^{11}$ см/с, $\omega_{012}=0,1223 \cdot 10^8$ рад/с,
 $r_{012}=654,0$ см, $P_{vac}^{tot}=0,2336 \cdot 10^{-15}$ ерг/с,
 $P_{vac}^{int}=0,2340 \cdot 10^{-15}$ ерг/с.

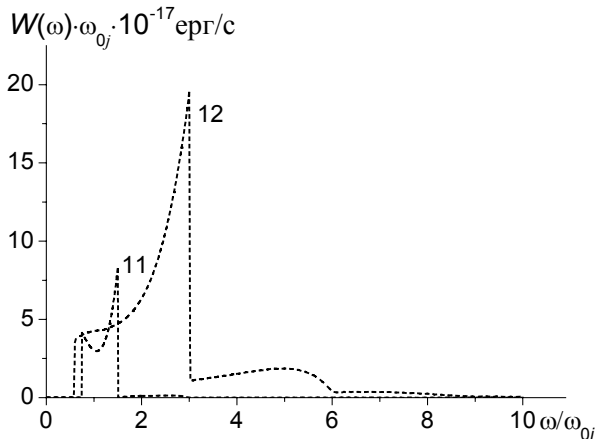


Рис.11. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

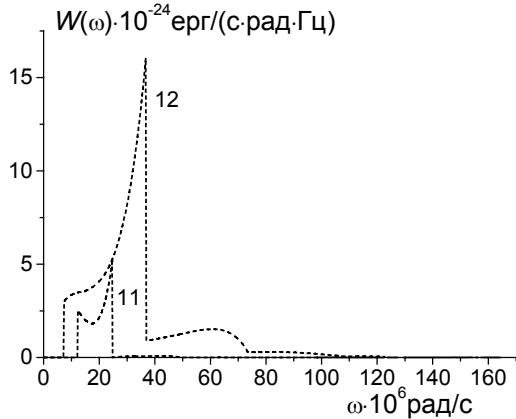


Рис.12. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті.

У середовищі для $n=2$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, спектр випромінювання (крива 13, рис.13) подібний до спектра випромінювання у вакуумі (крива 11 рис.11, 12). У середовищі для $n=4$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, спектр випромінювання (крива 14, рис.13) подібний до спектра випромінювання у вакуумі (кривій 12, рис.11, 12).

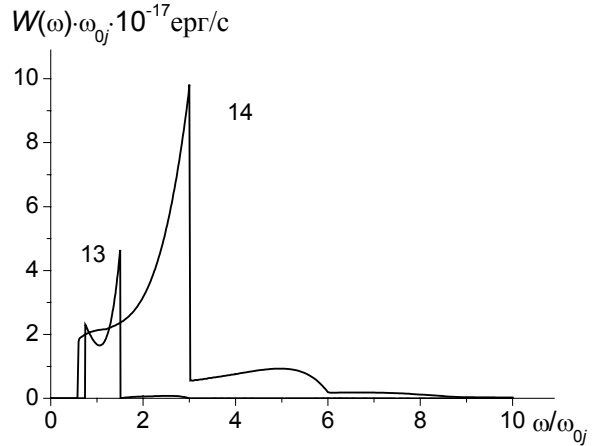


Рис.13. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

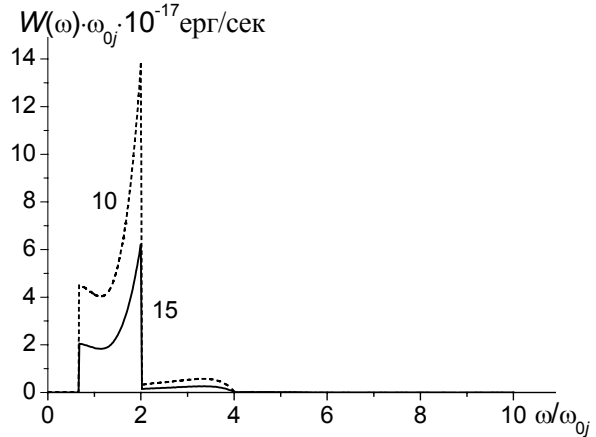


Рис.14. Спектральний розподіл потужності випромінювання по відносній частоті.

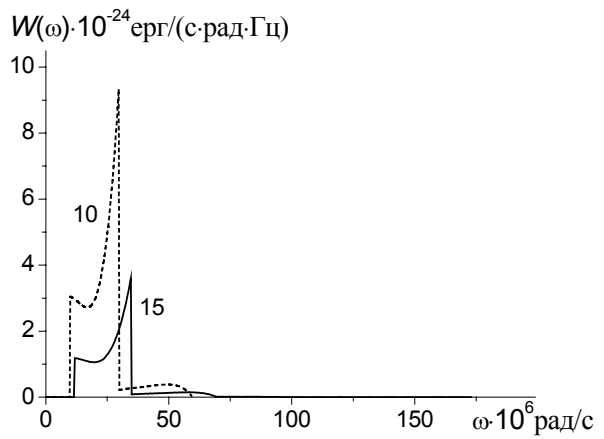


Рис.15. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті.

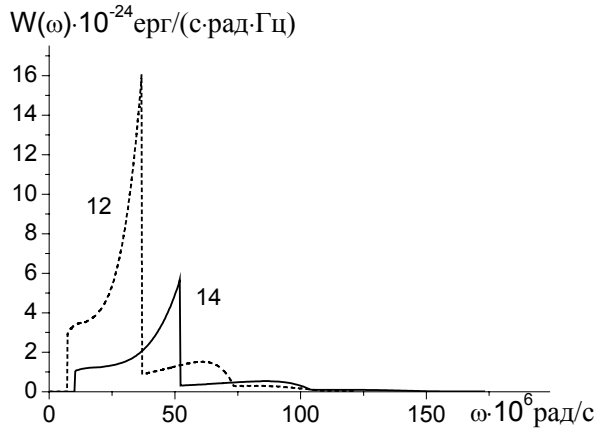


Рис.16. Спектральний розподіл потужності випромінювання по частоті.

На рис.14 для порівняння зображено спектральний розподіл потужностей випромінювання в середовищі при $n=3$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, та у вакуумі $V_{\perp vac}=0,6 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel vac}=0,15 \cdot 10^{11}$ см/с. Для швидкостей, які задовольняють співвідношення (51), при $|\vec{V}_m| < |\vec{V}_m^0|$, $|\vec{V}_{vac}| < |\vec{V}_{vac}^0|$ потужність випромінювання більша у вакуумі (крива 10, рис.9, 10), ніж у середовищі (крива 15, рис.14,15). Випромінювання електромагнітної енергії (криві 10 та 15) відповідно у вакуумі і у середовищі відбувається на першій і на другій гармоніках.

На рис.16 для порівняння зображено спектральний розподіл потужностей випромінювання в середовищі при $n=4$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, та у вакуумі при $V_{\perp vac}=0,8 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel vac}=0,2 \cdot 10^{11}$ см/с.

Крива 13: $n=2$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{013}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с, $r_{013}=115,6$ см, $P_m^{tot}=0,1802 \cdot 10^{-16}$ ерг/с, $P_m^{int}=0,183 \cdot 10^{-16}$ ерг/с.

Крива 14: $n=4$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{014}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с, $r_{014}=115,6$ см, $P_m^{tot}=0,1168 \cdot 10^{-15}$ ерг/с, $P_m^{int}=0,1171 \cdot 10^{-15}$ ерг/с.

Крива 15: $n=3$, $V_{\perp m}=0,2 \cdot 10^{10}$ см/с, $V_{\parallel m}=0,5 \cdot 10^{10}$ см/с, $\omega_{015}=0,173 \cdot 10^8$ рад/с, $r_{015}=115,6$ см, $P_m^{tot}=0,4072 \cdot 10^{-16}$ ерг/с, $P_m^{int}=0,411 \cdot 10^{-16}$ ерг/с.

Розраховані по спектральному розподілу потужності випромінювання заряджених частинок (співвідношення (34) і (35)) добре узгоджуються з потужностями випромінювання, які розраховані по точних формулах (52) і (53). У роботі досліджена послідовно тонка структура спектра випромінювання заряджених частинок, що рухаються по гвинтовій лінії в постійному магнітному полі як у вакуумі, так і в ідеальному феродіелектрику.

З проведених досліджень випливає, що при швидкостях $\frac{V_{\perp}}{c} \ll 1$, $\frac{V_{\parallel}}{c} \ll 1$ випромінювання в основному відбувається перпендикулярно площині кола як у напрямку компоненти V_{\parallel} , так і в протилежному напрямку.

Отримані спектральні розподіли потужності синхротронного, черенковського і синхротронно-черенковського випромінювань мають фундаментальне значення в області теорії випромінювання заряджених частинок, а також можуть знайти практичне застосування при створенні нових джерел електромагнітної енергії (лазерів на вільних електронах).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Schott G.A. // Phil. Mag. - 1907. - **13**. - P.189-213.
2. Schott G.A. // Ann. der Phys. - 1907. - **24**. - P. 635-660.
3. Schott G.A. Electromagnetic Radiation. - Cambridge: Cambridge University Press, 1912.
4. Тернов И.М. Синхротронное излучение. // УФН. - 1995. - **165**, №4. - С.429-456.
5. Blewett J.P. Radiation Loss in the Induction Electron Accelerator // Phys. Rev. - 1946. - **69**, No.3-4. - P.87-95.
6. Elder F.R., Langmuir R.V., Pollock H.C. Radiation from Electrons Accelerated in a Synchrotron // Phys. Rev. - 1948. - **74**, No.1. - P.52-56.
7. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. К теории "светящегося электрона" // Докл. АН СССР. - 1948. - **59**, №9. - С. 1551-1554.
8. Schwinger J. On the Classical Radiation of Accelerated Electrons // Phys. Rev.- 1949.- **75**, No. 12. - P. 1912-1925.
9. Адо Ю.М., Черенков П.А. Распределение энергии в спектре некогерентного излучения электронов, движущихся в синхротроне // Докл. АН СССР.- 1956. - **110**, № 4. - С. 35-37.
10. Tomboulia D.H., Hartman P.L. Spectral and Angular Distribution of Ultraviolet Radiation from the 300 MeV Cornell Synchrotron // Phys. Rev. - 1956. - **102**, No.6. - P. 1423-1438.

11. *Bathov G., Freitag E., Haensel R.J.* Measurement a Synchrotron Radiation in the X-Ray Region // *J. Appl. Phys.* - 1966. - **37**, No.9. - P. 3449-3454.
12. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля. - Москва-Ленинград: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951.
13. *Соколов А.А., Тернов И.М.* О поляризационных эффектах в излучении "светящегося электрона" // *ЖЭТФ.* - 1956. - **31**, №3. - С. 473-478.
14. *Королев Ф.А., Марков В.С., Акимов Е.М., Куликов О.Ф.* Экспериментальное исследование углового распределения и поляризации оптического излучения электронов в синхротроне // *Докл. АН СССР.* - 1956. - **110**, №4. - С.542-544.
15. *Королев Ф.А., Куликов О.Ф., Яров А.С.* Эллиптическая поляризация излучения релятивистских электронов в магнитном поле // *Оптика и спектроскопия* - 1968. - **24**, №3. - С. 316-321.
16. *Гришанин Б.А., Титов А.В., Шорин К.Н., Яров А.С.* Измерение параметров Стокса и степени поляризации синхротронного излучения // *Краткие сообщения по физике.* - 1984. - №7. - С. 37-42.
17. *Master W.H.* Matrix Representation of Polarization // *Rev. Mod. Phys.* - 1961. - **33**, No.4. - P. 8-28.
18. *Joos P.* Measurement of the Polarization of Synchrotron Radiation // *Phys. Rev. Lett.* - 1960. - **4**, No.11. - P. 558-559.
19. *Воробьев А.А., Никитин М.М., Кожевников А.В.* Экспериментальное исследование поляризации синхротронного излучения электронов высоких энергий // *Атомная энергия.* - 1970. - **29**, №5. - С. 389-391.
20. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. - Москва: Наука, 1974.
21. *Тернов И.М., Михайлин В.В.* Синхротронное излучение. Теория и эксперимент. - М.: Энергоатомиздат, 1986.
22. *Тернов И.М., Михайлин В.В., Халилов В.Р.* Синхротронное излучение и его применения. - М.: Изд-во Моск. ун-та., 1985.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. - М.: Наука, 1973.
24. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. - М.: Наука, 1987.
25. Синхротронное излучение в исследовании твердых тел / Под ред. А.А. Соколова - М.: Мир, 1970.
26. Синхротронное излучение. Свойства и применения /Под ред. К. Кунца - М.: Мир, 1981.
27. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.
28. *Alfven H., Herlofson M.* Cosmic Radiation and Radio Stars // *Phys. Rev.* - 1950. - **78**, No.5. - P. 616.
29. *Гинзбург В.Л.* Космические лучи как источник галактического излучения // *Докл. АН СССР.* - **76**, №3. - С. 377-380.
30. *Шкловский И.С.* О природе свечения Крабовидной туманности // *Докл. АН СССР.* - 1953. - **95**, №6. - С. 983-984.
31. *Домбровский В.А.* О природе излучения Крабовидной туманности // *Докл. АН СССР.* - 1954. - **94**, №6. - С. 1021-1024.
32. *Гинзбург В.Л.* Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе // *Изв. АН СССР.* - 1947. - **11**, №2. - С. 826-893.
33. *Motz H.* Applications on the Radiation from Fast Electron Beams // *J. Appl. Phys.* - 1951. - **22**, No.5. - P. 527-535.
34. *Landecker K.* Possibility of Frequency Multiplication and Wave Amplification Means of Some Relativistic Effects // *Phys. Rev.* -1952. - **86**, No.6. - P. 852-855.
35. *Motz H., Thon W., Whitehurst R.N.* Experiments on Radiation by Fast Electron Beams // *J. Appl. Phys.* - 1953. - **24**, No.7. - P. 826-833.
36. *Годвин Р.П.* Синхротрон как источник света // *Синхротронное излучение в исследовании твердых тел.* - М.: Мир, 1970. - С. 135-202.
37. *Алферов Д.Ф., Баймаков Ю.А., Беловинцев К.А., Бессонов Е.Г., Черенков П.А.* Наблюдение ондуляторного излучения на синхротроне "Пахра" // *Письма в ЖЭТФ.* - 1977. - **26**, № 6. - С. 525-529.
38. *Kincaid B.M.* A Short Helical Wiggler as an Improved Source of Synchrotron Radiation // *Journ. Appl. Phys.* - 1977. - **48**, No.7. - P.2684- 2691.
39. *Тернов И.М., Багров В.Г., Бордовицын В.А.* Об особенностях излучения заряда, движущегося в магнитном поле произвольной конфигурации // *Вестник Моск. ун-та. Сер. физ., астроном.* - 1972. - **13**, №2. - С.248- 250.
40. *Алферов Д.Ф., Баймаков Ю.А., Беловинцев К.А., Бессонов Е.Г., Серов А.В., Черенков П.А.* Источники индуцированного излучения на основе резонансных электронных ускорителей // *ЖТФ.* - 1983. - **53**, № 2. - С. 270-277.
41. *Алферов Д.Ф. Баймаков Ю.А., Бессонов В.Г.* Ондуляторное излучение // *Труды ФИАН.* -1975. - **80**. - С. 100-124.
42. *Никитин М.М., Энн В.Я.* Ондуляторное излучение. - М.: Энергоиздат, 1988.
43. *Madey J.M.J.* Stimulated Emission Brensstrahlung in a Periodic Magnetic Field // *J. Appl. Phys.* - 1971. - **42**, No.5. - P. 1906-1913.
44. *Elias L.R., Fairbank W.M., Macley M.J., Schwettman H.A., Smith T.I.* Observation of Stimulated Emission of Radiation by Relativistic Electrons in a Spatially Periodic Transverse Magnetic Field // *Phys. Rev. Lett.* - 1976. - **36**, No. 13. - P. 717-720.
45. *Deacon D.A., Elias L.R., Madey J.M.J., Raiman G.J., Schwettman H.A., Smith T.I.* First Operation of a Free-Electron Laser // *Phys. Rev. Lett.* - 1977. - **38**, No.16. - P. 892-894.
46. *Федоров М.В.* Взаимодействие электронов с электромагнитным полем в лазерах на свободных электронах // *УФН.* - 1981. - **135**, №2. - С. 213-236.

47. Буляк С.В., Курилко В.І. Когерентність ондуляторного випромінювання та ефективність лазерів на вільних електронах // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. - 1998. - №7. - С. 82-84.
48. Багров В.Г., Моисеев М.Б., Никитин М.М., Федосов Н.И. Низкочастотное излучение заряда при движении по дуге окружности // Изв. высш. учебн. завед. Физика. - 1981. - **24**, №3. - С. 26-31.
49. Багров В.Г., Тернов И.М., Федосов Н.И. Излучение релятивистских электронов, движущихся по дуге окружности // ЖЭТФ. - 1982. - **82**, №5. - С. 1442-1448.
50. Багров В.Г., Тернов И.М., Федосов Н.И. Основные закономерности излучения релятивистских электронов при их движении по дуге окружности // Докл. АН СССР. - 1982. - **263**, №6. - С. 1338-1344.
51. Mcmillan R.M. Radiation from a Group of Electrons Moving in a Circular Orbit // Phys. Rev. - 1945. - **68**, No.5-6. - P. 144-145.
52. Schwinger J. Electron Radiation in High Energy Accelerators // Phys. Rev. - 1946. - **70**, No.9-10. - P. 798-799.
53. Nodvich M.M., Saxon D.S. Suppression of Coherent Radiation by Electrons in a Synchrotron // Phys. Rev. - 1954. - **96**, No.1. - P. 180-184.
54. Bernard C. Rouseau M. Statistical Properties of Synchrotron Radiation // Journal of the Optical Society of America. - 1974. - **64**, No.11. - P. 1423-1444.
55. Иогансон А.В., Рабинович М.С. Когерентное излучение электронов в синхротроне // ЖЭТФ. - 1958. - **35**, №4. - С. 1013-1116.
56. Константинович А.В., Фортуна В.В. К теории излучения систем не взаимодействующих зарядов движущихся в постоянном магнитном поле в вакууме // Изв. высш. учебн. завед. Физика. - 1983. - **26**, №12. - С. 102-104.
57. Nakazato T., Oyamada M., Niimura N., Urasawa S., Konno O., Kagaya A., Kato R., Kamiyama T., Torizuka Y., Nanba T., Kondo Y., Shibata Y., Ishi K., Ohsaka T., Ikazawa M. Observation of Synchrotron Radiation // Phys. Rev. Lett. - 1989. - **63**, No.12. - P. 1245-1248.
58. Ishi K., Shibata Y., Takahashi T., Mishiro H., Ohsaka T., Ikezawa M., Kondo Y., Nakazato T., Urasawa S., Niimura M., Kato R., Shibasaki Y., Oyamada M. Spectrum of Coherent Synchrotron Radiation in the Far-Infrared Region // Phys. Rev. - 1991. - **43A**, No.10. - P. 5597- 5804.
59. Shibata Y., Ishi K., Takahashi T., Arai F., Ikezawa M., Takami K., Matsuyama T., Kobayashi K., Fujita Y. Observation of Coherent Synchrotron, Čerenkov and Wake-Field Radiation at Millimetric wavelengths Using an L-Band Linear Accelerator // Phys. Rev. - 1991. - **44A**, No.6. -P. 3449- 3551.
60. Klepikov N.P., Ternov I.M., Epp V.Ya. Coherent Radiation of Charged Particles Moving along a Closed Path // Nucl. Instrum. and Meth. Phys. Phys. Rev. - 1989. - **282A**, No.2-3. - P. 413- 416.
61. Klepikov N.P., Ternov I.M. Coherent Sychrotron Radiation of a Bunch of Particles // Nucl. Instrum. and Meth. Phys. Phys. Rev.- 1991. - **308A**, No.1-2 - P. 113-114.
62. Клепиков Н.П., Тернов И.М. Когерентное синхротронное излучение сгустков частиц // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1990. - **33**, №3. - С. 9-15.
63. Michel F.C. Intense Coherent Submillimetric Radiation in Electron Storage Rings // Phys. Rev. Lett. - 1982. - **48**, No.9. - P. 580-583.
64. Michel F.C. Radio Pulsar Disk Electrodynamics // Astrophys. Journ. - 1985. - **266**, No.1. Pt.1. - P. 188-200.
65. Черенков П.А. Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ -радиации // Докл. АН СССР. - 1934. - **2**, №8. - С. 451-454.
66. Черенков П.А. Влияние магнитного поля на видимое свечение жидкостей, вызываемое гамма-лучами // Докл. АН СССР. - 1936. - **3**, №9. - С. 413-416.
67. Черенков П.А. Видимое свечение чистых жидкостей под действием жестких β -лучей // Докл. АН СССР. - 1937. - **14**, №3. - С. 99-102.
68. Черенков П.А. Угловое распределение интенсивности свечения, вызываемого в чистых жидкостях γ -лучами // Докл. АН СССР. - 1937. - **14**, №3. - С. 103-105.
69. Джелли Дж. Черенковское излучение. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. - 334 с.
70. Зрелов В.П. Излучение Вавилова-Черенкова. - М.: Атомиздат, 1968. - Т.1,2.
71. Гамм И.Е., Франк И.М. Когерентное излучение быстрого электрона в среде // Докл. АН СССР.- 1937.- **14**, №3.-С. 107-112.
72. Ситенко А.Г. О прохождении заряда через магнетик // Докл. АН СССР. - 1954. - **98**, №3. - С. 377-380.
73. Иваненко Д.Д., Цытович В.Н. К теории потерь энергии заряженных частиц при прохождении ферромагнетика // ЖЭТФ. - 1955. - **28**, №3. - С. 291-296.
74. Nag B.D., Sayied A.M. Electromagnetics of Moving Media and the Theory of the Čerenkov Effect // Proc. Roy. Soc. - 1956. - **235**. - P. 544-551.
75. Balazs N.L. Čerenlov Radiation of Neutral Particles with a Magnetic Moment // Phys. Rev. - 1956. - **104**, No.5. - P. 1220- 1222.
76. Болотовский Б.М. Теория эффекта Вавилова-Черенкова // УФН. - 1957. - **22**, №3. - С. 201-246.
77. Гинзбург В.Л., Эйдман В.Я. О черенковском излучении дипольных моментов // ЖЭТФ.- 1958. - **35**, №6. - С. 1508-1512.
78. Франк И.М. Излучение Вавилова-Черенкова для электрических и магнитных мультиполей // УФН. - 1984. - **144**, №2. - С. 251-275.

79. Danos M. Cherenkov Radiation from Extended Electron Beams // Journ. Appl. Phys. - 1955.- **26**, No.1. - P. 2-7.
80. Neufeld J. Radiation Produced by an Electron Beam Passing through a Dielectric Medium // Phys. Rev. - 1959. - **116**, No.4. - P. 785-787.
81. Buskirk F.R., Neighbours J.R. Čerenkov Radiation from Periodic Electron Bunchs // Phys. Rev. - 1983. - **28A**, No.3. - P.1531-1538.
82. Villavicencio M., Roa-Neri J.A.E., Jimenez J.L. The Cherenkov Effect for Non-Rotating Extended Charges // Nuovo Cimento. - 1996. - **111B**, No.9. - P. 1041-1049.
83. Константинович I.A. Потужність випромінювання системи електронів, що рухаються з постійною швидкістю у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 40: Фізика. – Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.20-21.
84. Linhart J.C. Cherenkov Radiation of Electrons Moving Parallel to a Dielectric Boundary // Journ. Appl. Phys. - 1955. - **16**, No.5. - P. 527-533.
85. Ситенко А.Г., Ткалич В.С. Об эффекте Черенкова при движении заряда над границей раздела двух сред // ЖТФ. - 1959. - **29**, №9. - С.1074-1085.
86. Гарибян Г.М., Мергелян О.С. Излучение заряда пролетающего параллельно границе раздела сред // Изв. АН АрмССР. - 1960. - **13**, №2. - С. 123-130.
87. Thomas R.B.Jr. Cherenkov Radiation near a Dielectric Boundary // Phys. Rev. -1972. -**5A**, No.3. - P. 1131-1137.
88. Цытович В.Н. К вопросу об излучении быстрых электронов в магнитном поле при и наличии среды // Вестник Моск. ун-та. Физика. - 1951. - №11. - С. 27-36.
89. Kitao K. Energy Loss and Radiation of Girating Charged Particle in a Magnetic Field // Progr. of Theor. Phys. - 1960. - **23**, No.5.- P. 759-775.
90. Erteza A., Newman J.J. Cherenkov Radiation from an Electron Traveling in a Circle // Journ. Appl. Phys. - 1962. - **33**, No.5. - P. 1864-1868.
91. Константинович А.В., Ницович В.М. Спектральное распределение излучения заряда, движущегося по окружности в прозрачном диэлектрике // Тез. Докл. Республиканской конференции по молекулярной спектроскопии. Часть I. Спектроскопия твердого тела. - г. Черновцы, 12-17 октября 1972. - Киев: Наук. думка, 1972. - С. 49-50.
92. Эйдман В.Я. Излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме // ЖЭТФ. - 1958. - **34**, №1. - С. 131-138.
93. Константинович А.В., Ницович В.М. Классическая теория излучения заряда, движущегося по спирали // Изв. высш. учебн. завед. Физика. - 1971. - **14**, №5. - С. 29-34.
94. Константинович А.В., Ницович В.М. Енергетичні втрати заряду що рухається в діелектрику // Тез. Доп. Першої конференції молодих вчених західних областей УРСР, 21-22 грудня 1972. - Львів, 1972. - С. 273-274.
95. Константинович А.В., Ницович В.М. Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // Известия высших учебных заведений. Физика. - 1973. - **16**, № 2. - С. 59-62.
96. Константинович А.В., Ницович В.М. Спектральний розподіл потужності випромінювання заряду, що рухається по спіралі в диспергуючому прозорому феродіелектрику // УФЖ. - 1973. - **18**, № 5. - С. 853-854.
97. Куканов А.Б., Константинович А.В. К вопросу о потерях энергии на излучение заряженной частицы в одноосном кристалле // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. астрон. - 1973. - **14**, №4. - С. 491-493.
98. Куканов А.Б., Константинович А.В. Об одном применении метода охватывающей поверхности в классической теории излучения // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. астрон. - 1975. - **16**, №4. - С. 473-481.
99. Куканов А.Б., Константинович А.В. Об одном обобщении метода охватывающей поверхности в классической теории излучения // Изв. высш. учебн. завед. Физика. - 1975. - **18**, №8. - С. 7-11.
100. Куканов А.Б., Константинович А.В. Применение метода силы самодействия в классической теории излучения. Излучение электрическим зарядом в ондуляторе при наличии прозрачного изотропного ферродіелектрика // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. астрон. - 1975. - **16**, №6. - С. 706-710.
101. Константинович А.В., Константинович И.В. Спектр излучения заряда в постоянном магнитном поле в прозрачном ферродіелектрике // Спектроскопия молекул и кристаллов. Часть 2. Материалы 4-й Республиканской школы семинара. – Черновцы, 1979.- Киев - 1980 - С. 277-279.
102. Константинович А.В., Фортуна В.В. Метод силы самодействия Лоренца в классической теории излучения зарядов движущихся в прозрачном ферродіелектрике и в вакууме / Чернов. ун-т. - Черновцы, 1982. - 20 с. Рукопись Деп. в ВИНТИ 9.11.82 г., № 5524.
103. Schwinger J., Tsai Wu-yang, Erber T. Classical and Quantum Theory of Synergic Synchrotron-Čerenkov Radiation // Ann. of Phys. - 1976. - **96**, No.2. - P. 303-332.
104. Dirac P.A.M. Classical Theory of Radiating Electrons // Proc Roy. Soc. Ser.A.- 1938. - **167**, No. 1. - P. 148- 169.
105. Соколов А.А. К классической теории элементарных частиц (точечный электрон) // Вестник Моск. ун-та. - 1947.- № 2.- С. 33-48.
106. Константинович А.В., Мельничук С.В., Константинович I.A. Класична теорія випромінювання заряджених частинок. I. Запізнаючи і випереджаючи потенціали та напруженості електромагнітного поля і метод сили самодії Лоренца // Науковий вісник ЧНУ. Вип. 102: Фізика. Електроніка – Чернівці: ЧНУ, 2001. - С. 5-13.

107. *Konstantinovich A.V.* Synchrotron Radiation of Charged Particles Moving in a Constant Magnetic Fields // National Physics Conference. Paper Abstracts. - Romanian Physical Society, Romania, Constanta, October 13-15, 1993. - P. 146.
108. *Konstantinovich A.V., Golovach V.N., Guralyuk M.N., Konstantinovich I.A.* Spectral and Angular Distributions of the Synchrotron Radiation of Charged Particles Moving in a Constant Magnetic Fields // National Physics Conference. Paper Abstracts. - Romanian Physical Society, Romania, Sibiu, September 21-24, 1994. - P. 153.
109. *Konstantinovich A.V., Golovach V.N., Konstantinovich I.A.* The Pecularity of Radiation Spectrum of an Electron Spiraling in Constant and Homogeneous Magnetic Field in Vacuum // National Physics Conference. Paper Abstracts. - Romanian Physical Society, Romania, Baia Mare, November-December 30-2, 1995. - P. 78.
110. *Константинович А.В.* Спектр випромінювання заряджених частинок, які рухаються в ізотропному ідеальному феродіелектрику // Науковий вісник ЧДУ. Вип.29: Фізика. – Чернівці: ЧДУ, 1998. - С. 21-26.
111. *Константинович А.В.* Класична теорія випромінювання електрона. I. Потужність випромінювання системи електронів, які рухаються вздовж довільної траєкторії в ізотропному ідеальному феродіелектрику // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 32: Фізика. - Чернівці, ЧДУ, 1998. - С. 3-7.
112. *Константинович А.В., Мельничук С.В., Константинович І.А., Жаркой В.П.* Особливості спектра випромінювання системи електронів, які рухаються в ізотропному феродіелектрику // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 32: Фізика. - Чернівці ЧДУ, 1998. - С. 8-12.
113. *Константинович А.В.* Класична теорія випромінювання електрона. II. Миттєва потужність випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж довільної траєкторії у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 40: Фізика. – Чернівці: ЧДУ, 1998. - С. 14-15.
114. *Константинович А.В., Константинович І.А.* Класична теорія випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються вздовж довільної траєкторії у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧДУ. Вип. 66: Фізика. Електроніка. - Чернівці: ЧДУ, 1999.- С. 41-42.
115. *Константинович А.В., Мельничук С.В., Раренко І.М., Константинович І.А., Жаркой В.П.* Спектр випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі // Журнал фізичних досліджень. - 2000. - 4, № 1. - С. 48-56.
116. *Konstantinovich A.V.* Classical Radiation Theory Charged Particles Moving in Vacuum and in Nonabsorbables Media // National Physics Conference. Paper Abstracts. - Romanian Physical Society, Romania, Constanta, September 21-23, 2000. - P. 114.
117. *Konstantinovich I.A.* Radiation Spectrum on The System of Charged Particles Moving in Nonabsorbables Medium // National Physics Conference. Paper Abstracts. - Romanian Physical Society, Romania, Constanta, September 21-23, 2000. - P. 109.
118. *Константинович А.В.* Движение и излучение релятивистских заряженных частиц в вакууме и в прозрачной среде: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Черновцы, 1974.
119. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.
120. *Константинович А.В.* Классическая микроскопическая теория излучения заряда, движущегося по спирали и метод функции Грина // Изв. высш. учебн. завед. Физика. - 1971. - 14, №7. - С.145-147.
121. *Соколов А.А., Жуковский В.Ч., Колесникова М.М., Никитина Н.С., Шишанин О.Е.* К теории синхротронного излучения при движении электрона по спирали // Изв. высш. учебн. завед. Физика. - 1969. - 12, №2. - С. 108-116.
122. *Алферов Д.Ф., Башмаков Ю.А., Бессонов Е.Г.* К теории ондуляторного излучения // ЖТФ. - 1973. - 43, №10. - С. 2126-2132.
123. *Diambrini G.* Monochromatic and Polarized Beams of γ Quanta // Proc. Int. Conf. on Electromagnetic Interaction (Dubna). - 1967. - 4. - P. 251-276.