

ХАРАКТЕРИСТИКИ СКАЛЯРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ І СІТКИ ЇХ ВИХОРИВ. ВІДНОВЛЕННЯ ФАЗИ ОПТИЧНОГО ПОЛЯ

Розглядаються фізичні аспекти ролі вихорів та їх мереж у формуванні випадкового скалярного поля, яке переносить інформацію про зображення. Представлено результати відновлення поля зображення об'єкта різними спеціально сформованими вибірками параметрів поля, що отримані на основі характеристик окремих вихорів.

Some physical aspects of role of vortices (and its networks) in formation of statistical field transporting the information about the initial image are considered. The results of field reconstruction of object image by different chosen reconstruction samples formed under the use of field vortices characteristics are presented.

Відновлення розподілу фази за аналізом розподілу його інтенсивності (так звана обернена задача в оптиці) є старою оптичною проблемою. Теоретичні аспекти цієї проблеми розглянуті практично у повному обсязі (див., наприклад, [1]). Проте останнім часом формується нова точка зору на можливі розв'язки такої задачі, яка базується на розумінні спеціальної ролі нулів амплітуди скалярного поля [1]. Відомо [2-6], що нулі амплітуди є дислокаціями хвильового фронту (оптичними вихорами), які об'єднуються у певні системи – сітки. Елементи цих сіток пов'язані між собою а їх характеристики визначають поведінку фази поля у кожній його точці [4-6]. Відповідно наявність інформації про характеристики сітки вихорів поля дає можливість відновити параметри поля з високою імовірністю. Разом з тим, такі підходи до розв'язання оберненої задачі лише формуються і, як наслідок цього, ще не знайшли широкого застосування при розробці нових алгоритмів відновлення поля.

У цій роботі ми зробили спробу висвітлити деякі фізичні аспекти, які стосуються ролі вихорів і їх сіток у формуванні випадкового поля і переносу інформації про початкове зображення.

Відновлення поля за допомогою зсунутих "сіток нулів"

Нехай у деякій площині x_0, y_0 маємо початкове (вхідне) поле ("зображення") $U_0(x_0, y_0)$, яке характеризується певною амплітудною і випадковою фазовою модуляцією. Тоді у далекій зоні

сформується випадкове поле $V(w, v)$, яке визначається Фур'є перетворенням від поля $U_0(x_0, y_0)$. Природно, що позиції вихорів $\{w_i, v_i\}$ поля $V(w, v)$ мають теж випадковий характер.

Відомо, що сітки вихорів в загальному випадку формуються з анізотропних вихорів [5]. Проте як показано у [6] анізотропні вихорі можуть бути замінені на систему ізотропних.

У цьому випадку поведінка фази вздовж маленького кола, описаного навколо центру i -вихору з достатньою точністю може бути описана за допомогою співвідношення:

$$\Phi_i = S_i \varphi + \Phi_{0i}, \quad (1)$$

де S_i – топологічний заряд i -го вихору, Φ_{0i} – початкова фаза, яка визначає локалізацію нульової еквіфазної лінії, φ – полярний кут, якій відраховується від вісі X_i системи координат, центр якої розташований у центрі i -го вихору. При цьому кут φ відраховується у напрямку проти годинникової стрілки, а координатні системи, пов'язані з різними вихорами орієнтовані однаково, тобто спрямованість осей X_i, Y_i для всіх елементарних систем відліку така сама.

Можна показати, що Φ_{0i} може бути вибрана так, що різниця між істиною фазою поля вздовж кола, охоплюючого вихор і величиною Φ_i не більше ніж

$$|\Delta\Phi_{i\max}| = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1 + \Phi_i(\Phi_1) - \Phi_i(\Phi_2)|}{2} \leq \pi/2, \quad (2)$$

де $\Phi_i(\phi_1), \Phi_i(\phi_2)$ істинні фази вихорів у точках, де похідна по куту ϕ вздовж кола $\frac{d\Phi_i}{d\phi} = 1$.

Припустимо, що область в якій $V(w, v)$ має значну величину містить N нулів амплітуди поля.

Розглянемо деяку вибірку точкових джерел з координатами $\{w_{ik}, v_{ik}\}$. При цьому амплітуда і фаза цих джерел $\{A_{ik}, \Phi_{ik}\}$ збігається з амплітудою і фазою поля у точках $\{w_{ik}, v_{ik}\}$, а кількість точкових джерел дорівнює кількості вихорів. Така вибірка може бути описана співвідношенням:

$$V_k(w, v) = \sum_{i=1}^N A_{ik} \exp(j\Phi_{ik}) \delta(w - w_{ik}, v - v_{ik}). \quad (3)$$

Зробимо ще одне припущення. Нехай позиції точкових джерел зсунуті відносно позицій вихорів поля на величину Δl_k . Для визначеності нехай напрямком зсуву збігається, наприклад, з напрямком вісі x .

Очевидно, $U_{0k} = \mathcal{S}^{-1}(V_k)$, деякій образ поля U_0 оскільки середня відстань між вихорами дорівнює довжині кореляції поля l_{coh} [5,7]. Отже можна вважати, що $\{w_{ik}, v_{ik}\}$ і $\{A_{ik}, \Phi_{ik}\}$ визначають деяку вибірку точкових джерел достатню для реконструкції початкового поля або його певного образу. Таку вибірку будемо називати "зсунутою" відновлюючою вибіркою.

Припустимо, що, по-перше, ми замінили всі вихорі поля на систему ізотропних вихорів; по-друге, Δl_k є малим і поле підкоряється лінійному наближенню в околі нулів.

У цьому випадку

$$A_k = \alpha_i \Delta l_k, \quad (4)$$

де α_i – амплітудний фактор, якій визначає поведінку модуля амплітуди (швидкість "наростання" поля) в околі i -го нуля у x -напрямку.

Поле сформоване відновлюючою вибіркою у площині зображень є Фур'є-образом поля V_k і описується співвідношенням:

$$U_k(x, y) = j\Delta l_k \exp(jx\Delta l_k) \times \left\{ \sum_m^{N(+)} \alpha_m \exp(j\Phi_{0m}) \cdot \exp(-(w_m x + v_m y)) - \sum_n^{N(-)} \alpha_n \exp(j\Phi_{0n}) \cdot \exp(-(w_n x + v_n y)) \right\}, \quad (5)$$

де $\{w_i, v_i\}$ – координати нулів, $N(+), N(-)$ – кількість додатних і від'ємних вихорів, Φ_{0i} – початкова фаза i -го вихору.

Як можна побачити з (5) $|U_k(x, y)|^2$ не залежить від Δl_k . Якщо $x\Delta l_k \ll \pi/2$, то $U_k(x, y)$ також не залежить від Δl_k .

Замінімо вибірку (3) на таку систему елементарних полів:

$$V_{hel} = \sum_{i=1}^N \bar{a}_i V_i(w - w_i, v - v_i), \quad (6)$$

де \bar{a}_i усереднена a_i в околі i -го вихору, V_i (у полярних координатах ρ, ϕ з початком у нульовій точці) має вигляд:

$$V_i = R(\rho) \exp\{j(S_i \phi + \Phi_{0i})\}, \quad (7)$$

де $R(\rho)$ – "вихрова" амплітудна функція, яка дорівнює нулю при $\rho=0$. У цьому випадку (5) трансформується у

$$U_{hel}(x, y) \sim \sim T(r) \left\{ e^{j\Phi} \sum_m^{N(+)} \alpha_m e^{j(\Phi_{0m} - xw_m + yv_m)} + e^{-j\Phi} \sum_n^{N(-)} \alpha_n e^{j(\Phi_{0n} - xw_n + yv_n)} \right\}, \quad (8)$$

де $\Phi = \arctan(x/y)$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $T(r) = \mathcal{S}^{-1}(R)$, які прямують до $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, якщо просторові розміри $R(\rho)$ невеликі. Зауважимо, що представлення відновленого поля у формі (3) можна інтерпретувати як деяку вибірку з поля (6).

Отже, інтенсивності відновлених полів в обох випадках будуть модульовані функцією, яка є аналогом $T^2(r)$. Головними властивостями такої "вихрової" модулюючої функції $T^2(r)$ є її рівність нулю у точці $r=0$ і її збільшення при відході від цієї точки.

Для перевірки отриманих співвідношень було проведено відповідне комп'ютерне моделювання. В якості вхідного тест-поля "1" використовувалася сукупність випадково локалізованих точкових джерел з постійною інтенсивністю і випадковою фазою, яка змінювалася у межах 2π . Позиції точкових джерел були вибрані так, що в середині зображення утворювалась темна смуга (рис. 1в).

Результати комп'ютерного моделювання подані на рис. 1а, б, г.

Розподіл інтенсивності відновленого поля за допомогою зсунутої відновлюючої вибірки поданий на рис. 1а. Можна побачити, що відновлене поле промодульоване амплітудною функцією типу $T^2(r)$. Для підкреслення радіальної симетрії модулюючої функції у відновлене зображення вписане біле кільце (рис. 1б).

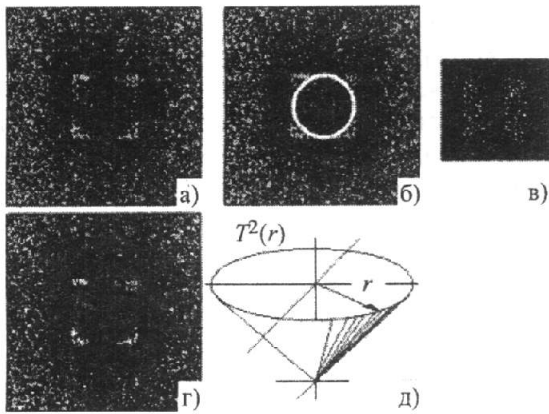


Рис.1. Модуляція відновленого поля, яке отримане за допомогою зсунутої відновлюючої вибірки. Результати відновлення (а,б,г), тест-поле "1" (в), структура модулюючої функції (д).

Результати відновлення системою хвильових структур типу (3) надані на рис.1г. Можна побачити, що структура відновленого зображення збігається із структурою відновленого зображення, яке наведено на рис.1а.

Аналогічне комп'ютерне моделювання було проведено з об'єктом іншого типу (тест-поле "2", яке відрізнялося від тест-поля "1" тим, що точкові джерела були розташовані упорядковано (відстань між ними однакова) і утворювали чітке зображення щілини (рис.2а). На рис.2б наведений розподіл інтенсивності, якій створюється таким полем у далекій зоні (площині w,v). Рис.2в - фазова карта поля у цій площині. Чим темніше колір на рисунку, тим більше значення фази спостерігається у відповідній точці поля.

Результати відновлення зображення тест-поля "2" за допомогою зсунутої відновлюючої вибірки для різної величини Δl_k подані на рис.3г-з. Рис.3б відповідає відновленому зображенню, отриманому за допомогою відновлюючої вибірки точкових джерел поля $V(w,v)$ з випадковими координатами. Кількість точкових джерел така ж сама, що і кількість нудів амплітуди. Рис.3в – зображення, відновлене за допомогою вибірки Шеннона, яка відповідає виборці значень поля $V(w,v)$ (характеристик точкових джерел), отриманих у точках поля, розташованих еквідистантно. Як можна побачити з рис.3г-е, структура відновлених зображень залишається практично без змін при зміні $\Delta l_k = l_{coh}/80 \div l_{coh}/2$. Структура відновленого поля (рис.3з) починає наближатися до структури поля, яке отримане за допомогою випадкової вибірки (рис.3б) лише після збільшення Δl_k до величини більше ніж $l_{coh}/2$.

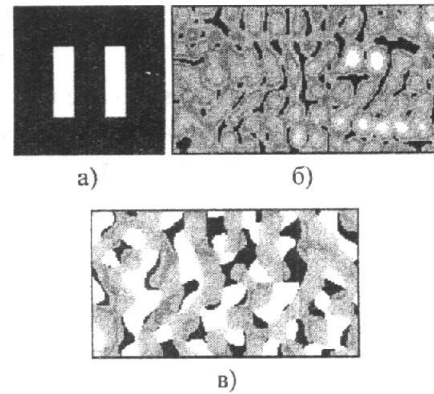


Рис.2. Моделювання з тест-полем "2" (точкові джерела розташовані упорядковано).

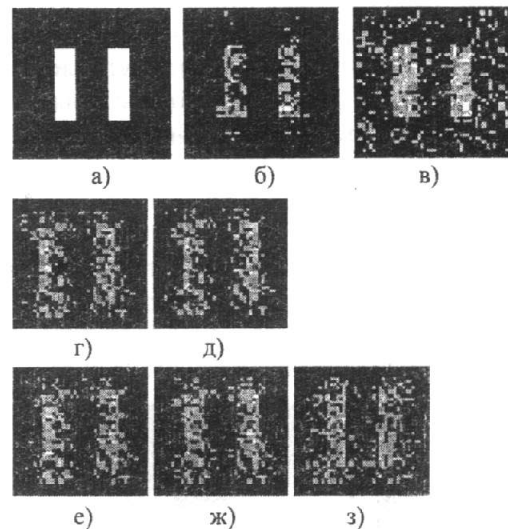


Рис.3. Відновлення тест-поля "2" за допомогою зсунутої відновлюючої вибірки. Тест-поле "2" (а), результати відновлення поля за допомогою випадкової вибірки (б), результати відновлення поля за допомогою шеннонської вибірки (в), відновлення за допомогою зсунутої відновлюючої вибірки: зсув дорівнює $l_{coh}/80$ (г), $l_{coh}/20$ (д), $l_{coh}/4$ (е), $l_{coh}/2$ (ж), l_{coh} (з).

Іншими словами відновлене поле "пам'ятає", що воно сформоване точковими джерелами, які знаходяться на крилах вихрової структури, якщо зсув відновлюючої вибірки не перевищує $\sim l_{coh}/2$.

Отже цей факт дозволяє зробити висновок, що "фазовий" вплив окремого вихору розповсюджується, на відстань, яку можна порівняти з довжиною кореляції.

Відновлення поля за допомогою регулярної вибірки точкових джерел, яка отримана за допомогою добутку хвильових функцій ізотропних вихорів.

Як впливає з [4] поле у Фур'є-площині визначається функцією добутку:

$$V_{prod}(w, v) = \left(\prod_i^N \alpha_i \right) \cdot \exp \left(j \sum_i^N \Phi_i \text{ anisotr} \right), \quad (9)$$

де $\Phi_i \text{ anisotr}$ – зміна фази навколо i -го вихору.

Завдяки заміні анізотропних вихорів поля на систему ізотропних (9) можна переписати у вигляді:

$$V_{reg \text{ isotr}}(w, v) = A(w, v) \exp \left(j \sum_i^N \Phi_i \text{ isotr} \right), \quad (10)$$

де $A(w, v)$ – істинний модуль амплітуди, $\Phi_i \text{ isotr} = S_i \phi + \Phi_{0i}$, $\phi = \arctan(v/w)$, S_i – топологічний заряд i -го ізотропного вихору.

Відновлення тест зображення за допомогою вибірки Шеннона, яка отримана з виразу (10) ілюструється рис.4г. Відстань між точковими джерелами рівна середній відстані між вихорами. Для порівняння результати відновлення зображення за допомогою вибірки Шеннона і вибірки з хаотично розташованими точковими джерелами, що мають модулі амплітуди і фази початкового поля $V(w, v)$ подані рис.3б і рис.3в відповідно.

Як можна побачити з рис.4, поле відновлене за допомогою регулярної вибірки (вибірки, яка сформована добутком хвильових функцій ізотропних вихорів) прямує до початкового поля U_0 .

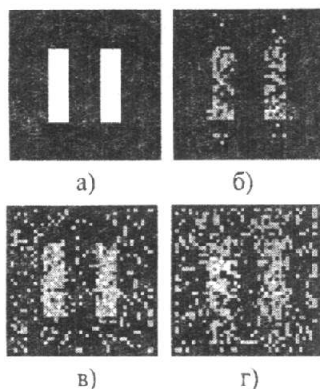


Рис.4. Поле відновлене за допомогою регулярної вибірки.

Висновки

Отже, отримані результати дозволяють зробити такі висновки:

1. "Фазовий" вплив окремого вихору розповсюджується, на відстань, яку можна порівняти з довжиною кореляції.
2. Відновлене поле промодульоване "вихровою" амплітудною функцією, якщо реконструююча вибірка точкових джерел збігається за локалізацією із зсунутою вихровою сіткою.
3. Відновлюючи вибірку можна отримати за допомогою добутку хвильових функцій ізотропних вихорів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Logan B.F. Information in zero crossing of bandpass signals // Bell Syst.Tech. J. - 1977. - 56. - P.487-510.
2. Nye J.F., Berry M. Dislocations in wave trains // Proc. R. Soc. Lond. - 1974. - A336. - P.165-190.
3. Nye J.F., F.R.S., Hajnal J.V., Hannay J.H. Phase saddles and dislocations in two-dimensional waves such as the tides // Proc.R.Soc. Lond. - 1988. - A.417. - P.7-20.
4. Freund I., Shvartsman N. Wave-field singularities: The sign principle // Phys. Rev. - 1994. - 50, No.6. - P.5164-5172.
5. Freund I., Shvartsman N., Freilikh V. Optical dislocation networks in highly random media // Opt. Comm. - 1993. - 101. - P.247-264.
6. Mokhun I. Amplitude zeroes and structure of statistical optical fields. Correlation between the field's intensity and phase // SPIE Proc. - 1998. - 3573. - P.567-571.
7. Baranova N.B., Mamayev A.V., Pilipetsk, N.F., Shkunov V.V., Zeldovich B.Ya. Wavefront dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation // J.Opt.Soc.Am. - 1983. - A73. - P.525-528.