УДК 621.382.53

© 2003р. В.Г. Охрем, О.А. Охрем

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

СКЛАДЕНИЙ АНІЗОТРОПНИЙ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИЙ ХОЛОДИЛЬНИК

Показано, що теплова взаємодія окремих холодильників складеного анізотропного холодильника призводить до підсилення ефекту охолодження: мінімальна температура при цьому зменшується.

It has been shown that thermal interaction of separate coolers of composite anisotropic refrigerator leads to the cooling effect amplification because the minimal temperature is decreased.

В роботі [1] було показано, що теплова взаємодія гілок холодильника Пельтьє при їх ідеальному тепловому контакті боковими гранями призводить до підсилення ефекту охолодження. Це пояснюється тим, що зменшуються втрати тепла через бокові грані гілок. Аналогічна ситуація може мати місце при тепловому контакті бокових граней двох анізотропних термоелектричних холодильників (АТХ), які працюють на поперечному ефекті Пельтьє.

Нехай маємо систему, що складається з двох АТХ, 1 і 2 (рис.1). Вважатимемо, що матеріали АТХ термоелектрично анізотропні (анізотропні лише за термоерс), з не залежними від температури і координат кінетичними коефіцієнтами. Тоді, вважаючи температуру вздовж поперечного перетину складеного АТХ (рис.1) двовимірною, запишемо рівняння теплопровідності у вигляді

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}+\gamma_i=0\,, \qquad (1)$$

де $\gamma_i=\dfrac{\rho_i j_i^2}{\kappa_i}$, ρ_i – питомий електроопір, κ_i – коефіцієнт питомої теплопровідності, j_i – густина електричного струму в i-му АТХ, i=1, 2 – номер АТХ. Граничні умови:

$$T_1(0,z)=T_2(0,z)=T_0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T_{1(y,-a)}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial T_{2(y,b)}}{\partial z}=0, \qquad (3)$$

$$\kappa_1\frac{\partial T_{1(y,0)}}{\partial z}=\kappa_2\frac{\partial T_{2(y,0)}}{\partial z}, \qquad (4)$$

$$T_1(y,0)=T_2(y,0). \qquad (5)$$

Умова (2) означає ізотермічний контакт нижніх граней АТХ1 і АТХ2 з термостатом при температурі T_0, (3) – адіабатичну ізоляцію зовнішніх бокових граней холодильників. Умова (4) – це неперервність теплового потоку на границі z=0, яка означає, що має місце ідеальний тепловий контакт і, разом з тим, електричний контакт відсутній. Уздовж границі температура також неперервна (умова (5)).

Холодопродуктивність даної системи складає величину

$$Q_h=\int_{-a}^{0} q_1(h,z)l dz+\int_{0}^{b} q_2(h,z)dl\,,$$

де l – довжина АТХ,

$$q_1(h,z)=-\kappa_1\frac{\partial T_1(h,z)}{\partial y}+\alpha_{12}^{(1)}j_1T_1(h,z)\,,$$

$$q_2(h,z)=-\kappa_2\frac{\partial T_2(h,z)}{\partial y}+\alpha_{12}^{(2)}j_2T_2(h,z)\,,$$

нормальні до поверхні y=h складові густини теплових потоків у точках (h,z), $\alpha_{12}^{(1)}$ і $\alpha_{12}^{(2)}$ – поперечні термоерс матеріалів 1 і 2. Максимальний перепад температури буде в режимі нульової холодопродуктивності. При Q_h=0 матимемо

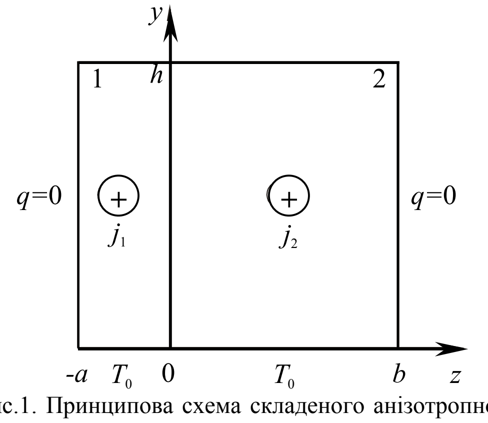

Рис.1. Принципова схема складеного анізотропного термоелектричного холодильника.

$$\kappa_1 \int_{-a}^{0} \left(\frac{\partial T_1(h,z)}{\partial y} - \beta_1 T_1(h,z) \right) dz +$$

$$+ \kappa_2 \int_{0}^{b} \left(\frac{\partial T_2(h,z)}{\partial y} - \beta_2 T_2 \right) dz = 0 ,$$

де $\beta_i = \dfrac{\alpha_{12}^{(i)}}{\kappa_i} j_i$.

Розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$T_i(y,z) = -\frac{\gamma_i}{2} y^2 + B_i y + T_0 + U_i(y,z) , \quad (6)$$

де $U_i(y,z)$ – невідома функція. Підставивши (6) в (1), одержимо

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = 0 . \quad (7)$$

Граничні умови набудуть вигляду $U_i(0,z)=0$,

$$\frac{\partial U_1(y,-a)}{\partial z} = \frac{\partial U_2(y,b)}{\partial z} = 0 ,$$

$$\kappa_1 \frac{\partial U_1(y,0)}{\partial z} = \kappa_2 \frac{\partial U_2(y,0)}{\partial z} = 0 .$$

$$\kappa_1 \int_{-a}^{0} [-\gamma_1 h + B_1 + \frac{\partial U_1(h,z)}{\partial y} - \beta_1 (-\frac{\gamma_1}{2} h^2 +$$

$$+ B_1 h + T_0 + U_1(h,z))] dz +$$

$$\kappa_2 \int_{0}^{b} [-\gamma_2 h + B_2 + \frac{\partial U_2(h,z)}{\partial y} - \beta_2 (-\frac{\gamma_2}{2} h^2 +$$

$$+ B_2 h + T_0 + U_2(h,z))] dz = 0 . \quad (8)$$

Представимо $U_i(y,z)$ розкладом в ряд Фур'є за синусами

$$U_i(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{in}(z) \sin \frac{\delta_n}{h} y , \quad (9)$$

де $f_{in}(z)$ – коефіцієнти розкладу, до знаходження яких і зводиться подальша робота. Підставимо (9) в (8), отримаємо

$$\kappa_1 a \left(-\gamma_1 h + B_1 + \beta_1 \frac{\gamma_1}{2} h^2 - B_1 \beta_1 h - \beta_1 T_0 \right) +$$

$$+ \kappa_1 \sum_n \int_{-a}^{0} \left(\frac{\delta_n}{h} f_{1n}(z) \cos \delta_n - \beta_1 f_{1n}(z) \sin \delta_n \right) dz +$$

$$\kappa_2 b \left(-\gamma_2 h + B_2 + \beta_2 \frac{\gamma_2}{2} h^2 - B_2 \beta_2 h - \beta_2 T_0 \right) +$$

$$+ \kappa_2 \sum_n \int_{0}^{b} \left(\frac{\delta_n}{h} f_{2n}(z) \cos \delta_n - \beta_2 f_{2n}(z) \sin \delta_n \right) dz = 0$$

(10)

Вважатимемо, що

$$B_i - \gamma_i h + \beta_i \frac{\gamma_i}{2} h - B_i \beta_i h - \beta_i T_0 = 0 ,$$

звідки

$$B_i = \frac{\gamma_i h - \beta_i \left(\dfrac{\gamma_i h^2}{2} - T_0 \right)}{1 - \beta_i h} . \quad (11)$$

Позначимо

$$I_{1n} = \int_{-a}^{0} f_{1n}(z) dz , \quad I_{2n} = \int_{0}^{b} f_{2n}(z) dz .$$

Тоді з рівняння (10) з урахуванням (11) знайдемо

$$\frac{\delta_n}{h} \frac{\kappa_1 I_{1n} + \kappa_2 I_{2n}}{\kappa_1 \beta_1 I_{1n} + \kappa_2 \beta_2 I_{2n}} = \mathrm{tg} \delta_n . \quad (12)$$

Отже ряд Фур'є (9) матиме місце, якщо δ_n задовольнятиме рівнянню (12), в якому коефіцієнт при δ_n зліва постійний, тобто не залежить від номера "n" [2]. Цього можна досягти за умови $\beta_1=\beta_2=\beta$, або

$$\frac{\alpha_{12}^{(1)} \kappa_2 j_1}{\alpha_{12}^{(2)} \kappa_1 j_2} = 1 . \quad (13)$$

За цієї умови рівняння (12) набуде вигляду

$$\frac{\delta_n}{\beta h} = \mathrm{tg} \delta_n .$$

Це трансцендентне рівняння, розв'язки якого для різних βh можна знайти, наприклад, в [3].

Розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$U_i(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{in} \exp(\frac{\delta_n}{h} z) + B_{in} \exp(-\frac{\delta_n}{h} z)) \sin \frac{\delta_n}{h} y ,$$

де A_{in}, B_{in} – постійні інтегрування, які знайдемо з граничних умов:

$$A_{1n} = B_{1n} \exp\left(\frac{2\delta_n}{h} a \right) ,$$

$$A_{2n} = B_{2n} \exp\left(-\frac{2\delta_n}{h} b \right) ,$$

$$B_{2n} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{\exp\left(\dfrac{2\delta_n}{h} a \right) - 1}{\exp\left(-\dfrac{2\delta_n}{h} b \right) - 1} B_{1n} ,$$

$$B_{1n} = \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) \left(D_n - \frac{2 - \beta h}{1 - \beta h} h C_n \right) \times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{2\delta_n b}{h}\right)-1\right)\times$$

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\left(\exp\left(-\frac{2\delta_n b}{h}\right)+1\right)\left(\exp\left(\frac{2\delta_n a}{h}-1\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\exp\left(-\frac{2\delta_n b}{h}\right)-1\right)\left(\exp\left(\frac{2\delta_n a}{h}\right)+1\right)\right)^{-1}.$$

де

$$C_n=\frac{2h^2}{\delta_n^2}(1-\beta h)\sin\delta_n\,,$$

$$D_n=\frac{2h^2}{\delta_n^2}\left(2+\frac{2-\delta_n^2}{\delta_n^2}\beta h\right)\sin\delta_n-\frac{4h^2}{\delta_n^3}-$$

коефіцієнти розкладу y і y^2 у ряди Фур'є за синусами. Вираз для температури матиме вигляд

$$T_i(y,z)=T_0-\frac{\gamma_i}{2}y^2+\left(\frac{\gamma_i h}{2}\frac{2-\beta_i h}{1-\beta_i h}+\frac{\beta_i T_0}{1-\beta_i h}\right)y+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{in}\exp\left(\frac{\delta_n}{h}z\right)+B_{1n}\exp\left(-\frac{\delta_n}{h}z\right)\right)\sin\frac{\delta_n}{h}y\,.$$

Подамо температуру в точці (h,0) у вигляді

$$T_1(h,0)=\frac{\gamma_1 h^2/2+T_0}{1-\beta_1 h}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2B_{1n}\exp\frac{\delta_n a}{h}\operatorname{ch}\frac{\delta_n a}{h}\sin\delta_n\,. \qquad (14)$$

З останнього виразу бачимо, що температура в точці (h,0) визначається також і сумою, що зумовлено різницею γ_2-γ_1. Запишемо вираз для цієї різниці за умови, що АТХ1 і АТХ2 ввімкнені послідовно, тобто сила струму, яка протікає через них, одна і та сама

$$\gamma_2-\gamma_1=\frac{\rho_2}{\kappa_2}j_2-\frac{\rho_1}{\kappa_1}j_1=$$

$$=\frac{\rho_1}{\kappa_1 Z_2}(Z_1-Z_2)\frac{I^2}{(ah)^2}, \qquad (15)$$

де $Z_i=\left(\alpha_{12}^{(i)}\right)^2/(\kappa_i\rho_i)$, I – сила струму. При одержанні виразу для γ_2-γ_1 використано співвідношення (13). Отже, бачимо, що різниця (15) може бути і додатною і від'ємною в залежності від співвідношення між Z_1 і Z_2.

Подальший аналіз зробимо так, як в [1]. Припустимо спочатку, що сума в (14) дорівнює нулю. Тоді

$$T_1=\frac{\gamma_1 h^2/2+T_0}{1-\beta_1 h}\,.$$

Ця температура є мінімальною при струмі

$$I_{opt}=a\frac{\kappa_1}{\alpha_1}\left(\sqrt{1+2Z_1T_0}-1\right).$$

Причому,

$$T_{\min}=\frac{\sqrt{1+2Z_1T_0}-1}{Z_1}\,.$$

Ясно, що якщо відкинута в (14) сума буде від'ємною, то це призведе до ще більшого зниження температури. Тобто має місце підсилення ефекту охолодження. Причому це підсилення може бути досить суттєвим.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Охрем В.Г.*, *Охрем О.А.* До питання про фізичні основи ефекту термоелектричного охолодження // Науковий вісник ЧДУ. Вип.30: Фізика. - Чернівці: ЧДУ, 1998. - С.152-159.
2. Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник / Л.И.Анатычук. – Киев: Наук. думка, 1979.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3т. - М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. Т.3.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. - М.: Высш. школа, 1967.