УДК 539.101:538.3

© 2002р. А.В. Константинович, С.В. Мельничук, І.А. Константинович

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК, ЩО РУХАЮТЬСЯ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛЯХ. IV. СПЕКТР ВИПРОМІНЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК, ЩО РУХАЮТЬСЯ В ОНДУЛЯТОРАХ В ІЗОТРОПНИХ НЕПОГЛИНАЮЧИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Дана робота є узагальненням і подальшим розвитком досліджень авторів в області випромінювання заряджених частинок, що рухаються в електромагнітних полях, в ізотропних непоглинаючих середовищах та у вакуумі. Методом сили самодії Лоренца досліджені миттєва та середня потужності випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в ондуляторах у непоглинаючих ізотропних середовищах та у вакуумі.

The work is the generalization and further development of the studies of the authors in the field of the radiation of charged particles moving in electromagnetic fields in nonabsorbable isotropic media and in vacuum. The expressions of the momentary and average radiation power of the system of noninteracting charged particles moving in undulators in nonabsorbable isotropic media and in vacuum are studied by using the Lorentz's self-interaction method.

Вступ

Вперше на можливість випромінювання релятивістськими електронами при їх русі в періодичних системах (електричний ондулятор) вказав Гінзбург ще в 1947 р. [1].

Термін "ондулятор" ввів Мотц [2-4]. За допомогою магнітного ондулятора Мотц [4] провів перші досліди зі спостереження ондуляторного випромінювання.

Теорія випромінювання заряджених частинок в ондуляторах важлива з точки зору створення інтенсивних джерел електромагнітного випромінювання в області міліметрового та субміліметрового діапазону [1,5], а також можливих застосувань приладів такого роду в ядерній фізиці для вимірювання енергії швидких заряджених частинок [2]. Теорії випромінювання заряджених частинок в ондуляторі присвячено ряд досліджень [2-3,6-19].

Важливим кроком у цьому напрямку є встановлення ондулятора в прямолінійний проміжок синхротрона або накопичувального кільця [19-21].

Останнім часом значення досліджень ондуляторів зростає у зв'язку з реалізацією програми створення генераторів когерентного випромінювання на вільних електронах (лазерів на вільних електронах) [19,22-26].

Метою даної роботи є дослідження спектра випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в ондуляторі в ізотропному однорідному ідеальному феродіелектрику. Проведені дослідження є подальшим розвитком робіт [14-16].

Миттєва та середня за часом потужності випромінювання заряджених частинок

Миттєву потужність випромінювання заряджених частинок, зумовлену силою самодії Лоренца, можна виразити через потенціали. Скалярний $\varphi^{Dir}(\vec{r},t)$ та векторний $\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)$ потенціали, згідно з гіпотезою Дірака [27-33], визначаються через напіврізницю запізнюючих та випереджаючих потенціалів:

$$\varphi^{Dir} = \frac{1}{2}\left(\varphi^{ret} - \varphi^{adv}\right), \tag{1}$$

$$\vec{A}^{Dir} = \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{ret} - \vec{A}^{adv}\right). \tag{2}$$

Повну миттєву потужність $P^{tot}(t)$, зумовлену силою самодії Лоренца, будемо визначати через суму потужностей випромінюваної енергії $P^{rad}(t)$ та енергії прискорення $P^{acc}(t)$ [29,33]:

$$P^{tot}(t) = P^{rad}(t) + P^{acc}(t), \tag{3}$$

$$P^{rad}(t)=\int_{\tau}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}}{\partial t}-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi^{Dir}}{\partial t}\right)d\vec{r}\,, \quad (4)$$

$$P^{acc}(t)=\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho(\vec{r},t)\varphi^{Dir}(\vec{r},t)d\vec{r}\,, \quad (5)$$

де $\vec{j}(\vec{r},t)$ – густина струму, $\rho(\vec{r},t)$ – густина заряду.

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_1(t,\omega,\theta,\varphi)$, отримана зі співвідношення (4):

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta W_1(t,\omega,\theta,\varphi) \quad (6)$$

$$W_1(t,\omega,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$

$$\times\,\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega(\sin\theta\cos\varphi(x-x')+\right.$$

$$\left.+\sin\theta\sin\varphi(y-y'))\right]\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\cos\omega(t-t')\times$$

$$\times\left[\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right]. \quad (7)$$

Інтегруючи (6) за кутами φ, θ за допомогою співвідношень для функцій Бесселя цілочислового індексу [34]:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega(\sin\theta\cos\varphi(x-x')+\right.$$

$$\left.+\sin\theta\sin\varphi(y-y'))\right]=$$

$$=2\pi J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right), \quad (8)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta J_0(\alpha\sin\theta)\cos(\beta\cos\theta)=\frac{\sin\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \quad (9)$$

Тоді отримаємо:

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega W(t,\omega), \quad (10))$$

$$W(t,\omega)=\frac{1}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega\mu(\omega)\times$$

$$\times\frac{\sin\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\cos\omega(t-t')\times$$

$$\times\left\{\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right\}. \quad (11)$$

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектральний розподіл потужності випромінювання $W(t,\omega)$, отримана також у роботах [33,35].

Усереднена за період T потужність випромінювання заряджених частинок, що здійснюють періодичний рух, визначається виразом:

$$\overline{P}^{rad}=\overline{P}^{tot}=\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}P^{rad}(t)dt=$$

$$=\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_{\tau}d\vec{r}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi^{Dir}}{\partial t}\right), \quad (12)$$

де N_p – натуральне число. Необхідно підкреслити, що усереднена за часом потужність енергії прискорення дорівнює нулю. Цей висновок відіграє важливу роль при дослідженні процесу випромінювання заряджених частинок в ондуляторі.

Миттєва потужність випромінювання невзаємодіючої системи гетерогенних точкових заряджених частинок

При нехтуванні силою радіаційного тертя закон руху l-ї точкової зарядженої частинки визначається з рівнянь руху:

$$\frac{d\vec{p}_l}{dt}=q_l\vec{E}+\frac{q_l}{c}\left[\vec{V}_l\times\vec{B}\right], \quad (13)$$

$$\vec{p}_l=\frac{m_{0l}\vec{V}_l}{\sqrt{1-V_l^2/c^2}}, \quad (14)$$

де q_l, m_{0l}, $\vec{V}_l$ і $\vec{p}_l$ відповідно заряд, маса спокою, швидкість та релятивістський імпульс l-ї частинки.

Використовуємо функції джерел N точкових заряджених частинок

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\sum_{l=1}^{N}\vec{V}_l(t)\rho_l(\vec{r},t),\ \rho(\vec{r},t)=\sum_{l=1}^{N}\rho_l(\vec{r},t), \quad (15)$$

$$\rho_l(\vec{r},t)=q_l\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_l(t)), \quad (16)$$

де $\vec{r}_l(t)$ – закон руху l-ї частинки.

Тоді з (7) і (11) отримаємо спектрально-кутові та спектральний розподіли миттєвої потужності випромінювання невзаємодіючої гетерогенної системи N точкових заряджених частинок:

$$W_1(t,\omega,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi^2 c^3}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_l q_j\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\left(\sin\theta\cos\varphi\left(x_l(t)-x_j(t')\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin\theta\sin\varphi\left(y_l(t)-y_j(t')\right)\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta\left(z_l(t)-z_j(t')\right)\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[\vec{V}_l(t)\vec{V}_j(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right]. \qquad (17)$$

$$W(t,\omega)=\frac{1}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega\mu(\omega)\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_l q_j\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|\right\}}{\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\left\{\vec{V}_l(t)\vec{V}_j(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}. \qquad (18)$$

Підставляючи співвідношення (17) та (18) у вирази миттєвої потужності випромінювання (6), (10), приходимо до виразів середніх за часом потужностей випромінювання системи заряджених частинок у прозорих феродіелектриках:

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\times$$
$$\times W_1(t,\omega,\theta,\varphi), \qquad (19)$$

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_0^{\infty}d\omega W(t,\omega), \qquad (20)$$

де N_p – натуральне число, T – період.

Середню потужність випромінювання (20) можна переписати у вигляді:

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}P^{rad}(t)dt=$$
$$=\frac{1}{\pi c^2}\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_0^{\infty}d\omega\omega\mu(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_l q_j\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|\right\}}{\left|\vec{r}_l(t)-\vec{r}_j(t')\right|}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\left\{\vec{V}_l(t)\vec{V}_j(t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}. \qquad (21)$$

Отримані вирази для спектрально-кутових і спектральних розподілів потужності випромінювання можна використати для дослідження процесу випромінювання заряджених частинок, що рухаються в середовищі в ондуляторі.

Розглянемо частковий випадок системи гетерогенних заряджених частинок, яка здійснює прямолінійний рух. Оскільки закон руху і швидкість l-ї зарядженої частинки мають вигляд

$$\vec{r}_l(t)=V(t+\Delta t_l)\vec{k}_0,\ \vec{V}_l(t)=V\vec{k}_0, \qquad (22)$$

то усереднена за період T потужність випромінювання набуває вигляду

$$\overline{P}^{rad}=\frac{V}{\pi c^2}\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_0^{\infty}d\omega\omega\mu(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$
$$\times\sum_{l,j=1}^{N}q_l q_j\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega V\left(t+\Delta t_l-t'-\Delta t_j\right)\right\}}{(t+\Delta t_l-t'-\Delta t_j)}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\left\{1-\frac{c^2}{n^2(\omega)V^2}\right\}. \qquad (23)$$

Після деяких перетворень із (23) отримаємо:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{V}{\pi c^2}\int_0^{\infty}d\omega\omega\mu(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}dx\,S_q(\omega)\times$$
$$\times\frac{\sin\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega Vx\right\}}{x}\cos\omega x\left\{1-\frac{c^2}{n^2(\omega)V^2}\right\}, \qquad (24)$$

де зарядовий фактор $S_q(\omega)$ визначається зі співвідношення:

$$S_q(\omega)=\sum_{l,j=1}^{N}q_l q_j\cos\left[\omega\left(\Delta t_l-\Delta t_j\right)\right]. \qquad (25)$$

Інтегруючи за x у (24), отримаємо формулу для потужності випромінювання Черенкова гетерогенної системи заряджених частинок:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{V}{c^2}\int_0^{\infty}d\omega\omega\mu(\omega)S_q(\omega)\times$$
$$\times\eta\left(V-\frac{c}{n(\omega)}\right)\left\{1-\frac{c^2}{n^2(\omega)V^2}\right\}, \qquad (26)$$

де $\eta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$.

Розглянемо частковий випадок: $q_1=e$, $q_2=-e$, $\Delta t_1=\Delta t$, $\Delta t_2=2\Delta t$, тоді

$$S_q(\omega)=e^2 S_N(\omega), \qquad (27)$$

$$S_N(\omega)=2(1-\cos(\omega\Delta t)). \qquad (28)$$

Фактор когерентності $S_N(\omega)$ (28) для $\Delta t=\dfrac{l}{V}$ (l – відстань між зарядженими частинками вздовж осі Oz) збігається з виразом, отриманим Болотовським [36,37].

Система тотожних заряджених частинок в електричному ондуляторі в середовищі

Вважаємо, що заряджена частинка рухається з постійною швидкістю $\vec{V}_0=V_0\vec{k}_0$ в поперечному електростатичному полі:

$$E_x=E_0\sin\frac{2\pi z}{l},\quad E_y=E_z=0, \qquad (29)$$

де E_0, l – постійні величини.

З рівнянь руху

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{E},\quad \vec{p}=\frac{\tilde{\mathrm{E}}}{c^2}\vec{V} \qquad (30)$$

та початкових умов x=y=z=0, у наближенні постійності енергії частинки, знаходимо закон руху та швидкість зарядженої частинки [6,8-9,14-16]:

$$\vec{r}(t)=-x_0\sin\omega_0 t\,\vec{i}_0+V_0 t\,\vec{k}_0, \qquad (31)$$

$$\vec{V}(t)=-x_0\omega_0\cos\omega_0 t\,\vec{i}_0+V_0\vec{k}_0, \qquad (32)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi V_0}{l},\ x_0=\frac{eE_0}{\tilde{\mathrm{E}}}\frac{c^2}{\omega_0^2},\ \tilde{\mathrm{E}}=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}.$$

Тут m_0 – маса спокою частинки, c – швидкість світла у вакуумі, p – імпульс частинки.

Розглянемо систему тотожних точкових невзаємодіючих заряджених частинок (q_l=e), які рухаються одна за одною вздовж траєкторії в ондуляторі в ідеальному ізотропному феродіелектрику:

$$\vec{r}_l(t)=\vec{r}(t+\Delta t_l)=-x_0\sin[\omega_0(t+\Delta t_l)]\,\vec{i}_0+$$
$$+V_0(t+\Delta t_l)\vec{k}_0, \qquad (33)$$

$$\vec{V}_l(t)=\vec{V}(t+\Delta t_l)=-x_0\omega_0\times$$
$$\times\cos[\omega_0(t+\Delta t_l)]\vec{i}_0+V_0\vec{k}_0. \qquad (34)$$

Усереднену за період T потужність випромінювання знаходимо, підставляючи вирази (17), (33), (34) в (19). Тоді отримаємо:

$$\overline{P}^{rad}=\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}P^{rad}(t)dt, \qquad (35)$$

$$P^{rad}(t)=\frac{e^2}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\mu(\omega)n(\omega)\omega^2\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\cos\varphi\,x_0\left(\sin\omega_0t'-\sin\omega_0t\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta V_0(t-t')\right]\cos\omega(t-t')S_N(\omega)\times$$
$$\times\left[x_0^2\omega_0^2\cos\omega_0t\cos\omega_0t'+V_0^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right], \qquad (36)$$

де $T=2\pi\omega_0^{-1}$.

Фактор когерентності $S_N(\omega)$ визначається співвідношенням

$$S_N(\omega)=e^{-2}S_q(\omega)=\sum_{l,j=1}^{N}\cos\{\omega(\Delta t_l-\Delta t_j)\}. \qquad (37)$$

Інтегруючи за φ у (35), (36) за допомогою співвідношення (8), знаходимо:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{2\pi c^3}\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\times$$
$$\times\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\mu(\omega)n(\omega)\omega^2S_N(\omega)\times$$
$$\times J_0\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\,x_0\left(\sin\omega_0t-\sin\omega_0t'\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}\cos\theta V_0(t-t')\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[x_0^2\omega_0^2\cos\omega_0t\cos\omega_0t'+V_0^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right]. \qquad (38)$$

Після інтегрування (38) за θ, згідно зі співвідношенням (9), знаходимо

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{\pi c^2}\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\mu(\omega)\omega S_N(\omega)\times$$
$$\times\frac{\sin\left\{a\sqrt{x_0^2\left(\sin\omega_0t-\sin\omega_0t'\right)^2+V_0^2(t-t')^2}\right\}}{\sqrt{x_0^2\left(\sin\omega_0t-\sin\omega_0t'\right)^2+V_0^2(t-t')^2}}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[x_0^2\omega_0^2\cos\omega_0t\cos\omega_0t'+V_0^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right], \qquad (39)$$

де $a=\dfrac{n(\omega)}{c}\omega$.

Отже, отримані вирази (35), (38), (39) визначають через спектрально-кутовий і спектральний розподіли усереднену за період потужність випромінювання гомогенної системи заряджених частинок у електричному ондуляторі в ізотропному ідеальному феродіелектрику.

Перепишемо співвідношення (35) у вигляді:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{8\pi^2c^3}\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\mu(\omega)n(\omega)\omega^2\,S_N(\omega)\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\cos\varphi\,x_0\left(\cos\omega_0t'-\cos\omega_0t\right)+\right.$$

$$\left.+i\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_0\cos\theta\right)(t-t')\right\}\left[\left(V_0^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{c^2\left(1-n(\omega)c^{-1}\cos\theta V_0\right)^2}{n^2(\omega)\sin^2\theta\cos^2\varphi}\right].\qquad(40)$$

Використовуючи розклад у ряд за функціями Бесселя цілочислового індексу,

$$\exp\{iz\cos\omega_0t'\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^mJ_m(z)\exp(im\omega_0t'),\qquad(41)$$

$$\exp\{-iz\cos\omega_0t\}=\sum_{m'=-\infty}^{\infty}(-i)^{m'}J_{m'}(z)\times$$

$$\times\exp(-im'\omega_0t),\qquad(42)$$

та інтегральне зображення для δ-функції,

$$\delta(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp(i\alpha x),\qquad(43)$$

знаходимо

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\mu(\omega)n(\omega)\,S_N(\omega)\times$$

$$\times\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}i^m(-i)^{m'}J_m(z)J_{m'}(z)\exp\{i\omega_0t(m-m')\}\times$$

$$\times\delta\left\{\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_0\cos\theta\right)-m\omega_0\right\}\times$$

$$\times\left[\left(V_0^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right)\omega^2+\frac{c^2m^2\omega_0^2}{n^2(\omega)\sin^2\theta\cos^2\varphi}\right],\quad(44)$$

де $z=\dfrac{n(\omega)}{c}\omega x_0\sin\theta\cos\varphi$.

Використовуючи співвідношення

$$\lim_{N_p\to\infty}\frac{1}{2TN_p}\int_{-TN_p}^{TN_p}dt\exp\{i\omega_ot(m-m')\}=\delta_{mm'},\quad(45)$$

де $\delta_{mm'}=\begin{cases}1, & m=m'\\ 0, & m\neq m'\end{cases}$

отримаємо основну формулу для потужності випромінювання системи заряджених частинок у прозорому феродіелектрику в ондуляторі:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{2\pi c^3}\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\mu(\omega)n(\omega)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m^2\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega x_0\sin\theta\cos\varphi\right)S_N(\omega)\times$$

$$\times\delta\left\{\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_0\cos\theta\right)-m\omega_0\right\}\times$$

$$\times\left[\left(V_0^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right)\omega^2+\frac{c^2m^2\omega_0^2}{n^2(\omega)\sin^2\theta\cos^2\varphi}\right].\quad(46)$$

Для окремої зарядженої частинки, що рухається в прозорому феродіелектрику в електричному ондуляторі $S_N(\omega)=1$, а потужність випромінювання (46) переходить у вираз, одержаний у роботах [14-16]. При $S_N(\omega)=1$, $\varepsilon(\omega)=1$, $\mu(\omega)=1$ із (46) дістанемо результат Корхмазяна [9].

У випадку, коли відсутнє електростатичне поле, тобто $E_0=0$, $\vec{r}(t)=V_0\,t\,\vec{k}_0$, $\vec{V}(t)=V_0\vec{k}_0$, а співвідношення (39) переходить у вираз для потужності випромінювання Черенкова, системи заряджених частинок, які рухаються одна за одною вздовж прямої лінії в ідеальному ізотропному феродіелектрику [38]:

$$\overline{P}^{rad}=\frac{e^2}{c^2}V_0\int_0^{\infty}d\omega\mu(\omega)\omega S_N(\omega)\times$$

$$\times\eta\left(V_0-\frac{c}{n(\omega)}\right)\left(1-\frac{c^2}{n^2(\omega)V_0^{\,2}}\right).\qquad(47)$$

У частковому випадку, коли $q_1=e$, $q_2=e$, $\Delta t_1=\Delta t$, $\Delta t_2=2\Delta t$, фактор когерентності визначається співвідношенням

$$S_N(\omega)=2(1+\cos\omega\Delta t).\qquad(48)$$

З урахуванням рівності $\Delta t=lV_0^{-1}$ (l – відстань між зарядженими частинками) рівняння для фактора когерентності (48) переходить у вираз, отриманий Болотовським [36-37].

Як випливає з виразу (46), при $V_0<cn^{-1}(\omega)$, дискретні гармоніки розширюються у смуги, кожна з яких має мінімальну частоту $\omega_m^{\min}$ і максимальну частоту $\omega_m^{\max}$, що задовольняють рівняння

$$\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_0\cos\theta\right)-m\omega_0=0.\qquad(49)$$

При $V_0 > cn^{-1}(\omega)$ спектр випромінювання системи заряджених частинок стає неперервним і значно ускладнюється. Запишемо нульовий доданок формули (46)

$$\overline{P}_0^{rad} = \frac{e^2 V_0}{2\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \mu(\omega)\omega \times$$
$$\times S_N(\omega)\left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)V_0^2}\right)\delta\left(\cos\theta - \frac{c}{n(\omega)V_0}\right)\times$$
$$\times J_0^2\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega x_0 \sin\theta\cos\varphi\right). \qquad (50)$$

Проінтегруємо за ω решту доданків у (46)

$$\overline{P}_1^{rad} = \frac{e^2}{2\pi c^3}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \mu(\omega_m) n(\omega_m) \times$$
$$\times S_N(\omega_m)\frac{J_m^2\left(\frac{n(\omega_m)}{c}\omega_m x_0 \sin\theta\cos\varphi\right)}{\left|\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega n(\omega_m)}{c}V_0\right)\cos\theta - 1\right|_{\omega=\omega_m}}\times$$
$$\times\left[\left(V_0^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega_m)}\right)\omega_m^2 + \frac{c^2 m^2 \omega_0^2}{n^2(\omega_m)\sin^2\theta\cos^2\varphi}\right], \qquad (51)$$

де

$$\omega_m = \frac{m\omega_0}{\left|1 - \frac{n(\omega_m)V_0}{c}\cos\theta\right|}. \qquad (52)$$

Нульова гармоніка при $V_0 > cn^{-1}(\omega)$ характеризується неперервним спектром, який природно обрізається при частотах, коли $V_0 = cn^{-1}(\omega)$. Якщо $V_0 < cn^{-1}(\omega)$, вираз (50) перетворюється в нуль внаслідок неможливості перетворення в нуль аргументу дельта-функції при жодних кутах θ і φ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гинзбург В.Л.* Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе // Изв. АН СССР. - 1947. - **11**, №2. - С.826-893.
2. *Motz H.* Applications on the Radiation from Fast Electron Beams // J. Appl. Phys. - 1951. - **22**, No.5. - P.527-535.
3. *Landecker K.* Possibility of Frequency Multiplication and Wave Amplification Means of Some Relativistic Effects // Phys. Rev. - 1952. - **86**, No.6. - P.852-855.
4. *Motz H.*, *Thon W.*, *Whitehurst R.N.* Experiments on Radiation by Fast Electron Beams // J. Appl. Phys. - 1953. - **24**, No.7. - P. 826-833.
5. Миллиметровые и субмиллиметровые волны / Под ред. Р.Г. Мириманова. - М: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. *Combe E.*, Feix R. Mouvement d'un electron dans un ondulateur magnetique //C. R. Acad. Sci. Paris. - 1953. - **237**, No.21 - P.1318-1320.
7. *Combe E.*, Feix R. Frequences et puissance des ondes rayonnees dans un ondulateur magnetique // C. R. Acad. Sci. Paris. - 1953. - **237**, No.25. - P. - 1660-1662.
8. *Корхмазян Н.*А. Излучение быстрых заряженных частиц в поперечных электростатических синусоидальных полях // Изв. АН Армянской ССР. Физика. - 1970. - №5. - С.287-288.
9. *Корхмазян Н.*А. Генерация жестких квантов в электрических ондуляторах // Изв. АН Армянской ССР. Физика - 1970. - №5. - С.418-424.
10. *Корхмазян Н.*А., Элбакян С.С. Излучение быстрых заряженных частиц в магнитных и электрических ондуляторах // Изв. АН Армянской ССР. Физика. - 1971. - №7. - С.7-11.
11. *Корхмазян Н.*А., Элбакян С.С. Об одной возможности детектирования быстрых заряженных частиц // Доклады АН СССР. - 1972. - **203**, №7. - С.791-793.
12. *Алферов Д.Ф. Башмаков Ю.А.*, *Бессонов Е.Г.* К теории ондуляторного излучения // ЖТФ. - 1973. - **43**, №10. - С.2126-2132.
13. *Багров В.Г.*, *Соколов А.А.*, *Тернов И. М.*, *Халилов В.Р.* Об излучении электронов, движущихся в ондуляторе // Изв. высш. учебн. зав. Физика. - 1973. - №10. - С.50-54.
14. *Константинович А.В.* Движение и излучение релятивистских заряженных частиц, движущихся в вакууме и в прозрачной среде: Дисс… канд. физ.-мат. наук. - Черновцы, 1974.
15. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Применение метода силы самодействия Лоренца к решению некоторых задач классической теории излучения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астрон. - 1975. - **16**, №6. - С.706-710.
16. *Куканов А.Б.*, *Константинович А.В.* Об одном обобщении метода охватывающих поверхностей в классической теории излучения // Изв. высш. учебн. зав. Физика. - 1975. - №8. - С.7-11.
17. *Алферов Д.Ф. Башмаков Ю.А.*, *Бессонов В.Г.* Ондуляторное излучение // Труды ФИАН. -1975. - **80**. - С.100-124.
18. *Никитин М.М.*, *Эпп В.Я.* Ондуляторное излучение. - М: Энергоиздат, 1988.
19. *Тернов И.М.* Синхротронное излучение. // УФН. - 1995. - **165**, №4. - С.429-456.
20. *Алферов Д.Ф.*, *Башмаков Ю.А.*, *Беловинцев К.А*,. *Бессонов Е.Г.*, *Черенков П.А.* Наблюдение ондуляторного излучения на синхротроне "Пахра" // Письма в ЖЭТФ. - 1977. - **26**, №6. - С.525-529.

21. *Kincaid B.M.* A Short Helical Wiggler as an Improved Source of Synchrotron Radiation // J. Appl. Phys. - 1977. - **48**, No.7. - P.2684-2691.
22. *Madey J.M.J.* Stimulated Emission Brensstrahlung in a Periodic Magnetic Field // J. Appl. Phys. - 1971. - **42**, No.5. - P.1906-1913.
23. *Elias L. R.*, *Fairbank W, M.*, *Macley M. J.*, *Schwettman H. A.*, *Smith T. I.* Observation of Stimulated Emission of Radiation by Relativistic Electrons in a Spatially Periodic Transverse Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. - 1976. - **36**, No.13. - P.717-720.
24. *Deacon D.A.*, *Elias L.R.*, *Madey J.M. J.*, *Raiman G.J.*, *Schwettman H.A.*, *Smith T I.* First Operation of a Free-Electron Laser // Phys. Rev. Lett. - 1977. - **38**, No.16. - P.892-894.
25. *Федоров М.В.* Взаимодействие электронов с электромагнитным полем в лазерах на свободных электронах // УФН. - 1981. - **135**, №2. - С.213-236.
26. *Буляк Є. В.*, *Курилко В. І.* Когерентність ондуляторного випромінювання та ефективність лазерів на вільних електронах // Доповіді НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. - 1998. - №7. - С.82-84.
27. *Dirac P.A.M.* Classical Theory of Radiating Electrons // Proc. Roy. Soc. - 1938. - **167A**, No.1. - P.148-169.
28. *Соколов А.А.* К классической теории элементарных частиц (точечный электрон) // Вестн. Моск. ун-та. - 1947. - №2. - С.33-48.
29. *Schwinger J.* On the Classical Radiation of Accelerated Electrons // Phys. Rev. - 1949. - **5**, No.12. - P.1912-1925.
30. *Константинович А.В.*, *Ницович В.М.* Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1973. - **16**, №2. - С.59-62.
31. *Константинович А.В.*, *Фортуна* В.В. К теории излучения систем невзаимодействующих зарядов, движущихся в постоянном магнитном поле в вакууме // Изв. высш. учеб. завед. Физика. - 1983. - **26**, №12. - С.102-104.
32. *Константинович А.В.*, *Мельничук С.В.*, *Раренко І.М.*, *Константинович І.А.*, *Жаркой В.П.* Спектр випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі // Журнал фізичних досліджень. - 2000. - **4**, №1. - С.48-56.
33. *Константинович А.В.*, *Мельничук С.В.*, *Константинович І.А.* Класична теорія випромінювання заряджених частинок. I. Запізнюючі і випереджаючі потенціали та напруженості електромагнітного поля і метод сили самодії Лоренца // Науковий вісник ЧНУ. Випуск 102. Фізика. Електроніка. - Чернівці: ЧНУ, 2001. - С.5-13.
34. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971.
35. *Schwinger J.*, *Tsai Wu-yang*, *Erber T.* Classical and Quantum Theory of Synergic Synchrotron-Čerenkov Radiation // Ann. of Phys. - 1976. - **96**, No.2. - P.303-332.
36. *Болотовский Б.М.* Теория эффекта Вавилова-Черенкова // УФН. - 1957. - **62**, №3. - С.201-246.
37. *Зрелов В.Г.* Излучение Вавилова-Черенкова. В 2 т. - М.: Атомиздат, 1968. - Т.1 - 274с., Т.2. - 302с.
38. *Константинович І.*А. Потужність випромінювання системи електронів, що рухаються з постійною швидкістю у непоглинаючому ізотропному середовищі // Науковий вісник ЧДУ. Випуск 40. Фізика. - Чернівці. - ЧДУ, 1998. - С.14-15.